УДК 517.935.2

А.Ф. Касабуцкий,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики БГАТУ;
Н.Г. Серебрякова,
кандидат педагогических наук,
заведующий кафедрой прикладной информатики БГАТУ

МНОЖЕСТВА УСТОЙЧИВОСТИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОПАРАМЕТРИЧЕСКИХ СЕМЕЙСТВ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ СО СЛАБОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ПАРАМЕТРА

Введение. Рассмотрим однопараметрическое семейство n-мерных линейных дифференциальных систем

$$dx/dt = A(t,\mu)x,\ x = (x_1, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0, \quad (1)$$

с вещественным параметром μ и матрицей коэффициентов $A(\cdot,\cdot): [0,+\infty)\times\mathbb{R}\to\mathrm{End}\,\mathbb{R}^n$, непрерывной по μ при каждом фиксированном $t\geq 0$ и кусочно-непрерывной и ограниченной на временно́й полуоси $t\geq 0$ при каждом фиксированном $\mu\in\mathbb{R}$ (своей для каждого μ постоянной). В частности, решения семейства (1) непрерывно зависят от параметра μ. Класс всех таких n-мерных однопараметрических семейств обозначим через Σ_n. Фиксируя в семействе (1) значение параметра μ, получаем линейную дифференциальную систему, которую, как и в [1], обозначаем через $\langle\mu\rangle_A$.

Следующие определения даны в [1]. Множеством S_A устойчивости семейства (1) называется множество всех тех значений параметра $\mu\in\mathbb{R}$, при которых системы $\langle\mu\rangle_A$ семейства устойчивы, а множеством Se_A экспоненциальной устойчивости этого семейства – множество всех тех $\mu\in\mathbb{R}$, при которых системы $\langle\mu\rangle_A$ семейства экспоненциально устойчивы. Очевидно включение: $Se_A\subset S_A$ для любого семейства $A\in\Sigma_n$. В [1] доказано, что для любого $n\geq 2$ совокупность множеств устойчивости и совокупность множеств экспоненциальной устойчивости семейств из Σ_n совпадают каждая с совокупностью F_σ-множеств вещественной прямой (F_σ-множество – множество, представимое в виде счетного объединения замкнутых множеств).

Основная часть. Пусть K – какой-либо подкласс класса Σ_n. Поскольку $K\subset\Sigma_n$, то в силу приведенного выше утверждения множества устойчивости и множества экспоненциальной устойчивости семейств из класса K являются F_σ-множествами. Если для любого F_σ-множества $M\subset\mathbb{R}$ найдется семейство $A\in K$, для которого $S_A = M$, то класс K назовем представительным для свойства устойчивости. Аналогично, если для любого F_σ-множества $M\subset\mathbb{R}$ найдется семейство $A\in K$, для которого $Se_A = M$, то класс K назовем представительным для свойства экспоненциальной устойчивости. В работах [1–3] установлено, что класс $\mathrm{K}_n^1\subset\Sigma_n$, состоящий из семейств, матрицы коэффициентов которых ограничены (то есть $\sup\{\|A(t,\mu)\|: (t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}\}<+\infty$) и имеют все частные производные любого порядка, а также подклассы K_n^2 и K_n^3 класса K_n^1, выделяемые соответственно условиями: $\inf\{\|A(t,\mu)\|: (t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}\}>0$ и $\|A(t,\mu)\|\to 0$ равномерно относительно μ при $t\to+\infty$, – являются представительными для свойства устойчивости. Для свойства же экспоненциальной устойчивости представительными из этих классов являются только классы K_n^1 и K_n^2, но не класс K_n^3, $n\geq 2$. Более того [1–3], классы Σ_n, K_n^1 и K_n^2 обладают следующим свойством (свойством одновременной реализуемости): для любого $n\geq 2$ и произвольного

F_σ-множества $M \subset \mathbb{R}$ в каждом из них найдется такое семейство A, для которого $S_A = Se_A = M$ (в силу включений $K_n^2 \subset K_n^1 \subset \Sigma_n$ это свойство вытекает из его справедливости для класса K_n^2). Естественно, возникает задача построения других подклассов класса Σ_n, представительных для свойств устойчивости или экспоненциальной устойчивости.

В статье приводится еще один подкласс класса Σ_n, представительный как для свойства устойчивости, так и для свойства экспоненциальной устойчивости и обладающий свойством одновременной реализуемости. Дадим определение этого подкласса. Будем считать, что семейство (1) (или его матрица коэффициентов) существенно зависит от параметра μ в точке t_0, если

$$A(t_0,\mu_1) \neq A(t_0,\mu_2)$$

для некоторых μ_1 и μ_2. Для семейства $A \in \Sigma_n$ через $H(A)$ обозначим множество тех $t \geq 0$, в которых семейство A существенно зависит от параметра μ. Вследствие условий, наложенных на матрицу $A(\cdot,\cdot)$, несложно показать, что $H(A)$ – борелевское, а значит, измеримое множество. Будем говорить, что семейство $A \in \Sigma_n$ слабо зависит от параметра μ, если относительная мера множества $H(A)$ равна нулю, то есть равносильно, если выполнено равенство

$$\lim_{t\to+\infty} t^{-1}\operatorname{mes}(H(A)\cap[0,t]) = 0,$$

где mes – мера Лебега на прямой. В противном случае будем считать, что семейство A (или его матрица коэффициентов) зависит от параметра μ существенно.

Мотивировка рассмотрения класса семейств со слабой зависимостью от параметра состоит в следующем. Представляется вполне правдоподобным, что для того чтобы достаточно сложно устроенное F_σ-множество вещественной прямой реализовывалось как множество устойчивости или множество экспоненциальной устойчивости некоторого семейства из Σ_n, необходимо, чтобы матрица коэффициентов такого семейства зависела от параметра некоторым существенным образом (одно из наиболее естественных формальных уточнений интуитивного понимания существенной зависимости от параметра приведено выше). Однако, как показывает доказываемая ниже теорема, это не так: любое F_σ-множество вещественной прямой можно реализовать как множество устойчивости и как множество экспоненциальной устойчивости некоторого семейства, зависимость которого от параметра μ с ростом t к бесконечности исчезающе мала.

Метод доказательства теоремы основан на идее, впервые примененной В.М. Миллионщиковым [4] в доказательстве несимметричности отношения почти приводимости линейных дифференциальных систем и впоследствии неоднократно использовавшейся многими авторами в различных ситуациях, в том числе для изучения асимптотического поведения решений параметрических линейных дифференциальных систем [5–7].

Теорема. *Для каждого натурального* $n \geq 2$ *и любого* F_σ*-множества* $M \subset \mathbb{R}$ *существует семейство* $A \in \Sigma_n$, *матрица* $A(\cdot,\cdot)$ *коэффициентов которого равномерно ограничена на* $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, *непрерывна по совокупности переменных и слабо зависит от параметра, такое, что его множество* S_A *устойчивости и множество* Se_A *экспоненциальной устойчивости совпадают с множеством* M.

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобится одно доказанное в [1] утверждение, которое в определенном смысле можно рассматривать как обращение теоремы Серпинского [8, с. 262] о типе множества точек поточечной сходимости последовательности непрерывных функций (более точно см. [9]). Дадим необходимые для формулировки этого утверждения определения. Будем говорить, что числовая последовательность $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется, если она, начиная с некоторого номера, является стационарной последовательностью, то есть если найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что $a_k = a_{k+1} = \ldots$. Если последовательность $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется и при всех $m \geq k$ верно равенство $a_m = a$, то будем говорить, что последовательность $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется к числу a. Для последовательности $(\varphi_m(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$ непрерывных функций $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ множеством ее стабилизируемости назовем множество всех тех $\mu \in \mathbb{R}$, при которых числовая последовательность $(\varphi_m(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$

стабилизируется. В [1] доказано, что множество M вещественной прямой тогда и только тогда будет множеством стабилизируемости некоторой последовательности непрерывных функций $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, когда оно является F_σ-множеством. Из доказательства [1] этого утверждения следует, что, каково бы ни было F_σ-множество $M\subset\mathbb{R}$, последовательность $(\varphi_m(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$ непрерывных функций $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, для которой это множество M является множеством стабилизируемости, можно выбрать такой, чтобы числовая последовательность $(\varphi_m(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизировалась к нулю, если $\mu\in M$, и чтобы $\overline{\lim\limits_{m\to+\infty}}\,\varphi_m(\mu)=1$, если $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$.

Зафиксируем для заданного F_σ-множества M последовательность $(\varphi_m(\cdot))_{m\in\mathbb{N}}$ функций, удовлетворяющую перечисленным выше условиям. Зафиксируем также какую-нибудь последовательность $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ точек временнóй полуоси, удовлетворяющую условиям $T_1=0$, $T_{2k+1}-T_{2k}=T_{2k}-T_{2k-1}-1$, $k\in\mathbb{N}$, и $T_{2k}/T_{2k-1}\to+\infty$ при $k\to+\infty$. Предварительно докажем, что если последовательность $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ удовлетворяет указанным условиям, то $k/T_{2k-1}\to 0$ при $k\to+\infty$. Обозначим $\theta(k)=T_{2k}-T_{2k-1}$. Поскольку $\theta(k)/T_{2k-1}=-1+T_{2k}/T_{2k-1}$ и отношение $T_{2k}/T_{2k-1}\to+\infty$ при $k\to+\infty$, то и $\theta(k)/T_{2k-1}\to+\infty$ при $k\to+\infty$. Таким образом, $\theta(k)\to+\infty$ при $k\to+\infty$, поскольку $T_{2k-1}\uparrow+\infty$ при $k\uparrow+\infty$. Поэтому для любого $q\in\mathbb{N}$ найдется такое $k_q\in\mathbb{N}$, что $\theta(k)\ge q$ при всех $k\ge k_q$.

Поскольку

$$T_{2k-1}=\sum_{i=1}^{2k-2}(T_{i+1}-T_i)\ge 2\sum_{j=k_q}^{k-1}(T_{2j}-T_{2j-1})=$$

$$=2\sum_{j=k_q}^{k-1}\theta(j)\ge 2q(k-k_q-1),$$

то $k/T_{2k-1}\le k\cdot 2^{-1}q^{-1}(k-k_q-1)^{-1}\le q^{-1}$ при всех достаточно больших k. Следовательно, $k/T_{2k-1}\to 0$ при $k\to+\infty$ (так как $q\in\mathbb{N}$ может быть выбрано любым), что и утверждалось. Отметим, что для последовательности $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$, как легко показать аналогично предыдущему, верно соотношение

$$\overline{\lim_{k\to+\infty}}\,T_{2k+1}/T_{2k}=1.$$

Построим вначале двумерное семейство $A\in\Sigma_2$, для которого $S_A=Se_A=M$. Для этого построим вспомогательную 2 × 2 матрицу $A_0(t,\mu)\in\Sigma_2$, равномерно ограниченную на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ (то есть $\sup\{\|A_0(t,\mu)\|:(t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}\}<+\infty$) и слабо зависящую от параметра. Далее мы подправим ее до нужной непрерывной по совокупности переменных матрицы $A(t,\mu)$. При всех $\mu\in\mathbb{R}$ обозначим: $A_0(t,\mu)=\mathrm{diag}[-3,-1]$, если $t\in[T_{2k-1},T_{2k}-1)$, $k\in\mathbb{N}$, и $A_0(t,\mu)=\mathrm{diag}[2,0]$, $t\in(T_{2k},T_{2k+1}]$, $k\in\mathbb{N}$, а также

$$A_0(t,\mu)=\begin{pmatrix}0 & \pi\varphi_k(\mu)/2\\ -\pi\varphi_k(\mu)/2 & 0\end{pmatrix},$$

если $t\in[T_{2k}-1,T_{2k}]$, $k\in\mathbb{N}$.

Очевидно, что так определенная матрица $A_0(t,\mu)$, $(t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, непрерывна по μ при каждом фиксированном $t\ge 0$ и кусочно-непрерывна по t при каждом фиксированном $\mu\in\mathbb{R}$. Матрица $A_0(t,\mu)$ равномерно ограничена на $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, поскольку $\|A_0(t,\mu)\|\le 3$ при всех $(t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Поскольку матрица $A_0(t,\mu)$ существенно зависит от параметра μ разве что на отрезках $[T_{2k}-1,T_{2k}]$, $k\in\mathbb{N}$, то $H(A_0)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}[T_{2k}-1,T_{2k}]$. Значит, если $t\in(T_{2k-1},T_{2k+1}]$, то $\mathrm{mes}(H(A_0)\cap[0,t])\le k$, поэтому $t^{-1}\mathrm{mes}(H(A)\cap[0,t])\le t^{-1}k\le k/T_{2k-1}$. Однако последнее отношение, как доказано выше, стремится к нулю при $k\to+\infty$. Следовательно, построенная матрица $A_0(t,\mu)$, $(t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ слабо зависит от параметра μ.

Рассмотрим семейство

$$dx/dt=A_0(t,\mu)x,\ x=(x_1,x_2)^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^2,\ t\ge 0. \quad (2)$$

Через $X_\mu(\cdot,\cdot)$ обозначим матрицу Коши системы $\langle\mu\rangle_{A_0}$ семейства (2). Докажем, что если $\mu\in M$, то система $\langle\mu\rangle_{A_0}$ экспоненциально устойчива. Действительно, поскольку в этом случае на отрезках $[T_{2k}-1,T_{2k}]$ при всех k, начиная с некоторого (своего для каждого $\mu\in M$), матрица $A_0(t,\mu)$ тождественно нулевая (так как при этих μ числовая последовательность $(\varphi_m(\mu))_{m\in\mathbb{N}}$ стабилизируется к нулю), то система $\langle\mu\rangle_{A_0}$ при всех достаточно больших t диагональна и оба ее показателя Ляпунова, как легко подсчитать, равны $-1/2$.

Пусть $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$ и $(k_l(\mu))_{l\in\mathbb{N}}$ – какая-либо (зависящая от μ) последовательность натуральных чисел, для которой $\lim\limits_{l\to+\infty}\varphi_{k_l(\mu)}(\mu)=1$. Для упрощения записи числа T_{2k-1}, T_{2k} и T_{2k+1} при $k=k_l(\mu)$ обозначим через T_1^l, T_2^l и T_3^l соответственно. Рассмотрим отрезок $[T_1^l,T_3^l]$ и решение $x_l(\cdot)$ системы $\langle\mu\rangle_{A_0}$ с начальным условием $x_l(T_1^l)=(0,1)^{\mathrm{T}}$. Для этого решения имеем:

$$x_l(T_2^l-1)=\exp\{-T_2^l+T_1^l+1\}x_l(T_1^l). \quad (3)$$

В силу определения матрицы коэффициентов семейства (2) матрица Коши $X_\mu(t,T_{2k}-1)$ его системы $\langle\mu\rangle_{A_0}$ при $t\in[T_{2k}-1,T_{2k}]$ – это матрица поворота на угол $\pi(t-T_{2k}+1)\varphi_k(\mu)/2$ по ходу часовой стрелки (считаем без нарушения общности систему координат Ox_1x_2 правой), то есть геометрически, на отрезке $[T_{2k}-1,T_{2k}]$ каждое решение, не меняя своей нормы, которую оно имеет в момент $t=T_{2k}-1$, поворачивается к моменту $t=T_{2k}$ на угол $\pi\varphi_k(\mu)/2$ по сравнению с его положением в момент $t=T_{2k}-1$. Поскольку $\varphi_{k_l(\mu)}\to1$ при $l\to+\infty$, то вектор $x_l(T_2^l)$ лежит в I квадранте и составляет с вектором $(1,0)^{\mathrm{T}}$ угол, не больший при всех достаточно больших l, например, $\pi/3$. Следовательно, в силу леммы В.М. Миллионщикова (например, [10, с. 90]),

$$\|x_l(T_3^l)\|\ge$$
$$\ge 2^{-1}\sin(\pi/6)\|x(T_2^l)\|\,\|X_\mu(T_3^l,T_2^l)\|= \quad (4)$$
$$=4^{-1}\|x_l(T_2^l)\|\exp\{2(T_3^l-T_2^l)\}.$$

Поскольку $\|A_0(t)\|\le3$ для всех $(t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, то для любого решения $x(\cdot)$ семейства (2) при всех $t\ge0$ имеет место неравенство $\|x(t)\|\ge\exp(-3t)\|x(0)\|$ и, в частности, неравенство

$$\|x_l(T_1^l)\|\ge\exp(-3T_1^l)\|x_l(0)\|,\ l\in\mathbb{N}.$$

Воспользовавшись этим неравенством, а также равенствами (3), $\|x_l(T_2^l)\|=\|x_l(T_2^l-1)\|$ и $T_2^l=(T_3^l+T_1^l+1)/2$, из оценки (4) получаем оценку

$$\|x_l(T_3^l)\|\ge4^{-1}\|x_l(T_1^l)\|\exp\{(T_3^l-T_1^l-1)/2\}\ge$$
$$\ge8^{-1}\|x_l(0)\|\exp\{(-7T_1^l+T_3^l)/2\}$$

[11, с. 100], а значит и неравенство

$$\|X_\mu(T_3^l,0)\|\ge8^{-1}\exp\{(-7T_1^l+T_3^l)/2\}.$$

Следовательно, для старшего показателя $\lambda_2(\mu)$ Ляпунова системы $\langle\mu\rangle_{A_0}$ вследствие формулы [12, с. 170] получаем оценку:

$$\lambda_2(\mu)=\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,t^{-1}\ln\|X_\mu(t,0)\|\ge$$
$$\ge\overline{\lim_{t\to+\infty}}(T_3^l)^{-1}\ln\|X_\mu(T_3^l,0)\|\ge1/2,$$

поскольку $T_1^l/T_3^l\to0$ при $l\to+\infty$. Таким образом, система $\langle\mu\rangle_{A_0}$ при $\mu\in\mathbb{R}\setminus M$ не является ни устойчивой, ни экспоненциально устойчивой, а при $\mu\in M$ – и устойчивой, и экспоненциально устойчивой.

Подправим построенную 2 × 2 матрицу $A_0(t,\mu)$ до непрерывной по совокупности переменных 2 × 2 матрицы $A(t,\mu)$, $(t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, такой, что для любого $\mu\in\mathbb{R}$ показатели Ляпунова систем $\langle\mu\rangle_{A_0}$ и $\langle\mu\rangle_A$ совпадают, а поэтому вследствие установленных выше свойств систем $\langle\mu\rangle_{A_0}$ для семейства (2) будем иметь $S_A=Se_A=M$. Обозначим через Δ_k^1 и Δ_k^2 отрезки с центрами в точках $T_{2k}-1$ и T_{2k} соответственно и длины $\Delta_k^i=2^{-k}\exp\{-8(T_{2k}+1)\}$, $k\in\mathbb{N}$, $i\in\{1,2\}$. Пусть $\Delta_k^i=[\tau_k^i,\tau_k^{i+2}]$, $k\in\mathbb{N}$, $i\in\{1,2\}$. Заменив при всех $\mu\in\mathbb{R}$ на каждом отрезке Δ_k^i матрицу $A_0(t,\mu)$ матрицей

$$A(t,\mu)=$$
$$=|\Delta_k^i|^{-1}\left(A(\tau_k^i,\mu)(-t+\tau_k^{i+2})+A(\tau_k^{i+2},\mu)(-t+\tau_k^i)\right),$$

$t\in\Delta_k^i$, $k\in\mathbb{N}$, $i\in\{1,2\}$, а при остальных t оставив ее без изменений, получим непрерывную по совокупности переменных матрицу $A(t,\mu)$, $(t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$. Тогда каждую систему $\langle\mu\rangle_A$ с определенной таким образом матрицей $A(\cdot,\cdot)$ можно рассматривать как систему, возмущающую систему $\langle\mu\rangle_{A_0}$ матрицей-возмущением

$$Q(t,\mu)=A(t,\mu)-A_0(t,\mu),\ t\in[0,+\infty).$$

Поскольку, как очевидно следует из определения матриц $A(\cdot,\cdot)$ и $A_0(\cdot,\cdot)$, при всех $(t,\mu)\in[0,+\infty)\times\mathbb{R}$ справедливо неравенство $\|Q(t,\mu)\|\le 6$, то

$$\int_0^{+\infty}\|Q(\tau,\mu)\|\exp(8\tau)d\tau\le 6\sum_{k=1}^{\infty}2^{-k}<+\infty .$$

Сходимость этого несобственного интеграла, так как коэффициент неправильности Ляпунова [10, с. 81] любой системы $\langle\mu\rangle_{A_0}$ не превосходит 7, означает в силу теоремы Богданова – Гробмана [13–14] (см. также [10, с. 81]), что показатели Ляпунова систем $\langle\mu\rangle_{A_0}$ и $\langle\mu\rangle_A$ совпадают, а значит, $S_A=Se_A=M$. Нужное семейство (1) при $n=2$ построено.

Для построения искомого семейства (1) при $n>2$ достаточно к построенному двумерному семейству присоединить $n-2$ уравнения $dx_i/dt=-x_i$, $i=3,\dots,n$. Теорема доказана.

Литература

1. *Барабанов, Е.А.* Множества правильности и устойчивости однопараметрических семейств линейных дифференциальных систем / Е.А. Барабанов, А.Ф. Касабуцкий // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 67–75.
2. *Касабуцкий, А.Ф.* О множествах Лебега показателя экспоненциальной устойчивости линейных дифференциальных систем с параметром / А.Ф. Касабуцкий // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2010. – № 4.– С. 58–67.
3. *Барабанов, Е.А.* Строение множеств неасимптотической устойчивости семейств линейных дифференциальных систем с параметром-множителем / Е.А. Барабанов, А.Ф. Касабуцкий // Дифференциальные уравнения. 2011. – Т. 47. – № 2. – С. 155–167.
4. *Миллионщиков, В.М.* О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений / В.М. Миллионщиков // Дифференциальные уравнения. – 1969. – Т. 5. – № 4. – С. 749–750.
5. *Рахимбердиев, М.И.* О бэровском классе показателей Ляпунова / М.И. Рахимбердиев // Математические заметки. – 1982. – Т. 31. – Вып. 6. – С. 925–931.
6. *Изобов, Н.А.* О неправильных по Ляпунову линейных системах с параметром при производной / Н.А. Изобов, Е.К. Макаров // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 11. – С. 1870–1880.
7. *Макаров, Е.К.* О множествах неправильности линейных систем с параметром при производной / Е.К. Макаров // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 12. – С. 2091–2098.
8. *Барабанов, Е.А.* Дополнение к теореме Серпинского о множестве точек сходимости последовательности непрерывных функций / Е.А. Барабанов, А.Ф. Касабуцкий // Вклад кафедры высшей математики БГАТУ в развитие теории чисел в Беларуси (к 55-летию образования БГАТУ): тез. докл. конф. – Минск, 2009. – С. 70–71.
9. *Хаусдорф, Ф.* Теория множеств / Ф. Хаусдорф. – М. – Л.: ОНТИ, 1937. – 304 с.
10. *Изобов, Н.А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Математический анализ (Итоги науки и техники). – М.: ВИНИТИ, 1974. – Т. 12. – С. 71–146.
11. *Былов, Б.Ф.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов [и др.]. – М.: Наука, 1966. – 576 с.
12. *Далецкий, Ю.Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. – М.: Наука, 1970. – 536 с.
13. *Гробман, Д.М.* Характеристические показатели систем, близких к линейным / Д.М. Гробман // Математический сборник. – 1952. – Т. 30. – Вып. 1. – С. 121–166.
14. *Богданов, Ю.С.* Характеристические числа систем линейных дифференциальных уравнений / Ю.С. Богданов // Математический сборник. – 1957. – Т. 41. – Вып. 4. – С. 481–498.

Summary

It is shown that each F_σ-set of the real line can be implemented as a set of stability and, simultaneously, as a set of exponential stability of a one-parameter family of linear differential systems, weakly dependent on the parameter.

Поступила в редакцию 10.08.2012 г.