З.В.Шалик

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ВОЛЬТЕРРА – ЛОТКИ В НЕАВТОНОМНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dz} &= a_1(z)x + b_1(z)x^2 + c_1(z)xy, \\ \frac{dy}{dz} &= a_2(z)y + b_2(z)xy + c_2(z)y^2. \end{aligned} \tag{1}$$

Необходимо выделить системы такого вида, решения которых не имеют подвижных особых точек. Для простоты исследования сделаем некоторые преобразования.

Если в системе (I) положить $c_1(z) \equiv 0$, то получим интегрируемый случай. Пусть $c_1(z) \not\equiv 0$ и $c_1(z) \neq 1$, то разделив первое уравнение системы на $c_1(z)$ и введя новую переменную t так, что $c_1(z)dz = dt$, получим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1(t)x + b_1(t)x^2 + xy, \\ \frac{dy}{dt} &= a_2(t)y + b_2(t)xy + c_2(t)y^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Система (2) эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$x'' = (1 + c_2(t))\frac{x'^2}{x} + \mathcal{A}(t)xx' + \mathcal{B}(t)x' + \mathcal{D}(t)x^3 + E(t)x^2 + F(t)x, \tag{3}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) &= b_1(t) + b_2(t) - 2b_1(t)c_2(t), \\ \mathcal{B}(t) &= a_2(t) - 2a_1(t)c_2(t), \\ \mathcal{D}(t) &= b_1^2(t)c_2(t) - b_1(t)b_2(t), \\ E(t) &= b_1'(t) - a_2(t)b_1(t) - a_1(t)b_2(t) + 2a_1(t)b_1(t)c_2(t), \\ F(t) &= a_1'(t) - a_1(t)a_2(t) + a_1^2(t)c_2(t). \end{aligned} \tag{3}$$

Известно [1], что если решения дифференциального уравнения

второго порядка не имеют подвижных особых точек, то уравнение можно представить в виде

$$x'' = \tilde{\mathcal{A}}(x,t)x'^2 + \hat{\mathcal{B}}(x,t)x' + \mathcal{C}(x,t),$$

где $\mathcal{A}(x,t)$ может принимать восемь известных форм.

В уравнении (3)

$$\tilde{\mathcal{A}}(x,t) = \frac{1 + c_2(t)}{x}$$

и может быть

I. 0;

II. $\frac{1}{x}$;

III. $\frac{m-1}{mx}$, где m – целое, большее 1.

В случае I имеем, что

$$\frac{1 + c_2(t)}{x} = 0 \iff c_2(t) = -1,$$

и (3) преобразуется к виду

$$x'' = \mathcal{A}(t)xx' + \mathcal{B}(t)x' + \mathcal{D}(t)x^3 + E(t)x^2 + F(t)x, \tag{4}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) &= 3b_1(t) + b_2(t), \\ \mathcal{B}(t) &= a_2(t) - 2a_1(t) \\ \mathcal{D}(t) &= -b_1^2(t) - b_1(t)b_2(t), \\ E(t) &= b_1'(t) - a_2(t)b_1(t) - a_1(t)b_2(t) - 2a_1(t)b_1(t), \\ F(t) &= a_1'(t) - a_1(t)a_2(t) - a_1^2(t). \end{aligned}$$

Следуя [1], в (4) сделаем подстановку

$$x = \lambda(t)W,$$

где W – новая функция, $\lambda(t)$ – произвольная непрерывно дифференцируемая функция от t и $\lambda(t) \neq 0$. Тогда придем к уравнению

$$\frac{d^2W}{dt^2} = \mathcal{A}_0(t)W\frac{dW}{dt} + \mathcal{D}_0(t)W^3 + O(t), \tag{5}$$

где $\mathcal{A}_0(t)=\mathcal{A}(t)\lambda(t)$, $\mathcal{D}_0(t)=\mathcal{D}(t)\lambda^2(t)$.

Если решение уравнения (4) не имеет подвижных особых точек, необходимо, чтобы оно было приведено указанной подстановкой к уравнению вида (5), в котором $\mathcal{A}_0(t)$ и $\mathcal{D}_0(t)$ имеют следующие пары постоянных значений

(а) $\mathcal{A}_0=0$, $\mathcal{D}_0=0$;
(в) $\mathcal{A}_0=-2$, $\mathcal{D}_0=0$;
(с) $\mathcal{A}_0=-3$, $\mathcal{D}_0=-1$;
(d) $\mathcal{A}_0=-1$, $\mathcal{D}_0=1$;
(е) $\mathcal{A}_0=0$, $\mathcal{D}_0=-2$.

Исследуя случай (а) получим, что необходимыми и достаточными условиями отсутствия подвижных особых точек в решении уравнения (4) являются

$$b_1(t)=0 \quad \text{и} \quad b_2(t)=0 \quad ,$$

а это значит, что система решения которой однозначны будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt}=a_1(t)x+xy,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y-y^2.$$

Эту систему можно проинтегрировать.

В случае (в), если $b_1(t)=0$ и $b_2(t)\neq 0$, то с помощью подстановки

$$x=-\frac{2}{b_2(t)}W$$

получим систему

$$\frac{dW}{dt}=a_1(t)W-Wy+\frac{b_2'(t)}{b_2(t)}W,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y-2Wy-y^2$$

Если же $b_1(t)=-b_2(t)$, то с помощью подстановки $x=\frac{W}{b_2(t)}$ придем к системе

$$\frac{dW}{dt}=-W^2+Wy+\left(a_1(t)+\frac{b_2'(t)}{b_2(t)}\right)W,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y+Wy-y^2.$$

Обе эти системы имеют решения без подвижных особых точек.

Когда $\mathcal{A}_0=-3$, $\mathcal{D}_0=-1$, то к системе

$$\frac{dW}{dt}=(a_1(t)+U(t))W+V(t)W^2+Wy,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y+b_1(t)\lambda(t)Wy-y^2,$$

где

$$U(t)=\frac{3b_1'(t)b_1^2(t)+2b_1^2(t)b_2'(t)+2b_1(t)b_2(t)b_1'(t)+b_1'(t)b_2^2(t)}{b_1(t)(3b_1(t)+b_2(t))(b_1(t)+b_2(t))},$$

$$V(t)=\frac{3b_1(t)+b_2(t)}{3(b_1(t)+b_2(t))}$$

с однозначными решениями приведет преобразование исходной системы (2) с помощью подстановки

$$x=\frac{3b_1(t)+b_2(t)}{-3b_1(t)(b_1(t)+b_2(t))}W.$$

В случае (d) необходимо применить к системе (2) преобразование

$$x=\frac{3b_1(t)+b_2(t)}{b_1(t)(b_1(t)+b_2(t))}W.$$

Тогда получим систему

$$\frac{dW}{dt}=\left(a_1(t)-\frac{\sigma(t)}{\lambda(t)}\right)W+b_1(t)\lambda(t)W^2+Wy,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y+b_2(t)\lambda(t)Wy-y^2,$$

где

$$\sigma(t)=\frac{-3b_1'(t)b_1^2(t)-2b_1^2(t)b_2'(t)-2b_1(t)b_2(t)b_1'(t)-b_1'(t)b_2^2(t)}{b_1^2(t)(b_1(t)+b_2(t))},$$

$$\lambda(t)=\frac{3b_1(t)+b_2(t)}{b_1(t)(b_1(t)+b_2(t))}.$$

Рассматривая $\mathcal{A}_0 = 0,\ \mathcal{D}_0 = 2$ получим, что при условии $b_2(t) = -3b_1(t)$ на коэффициенты системы (2) преобразование

$$x = \frac{W}{b_1(t)}$$

приведет ее к системе с решениями без подвижных особых точек вида

$$\frac{dW}{dt} = \left(a_1(t) + \frac{b_1'(t)}{b_1(t)}\right)W \pm W^2 + Wy,$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2(t)y \mp 3Wy - y^2.$$

Перейдем к случаю II, когда

$$\frac{1 + c_2(t)}{x} = \frac{1}{x} \iff c_2(t) = 0$$

и уравнение (3) запишется в виде

$$x'' = \frac{x'^2}{x} + \mathcal{A}(t)xx' + \mathcal{B}(t)x' + \mathcal{D}(t)x^3 + E(t)x^2 + F(t)x, \qquad (6)$$

где $\mathcal{A}(t),\ \mathcal{B}(t),\ \mathcal{D}(t),\ E(t),\ F(t)$ имеют соответственно вид (3), учитывая, что $c_2(t) = 0$.

Воспользуемся преобразованием $x = \lambda(t)W$. Тогда уравнение (6) преобразуется в уравнение

$$\frac{d^2W}{dt^2} = \frac{1}{W}\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + \mathcal{A}_0(t)W\frac{dW}{dt} + \mathcal{D}_0(t)W^3 + O(t),$$

где

$$\mathcal{A}_0(t) = \mathcal{A}(t)\lambda(t) = (b_1(t) + b_2(t))\lambda(t),$$

$$\mathcal{D}_0(t) = \mathcal{D}(t)\lambda^2(t) = (-b_1(t)b_2(t))\lambda^2(t)$$

По [1] в случае II для получения уравнений второго порядка (6), а, следовательно, и систем вида (2) с решениями без подвижных особых точек необходимо рассмотреть два возможных варианта

(а) $\mathcal{A}_0(t) = 0,\ \mathcal{D}_0(t) \neq 0;$

(в) $\mathcal{A}_0(t) \neq 0,\ \mathcal{D}_0(t) = 0.$

Случай II (а) приводит к следующей системе

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)x^2 + xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2(t)y + b_2(t)xy,$$

причем должны выполняться условия

$$\begin{cases} b_1(t) = -b_2(t), \\ -b_1(t)b_2'(t) \neq 0. \end{cases}$$

В случае II (в) получим две системы дифференциальных уравнений с однозначными решениями

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2(t)y + b_2(t)xy, \quad b_2(t) \neq 0;$$

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)x^2 + xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = a_2(t)y, \quad b_1(t) \neq 0.$$

Эти системы можно проинтегрировать.

Исследуем III, когда

$$\frac{1 + c_2(t)}{x} = \frac{m-1}{mx}$$ где m - целое, большее I, следовательно, $c_2(t) = -\frac{1}{m}$.

Уравнение (3) примет вид

$$x'' = \frac{m-1}{mx}x'^2 + \mathcal{A}(t)xx' + \mathcal{B}(t)x' + \mathcal{D}(t)x^3 + E(t)x^2 + F(t)x, \qquad (7)$$

где

$\mathcal{A}(t),\ \mathcal{B}(t),\ \mathcal{D}(t),\ E(t),\ F(t)$ имеют вид (3).

Пусть $x = \lambda(t)W$. Тогда получим уравнение

$$\frac{d^2W}{dt^2} = \frac{m-1}{mW}\left(\frac{dW}{dt}\right)^2 + \mathcal{A}_0(t)W\frac{dW}{dt} + \mathcal{D}_0(t)W^3 + O(t), \qquad (8)$$

где $\mathcal{A}_0(t) = \mathcal{A}(t)\lambda(t),\quad \mathcal{D}_0(t) = \mathcal{D}(t)\lambda^2(t).$

Для выделения систем дифференциальных уравнений с решениями без подвижных особых точек необходимо исследоват [1] следующие случаи (а) m – произвольное

1) $\mathcal{A}_0(t)=0,\ \mathcal{D}_0(t)=0;$ 2) $\mathcal{D}_0(t)=-\frac{m}{(m+2)^2}\mathcal{A}_0^2(t);$

(в) $m=2$.

1) $\mathcal{A}_0(t)=0,\ \mathcal{D}_0(t)\neq 0;$ 2) $\mathcal{D}_0(t)=\frac{1}{2}\mathcal{A}_0^2(t).$

Если $\mathcal{A}_0(t)=0$ и $\mathcal{D}_0(t)=0$, то получим следующие условия

$$\begin{cases} b_1(t)=0, \\ b_2(t)=0. \end{cases}$$

Таким образом система дифференциальных уравнений, решения которой однозначны будет иметь вид

$$\frac{dx}{dt}=a_1(t)x+xy,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y+c_2(t)y^2.$$

Это интегрируемый случай.

Пусть

$$\mathcal{D}_0(t)=-\frac{m}{(m+2)^2}\mathcal{A}_0^2(t).$$

Учитывая, что

$$m=-\frac{1}{c_2(t)},\quad \mathcal{D}_0(t)=\mathcal{D}(t)\lambda^2(t),\quad \mathcal{A}_0(t)=\mathcal{A}(t)\lambda(t)$$

после соответствующих преобразований получим

$$b_2(t)=0 \qquad \text{или} \qquad b_1(t)(2c_2(t)-1)=b_2(t).$$

Тогда системы с однозначными решениями будут иметь вид

$$\frac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)x^2+xy,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y+c_2(t)y^2;$$

$$\frac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)x^2+xy,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y+b_1(t)(2c_2(t)-1)xy+c_2(t)y^2.$$

Первая полученная система может быть проинтегрирована.

Рассмотрим случай

$$\begin{cases} \mathcal{A}_0(t)=0, \\ \mathcal{D}_0(t)\neq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} b_2(t)=-2b_1(t), \\ b_1(t)\neq 0, \\ b_2(t)\neq -\frac{1}{2}b_1(t). \end{cases}$$

Тогда получим искомую систему

$$\frac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)x^2+xy,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y-2b_1(t)xy+c_2(t)y^2,$$
$$b_1(t)\neq 0,\quad b_2(t)\neq -\frac{1}{2}b_1(t).$$

Условие

$$\mathcal{D}_0(t)=\frac{1}{2}\mathcal{A}_0^2(t)$$

после преобразований дает следующие условия на коэффициенты системы (2)

$$b_2(t)=-5b_1(t) \qquad \text{или} \qquad b_2(t)=-b_1(t).$$

Итак, получим системы

$$\frac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)x^2+xy,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y-5b_1(t)xy+c_2(t)y^2;$$

$$\frac{dx}{dt}=a_1(t)x+b_1(t)x^2+xy,$$
$$\frac{dy}{dt}=a_2(t)y-b_1(t)xy+c_2(t)y^2.$$

В результате проведенных исследований выделены системы вида (2), решения которых не имеют подвижных особых точек.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков: ГоНТИ, 1939. –– С. 426––463.