УДК 517.57

У.А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук,
дэкан матэматычнага факультэта БДПУ;
Т.І. Борыс,
студэнтка IV курса матэматычнага факультэта БДПУ;
К.В. Падпалуха,
студэнтка IV курса матэматычнага факультэта БДПУ

МАНАГЕННАСЦЬ У СЭНСЕ У.С. ФЁДАРАВА І АБАГУЛЬНЕННЕ БІГАРМАНІЧНЫХ ФУНКЦЫЙ

Уводзіны. Няхай $p = p(x,y)$, $q = q(x,y)$ – адназначныя функцыі класа $C^1(D)$ для некаторага адназвязнага абсягу D плоскасці x,y.

Праз $C^k(D)$ абазначаем клас рэчаісных або камплексных функцый ад незалежных зменных x,y, якія маюць у абсягу D непарыўныя частковыя вытворныя да парадку k уключна. Пры $k=0$ маем клас усіх функцый, непарыўных у абсягу D.

Мяркуем $\delta = p_1q_2 - p_2q_1$ ($p_1 = \dfrac{\partial p}{\partial x}$, $p_2 = \dfrac{\partial p}{\partial y}$ і аналагічна для ўсіх разглядаемых функцый). Будзем заўсёды лічыць, што ў абсягу D існуе δ^{-1}.

Пры гэтых умовах фармальнымі вытворнымі $\dfrac{\partial f}{\partial p}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial q}$ якой-небудзь функцыі $f = f(x,y)$ класа $C^1(D)$ называюцца такія функцыі ад x і y, якія ў абсягу D вызначаюцца наступным чынам [1]:

$$\frac{\partial f}{\partial p} = \delta^{-1}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)f,$$
$$\frac{\partial f}{\partial q} = \delta^{-1}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)f. \tag{1}$$

Далей заўважым, што калі ў абсягу D маем $\dfrac{\partial f}{\partial p} = 0$, то гэта сведчыць аб тым, што функцыя f ёсць манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава (F-манагенная) адносна функцыі q у абсягу D [1–2].

Няхай $p,q,f \in C^2(D)$. Тады можна вызначыць фармальныя вытворныя другога парадку $\dfrac{\partial^2 f}{\partial p^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial q^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial q\partial p}$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial p^2} = \delta^{-1}\left(\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial p},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial q^2} = \delta^{-1}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial q},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} = \delta^{-1}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial f}{\partial p}.$$

Адзначым, што ў абсягу D $\dfrac{\partial^2 f}{\partial p\partial q} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial q\partial p}$ [1].

У працы [1] У.А. Гусевым было даследавана раўнанне $\tilde{\Delta} f = 0$, дзе $\tilde{\Delta} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial p^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial q^2}$; $f = f(x,y)$ – шуканая функцыя класа $C^2(D)$; p,q – вядомыя функцыі таго ж класа.

Прадметам даследавання ў дадзенай працы з'яўляецца дыферэнцыяльнае раўнанне ў фармальных вытворных

$$\tilde{\Delta}^2 f = 0, \tag{2}$$

дзе $\tilde{\Delta} \equiv \dfrac{\partial^2}{\partial p^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial q^2}$; паказнік 2 сведчыць аб тым, што аператар $\tilde{\Delta}$ выкарыстоўваецца паслядоўна два разы, гэта значыць $\tilde{\Delta}^2 f = \tilde{\Delta}(\tilde{\Delta} f)$; $p,\, q$ (f) – вядомыя (шуканая) функцыі класа $C^4(D)$.

Асноўная частка. Разгледзім бікамплексныя функцыі $P = p + jq$, $\bar{P} = p - jq$, $F = f + j\varphi$ $(j^2 = i^2 = -1,\ \ j \ne i)$ [3]. Будзем карыстацца далей наступнымі абазначэннямі: $f = \mathrm{Re}(f + i\varphi)$, $\varphi = \mathrm{Im}(f + i\varphi)$.

Тады з роўнасцей (1), якія вызначаюць фармальныя вытворныя, маем

$$\frac{\partial f}{\partial P}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial p}-j\frac{\partial f}{\partial q}\right),\quad \frac{\partial f}{\partial \bar{P}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial p}+j\frac{\partial f}{\partial q}\right),$$

адкуль вынікае

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{\partial f}{\partial P}+\frac{\partial f}{\partial \bar{P}},\quad \frac{\partial f}{\partial q}=j\left(\frac{\partial f}{\partial P}-\frac{\partial f}{\partial \bar{P}}\right).$$

З гэтай прычыны маем

$$\tilde{\Delta}\equiv\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{\partial^2}{\partial q^2}=4\frac{\partial^2}{\partial P\partial\bar{P}}.$$

Такім чынам, атрымліваем, што раўнанне (2) будзе раўназначным раўнанню $\frac{\partial^4}{\partial P^2\partial\bar{P}^2}=0$, якое, відавочна, можна запісаць у наступным выглядзе:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{\partial^2}{\partial q^2}\right)\left(\frac{\partial^2 f}{\partial P\partial\bar{P}}\right)=0. \qquad (3)$$

Праінтэгруем спачатку раўнанне выгляду

$$\tilde{\Delta}f=0, \qquad (4)$$

дзе $\tilde{\Delta}\equiv\frac{\partial^2}{\partial p^2}+\frac{\partial^2}{\partial q^2}$. Для гэтага нам спатрэбяцца наступныя лемы [1].

Лема 1. Выраз $\omega\equiv f dp+\varphi dq$ будзе поўным дыферэнцыялам (па зменных x,y) у абсягу D тады і толькі тады , калі $\frac{\partial f}{\partial q}=\frac{\partial\varphi}{\partial p}$, $(x,y)\in D$.

Лема 2. Няхай $P=p+jq$, $\bar{P}=p-jq$, $F=f+j\varphi$, ($j^2=i^2=-1$, $j\neq i$). Бікамплексная функцыя $F=f+j\varphi$ будзе манагеннай у сэнсе У.С. Фёдарава ў абсягу D па бікамплекснай функцыі $P=p+jq$ тады і толькі тады, калі ў разглядаемым абсягу

$$\frac{\partial f}{\partial p}=\frac{\partial\varphi}{\partial q},\ \frac{\partial f}{\partial q}=-\frac{\partial\varphi}{\partial p}. \qquad (5)$$

Няхай $F=f+j\varphi$ – любая функцыя, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па функцыі $P=p+jq$ у абсягу D. Тады ў гэтым абсягу маем сістэму (5), дзе $f=\mathrm{Re}(F)$, $\varphi=\mathrm{Im}(F)$. Адсюль, відавочна, і вынікае, што $\tilde{\Delta}f=0$ у абсягу D.

Няхай f – любое рашэнне раўнання (4) у адназвязным абсягу D. Дакажам, што знойдзецца такая функцыя φ, што функцыя $f+j\varphi$ будзе манагеннай па функцыі $P=p+jq$ у абсягу D.

Сапраўды, у абсягу D маем $\tilde{\Delta}f=0$. У гэтым выпадку, згодна з лемай 1, выраз $\omega\equiv-\frac{\partial f}{\partial q}dp+\frac{\partial f}{\partial p}dq$ будзе ў D поўным дыферэнцыялам па x,y.

Пабудуем функцыю $\varphi\equiv\varphi(x,y)=\int\limits_{x_0,y_0}^{x,y}\omega$, дзе (x_0,y_0) – фіксаваны пункт абсягу D, (x,y) – бягучы пункт гэтага абсягу. Тады $d\varphi=-\frac{\partial f}{\partial q}dp+\frac{\partial f}{\partial p}dq$, адкуль вынікае:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-\frac{\partial f}{\partial q}p_1+\frac{\partial f}{\partial p}q_1,\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=-\frac{\partial f}{\partial q}p_2+\frac{\partial f}{\partial p}q_2.$$

Атрыманыя вынікі сфармулюем у выглядзе наступнай тэарэмы.

Тэарэма 1. Калі $F=f+j\varphi$ – любая бікамплексная функцыя, манагенная па бікамплекснай функцыі $P=p+jq$ у адназвязным абсягу D плоскасці x,y, то функцыя $f=\mathrm{Re}(F)$ з'яўляецца рашэннем дыферэнцыяльнага раўнання (4).

Цяпер пяройдзем да інтэгравання дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных (3).

Мяркуем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial P\partial\bar{P}}=v, \qquad (6)$$

тады раўнанне (3) прыме наступны выгляд:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial p^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial q^2}=0. \qquad (7)$$

Калі скарыстаць тэарэму 1, то атрымаем, што функцыя $v=\mathrm{Re}(\Phi_1)$ з'яўляецца рашэннем раўнання (7), дзе $\Phi_1\equiv\Phi_1[P]=v+j\varphi$ – адвольная манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава па функцыі $P=p+jq$ у абсягу D функцыя.

Лёгка пераканацца, што калі функцыя $\Phi_1\equiv\Phi_1[P]=v+j\varphi$ з'яўляецца F-манагеннай па функцыі $P=p+jq$ у абсягу D, то ў гэтым абсягу функцыя $\bar{\Phi}_1\equiv\bar{\Phi}_1[\bar{P}]=v-j\varphi$ будзе F-манагеннай па функцыі $\bar{P}=p-jq$.

Такім чынам, рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання (7) мае наступны выгляд:

$$v=\mathrm{Re}(\Phi_1)=\frac{1}{2}\left(\Phi_1[P]+\bar{\Phi}_1[\bar{P}]\right), \qquad (8)$$

дзе $\Phi_1\equiv\Phi_1[P]=v+j\varphi$ – адвольная манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава ў абсягу D адносна функцыі $P=p+jq$ бікамплексная функцыя.

З роўнасцей (6) і (8) вынікае

$$\frac{\partial^2 f}{\partial P \partial \bar{P}} = \frac{1}{2}\left(\Phi_1[P] + \bar{\Phi}_1[\bar{P}]\right). \qquad (9)$$

Пабудуем, як і ў працы [2], функцыю $H = \int_{x_0,y_0}^{x,y} \Phi_1[P]dP$ $\left(\bar{H} = \int_{x_0,y_0}^{x,y} \bar{\Phi}_1[\bar{P}]d\bar{P}\right)$, дзе (x_0, y_0) – фіксаваны пункт абсягу D, (x, y) – бягучы пункт гэтага ж абсягу. Пры гэтым маем, што $H = H[P]$ ($\bar{H} = \bar{H}[\bar{P}]$) – манагенная па функцыі $P = p + jq$ ($\bar{P} = p - jq$) у абсягу D функцыя, $\frac{dH}{dP} = \frac{\partial H}{\partial P} = \Phi_1[P]$ $\left(\frac{d\bar{H}}{d\bar{P}} = \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{P}} = \bar{\Phi}_1[\bar{P}]\right)$, дзе $\frac{dH}{dP}$ $\left(\frac{d\bar{H}}{d\bar{P}}\right)$ – вытворная ў сэнсе У.С. Фёдарава функцыі H ($\bar{H}$) па функцыі P ($\bar{P}$).

Тады, на падставе роўнасці (9), атрымліваем

$$\frac{\partial^2}{\partial P \partial \bar{P}}\left(f - \frac{1}{2}P\bar{H}[\bar{P}] - \frac{1}{2}\bar{P}H[P]\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial P \partial \bar{P}} - \frac{1}{2}\left(\Phi_1[P] + \bar{\Phi}_1[\bar{P}]\right) = 0,$$

адкуль вынікае

$$f = \frac{1}{2}P\bar{H}[\bar{P}] + \frac{1}{2}\bar{P}H[P] + \frac{1}{2}\left(\Psi[P] + \bar{\Psi}[\bar{P}]\right) =$$

$$= P\bar{P}\left(\frac{H[P]}{2P} + \frac{\bar{H}[\bar{P}]}{2\bar{P}}\right) + \frac{1}{2}\left(\Psi[P] + \bar{\Psi}[\bar{P}]\right) =$$

$$= P\bar{P}\left\{\frac{1}{2}\left(\Phi[P] + \bar{\Phi}[\bar{P}]\right)\right\} + \frac{1}{2}\left(\Psi[P] + \bar{\Psi}[\bar{P}]\right),$$

дзе $\Phi[P] = \frac{H[P]}{P}$, $\Psi[P]$ – бікамплексныя функцыі, манагенныя па бікамплекснай функцыі $P = p + jq$ у абсягу D.

З апошняй роўнасці вынікае

$$f = \mathrm{Re}\left(P\bar{P}\Phi[P] + \Psi[P]\right).$$

Заключэнне. Такім чынам, атрымалі тэарэму.

Тэарэма 2. Рашэнне дыферэнцыяльнага раўнання ў фармальных вытворных (2) мае наступны выгляд:

$$f = \mathrm{Re}\left(P\bar{P}\Phi[P] + \Psi[P]\right),$$

дзе $\Phi[P]$, $\Psi[P]$ – бікамплексныя функцыі, манагенныя па бікамплекснай функцыі $P = p + jq$ у абсягу D.

Адзначым, што апошняя формула з'яўляецца аналагам формулы Гурса для бігарманічных функцый, якая выражае любую бігарманічную функцыю праз дзве аналітычныя функцыі камплекснай зменнай z [4].

ЛІТАРАТУРА

1. *Гусев, В.А.* Об одном обобщении ареолярных производных / В.А. Гусев // Bul. stiint. al Instit. politehnic Timisoara. – 1962. – F. 2. – T. 7. – P. 223–238.
2. *Фёдоров, В.С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В.С. Фёдоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
3. *Стельмашук, Н.Т.* О некоторых линейных дифференциальных уравнениях в частных производных в дуальной и бикомплексной алгебрах / Н.Т. Стельмашук // Известия вузов. Математика. – 1964. – № 3. – С. 136–142.
4. *Смирнов, В.И.* Курс высшей математики / В.И. Смирнов.– М.: ГИТТЛ, 1953. – Т. 3. – Ч. 2. – С. 193–196.

SUMMARY

We obtain an analogue of generalization of the Goursat problem for biharmonic functions.

Паступіў у рэдакцыю 31.01.2012 г.