МАТЭМАТЫКА

УДК 514.8

Ю.В. Трубников,
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой теоретической физики ВГУ им. П.М. Машерова;
И.А. Орехова,
аспирант кафедры инженерной физики ВГУ им. П.М. Машерова

ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОЛИНОМАХ НА ОТРЕЗКЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Введение. В данной статье сформулирована схема построения экстремального полинома первой степени, основанная на субдифференциальных конструкциях.

Рассмотрим отрезок D с центром в точке $a+bi$ и концами в точках $a-\delta+bi$, $a+\delta+bi$. Предположим, что выполнено неравенство

$$0<\delta<a. \tag{1}$$

Целью данной работы является построение полинома вида

$$P(z)=1-\frac{z}{z_*}, \tag{2}$$

обладающего минимальной чебышевской нормой среди полиномов вида (2), заданных на отрезке D.

Теорема 1. Элемент $y\in G$ тогда и только тогда является элементом наилучшего приближения точки $x\notin G$, когда

$$\exists\mu\left(\in\partial\|y-x\|\vee\in\partial\|x-y\|\right)$$

$$\forall h(\in G)\operatorname{Re}\langle\mu,h\rangle=0.$$

Таким образом, на основе данной теоремы можно сформулировать следующую схему построения экстремального полинома:

1) исходя из некоторого расположения корней полинома P_n, определенного на отрезке комплексной плоскости, найти систему e-точек разности $f(z)-P_n(z)$;

2) решить систему уравнений

$$\operatorname{Re}\langle\mu,\varphi_k\rangle=0 \quad (k=0,1,\ldots,n),$$

$$\operatorname{Re}\langle\mu,f-P_n\rangle=\|f-P_n\|,$$

$$\mu\in\partial\|f-P_n\|.$$

Если в результате решения представленной системы уравнений будет найден соответствующий функционал μ, то этот факт в силу сформулированной выше теоремы гарантирует экстремальность $P(z)$.

Основная часть.

Теорема 2. На отрезке

$$D_+=[a-\delta+bi,a+\delta+bi] \quad (b>0)$$

экстремальным является полином (2), в котором

$$z_*=a+bi+s_*i, \tag{3}$$

где

$$s_*=\frac{1}{2b}\{\delta^2-a^2-b^2+\sqrt{[(a-\delta)^2+b^2][(a+\delta)^2+b^2]}\}i, \tag{4}$$

при этом

$$\|P\|=\left[\frac{\delta^2+s_*^2}{a^2+(b+s_*)^2}\right]^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

На отрезке $D_-=[a-\delta-bi,a+\delta-bi] \quad (b>0)$ экстремальным является полином (2), в котором

$$z_*=a-bi-s_*i, \tag{6}$$

при этом его норма определяется равенством (5).

Доказательство. Предположим, что корень полинома $P(z)$ расположен в точке

$$z_1=a+\Delta+(b+s)i, \tag{7}$$

причем $(\Delta\geq 0, s\geq 0)$, тогда

$$\|P\|^2=|P(a-\delta+bi)|^2=\frac{(\delta+\Delta)^2+s^2}{(a+\Delta)^2+(b+s)^2}. \tag{8}$$

Таким образом, требуется изучить поведение функции

$$g(\Delta,s)=\frac{(\delta+\Delta)^2+s^2}{(a+\Delta)^2+(b+s)^2} \tag{9}$$

при неотрицательных значениях Δ *и* s.

Выясним, может ли функция $g(\Delta,s)$ достигать минимума при $\Delta>0$, $s>0$. Для этого найдем частные производные:

$$\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{\partial g}{\partial\Delta}=(a-\delta)\Delta^2+[a^2+(b+s)^2-\delta^2-s^2]\Delta+\delta[a^2+(b+s)^2]-a(\delta^2+s^2),\qquad(10)$$

где A – знаменатель производной $\frac{\partial g}{\partial\Delta}$;

$$\frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{\partial g}{\partial s}=bs^2+[(a+\Delta)^2+b^2-(\delta+\Delta)^2]s-b(\delta+\Delta)^2,\qquad(11)$$

где B – знаменатель производной $\frac{\partial g}{\partial s}$.

Приравняем выражения (10) и (11) к нулю, предварительно преобразовав их к более удобному виду:

$$\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{\partial g}{\partial\Delta}=(a-\delta)\Delta^2-(a-\delta)s^2+2b\Delta s+2b\delta s+(a^2+b^2-\delta^2)\Delta+\delta(a^2+b^2)-a\delta^2=0,\qquad(12)$$

$$\frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{\partial g}{\partial s}=-b\Delta^2+bs^2+2(a-\delta)\Delta s+(a^2+b^2-\delta^2)s-2b\delta\Delta-b\delta^2=0.\qquad(13)$$

Разделим уравнение (12) на *a-δ*, тогда

$$\Delta^2-s^2+\frac{2b}{a-\delta}\Delta s+\frac{2b\delta}{a-\delta}s+\frac{a^2+b^2-\delta^2}{a-\delta}\Delta+\frac{\delta(a^2+b^2)-a\delta^2}{a-\delta}=0,\qquad(14)$$

а уравнение (13) на b:

$$-\Delta^2+s^2+\frac{2(a-\delta)}{b}\Delta s+\frac{(a^2+b^2-\delta^2)s}{b}-2\delta\Delta-\delta^2=0.\qquad(15)$$

Сложив уравнения (14) и (15), получаем

$$2\left(\frac{b}{a-\delta}+\frac{a-\delta}{b}\right)\Delta s+\left(\frac{2b\delta}{a-\delta}+\frac{a^2+b^2-\delta^2}{b}\right)s+\left(\frac{a^2+b^2-\delta^2}{a-\delta}-2\delta\right)\Delta+\frac{\delta(a^2+b^2)-a\delta^2}{a-\delta}-\delta^2=0.\qquad(16)$$

Умножив обе части уравнения (16) на *(a-δ)b*, получим уравнение

$$\left[(a-\delta)^2+b^2\right]\times\left[2\Delta s+b\Delta+(a+\delta)s+b\delta\right]=0,$$

откуда $2\Delta s+b\Delta+(a+\delta)s+b\delta=0$,

то есть

$$\Delta=-\frac{(a+\delta)s+b\delta}{2s+b}.\qquad(17)$$

Равенство (17) означает, что при $b>0$ положительных решений системы (12)–(13) не существует. При $s=0$ равенство (9) имеет вид

$$g(\Delta,0)^2=\frac{(\delta+\Delta)^2}{(a+\Delta)^2+b^2},\qquad(18)$$

тогда

$$\frac{1}{2}\cdot A\cdot\frac{\partial g}{\partial\Delta}=(a-\delta)\Delta^2+\left(a^2+b^2-\delta^2\right)\Delta+\delta\left(a^2+b^2\right)-a\delta^2.\qquad(19)$$

Из выражения (19) видно, что частная производная $\frac{\partial g}{\partial\Delta}$ при неотрицательных Δ положительна, то есть функция $g(\Delta,0)$ возрастает по переменной Δ при $\Delta\geq0$.

Далее при $\Delta=0$

$$\frac{1}{2}\cdot B\cdot\frac{\partial g}{\partial s}=bs^2+\left(a^2+b^2-\delta^2\right)s-b\delta^2=0.\qquad(20)$$

Поскольку дискриминант уравнения (20)

$$d=\left(a^2+b^2-\delta^2\right)^2+4b^2\delta^2=\left[(a-\delta)^2+b^2\right]\left[(a+\delta)^2+b^2\right],$$

то уравнение (20) имеет два действительных корня s_1 и s_2, причем $s_1s_2=-\delta^2$, то есть эти корни разных знаков. При $b>0$ больший корень s_2 определяется равенством

$$s_2=s_*=\frac{1}{2b}\{\delta^2-a^2-b^2+\sqrt{[(a-\delta)^2+b^2][(a+\delta)^2+b^2]}\},\qquad(21)$$

а корень полинома $P_*(z)$ имеет вид

$$z_*=a+bi+\frac{1}{2b}\{\delta^2-a^2-b^2+\sqrt{[(a-\delta)^2+b^2][(a+\delta)^2+b^2]}\}i.\qquad(22)$$

Экстремальность полинома (2) будет установлена при помощи метода, разработанного в [1, с. 71]. Для этого найдем $\cos\varphi_1$, $\sin\varphi_1$, $\cos\varphi_2$, $\sin\varphi_2$, где

$$P_*(a-\delta+bi)=re^{i\varphi_1}=\|P_*\|e^{i\varphi_1},$$

$$P_*(a+\delta+bi)=re^{i\varphi_2}=\|P_*\|e^{i\varphi_2}.$$

Проведя соответствующие вычисления, получаем равенства

$$\cos\varphi_1=\frac{a\delta+(b+s_*)s_*}{a^2+(b+s_*)^2}\cdot\frac{1}{\|P_*\|},$$

$$\sin\varphi_1=\frac{-b\delta+(a-\delta)s_*}{a^2+(b+s_*)^2}\cdot\frac{1}{\|P_*\|},$$

$$\cos\varphi_2=\frac{-a\delta+(b+s_*)s_*}{a^2+(b+s_*)^2}\cdot\frac{1}{\|P_*\|},$$

$$\sin\varphi_2=\frac{b\delta+(a+\delta)s_*}{a^2+(b+s_*)^2}\cdot\frac{1}{\|P_*\|}.$$

Построим функционал μ в соответствии с критерием элемента наилучшего приближения [1, с. 71]:

$$\mathrm{Re}\langle\mu,z\rangle=\mathrm{Re}\{(\cos\varphi_1-i\sin\varphi_1)(a-\delta+bi)\rho_1+(\cos\varphi_2-i\sin\varphi_2)(a+\delta+bi)\rho_2\}=$$

$$=\{(a-\delta)\cos\varphi_1+b\sin\varphi_1\}\rho_1+$$
$$+\{(a+\delta)\cos\varphi_2+b\sin\varphi_2\}\rho_2,$$

то есть уравнение

$$\mathrm{Re}\langle\mu,z\rangle=0$$

приводится к виду

$$\{(a-\delta)(a\delta+bs_*+s_*^2)+b[-b\delta+$$
$$+(a-\delta)s_*]\}\rho_1+\{(a+\delta)(-a\delta+bs_*+s_*^2)+$$
$$+b[b\delta+(a+\delta)s_*]\}\rho_2=0.$$

Далее, обозначив коэффициенты перед ρ_1 и ρ_2 через c_1 и c_2, получаем

$$c_1=(a-\delta)s_*^2+2abs_*-2b\delta s_*+a^2\delta-a\delta^2-b^2\delta; \quad (23)$$

$$c_2=(a+\delta)s_*^2+2abs_*+2b\delta s_*-a^2\delta-a\delta^2+b^2\delta. \quad (24)$$

Подставляя в равенства (23) и (24) выражение (21) для s_*, получаем

$$c_1=\frac{1}{2b^2}\left(b^2+\delta^2-a^2\right)\times$$
$$\times\{(a-\delta)\sqrt{[(a-\delta)^2+b^2][(a+\delta)^2+b^2]}-$$
$$-a^3+\delta a^2+\delta^2 a-\delta b^2-ab^2-\delta^3\}=$$
$$=\frac{1}{2b^2}\left(b^2+\delta^2-a^2\right)\times$$
$$\times\{(a-\delta)\sqrt{[(a-\delta)^2+b^2][(a+\delta)^2+b^2]}-$$
$$-a^2(a-\delta)+\delta^2(a-\delta)-b^2(a+\delta)\}=$$
$$=\frac{1}{2b^2}\left(b^2+\delta^2-a^2\right)\times$$
$$\times\{(a-\delta)\sqrt{[(a-\delta)^2+b^2][(a+\delta)^2+b^2]}-$$
$$-(a+\delta)[(a-\delta)^2+b^2]\}=$$
$$=\frac{1}{2b^2}\left(b^2+\delta^2-a^2\right)\times$$
$$\times\sqrt{(a-\delta)^2+b^2}\{(a-\delta)\sqrt{(a+\delta)^2+b^2}-$$
$$-(a+\delta)\sqrt{(a-\delta)^2+b^2}\};$$

$$c_2=-\frac{1}{2b^2}\left(-b^2+a^2-\delta^2\right)\times$$
$$\times\{(a+\delta)\sqrt{[(a-\delta)^2+b^2][(a+\delta)^2+b^2]}-$$
$$-a^3-a^2\delta+a\delta^2-ab^2+\delta b^2+\delta^3\}=$$
$$=\frac{1}{2b^2}\left(b^2+\delta^2-a^2\right)\times$$
$$\times\{(a+\delta)\sqrt{[(a-\delta)^2+b^2][(a+\delta)^2+b^2]}-$$
$$-a^2(a+\delta)+\delta^2(a+\delta)-b^2(a-\delta)\}=$$
$$=\frac{1}{2b^2}\left(b^2+\delta^2-a^2\right)\times$$
$$\times\{(a+\delta)\sqrt{[(a-\delta)^2+b^2][(a+\delta)^2+b^2]}-$$
$$-(a-\delta)[(a+\delta)^2+b^2]\}=$$
$$=\frac{1}{2b^2}\left(b^2+\delta^2-a^2\right)\times$$
$$\times\sqrt{(a+\delta)^2+b^2}\{(a+\delta)\sqrt{(a-\delta)^2+b^2}-$$
$$-(a-\delta)\sqrt{(a+\delta)^2+b^2}\}.$$

Необходимым и достаточным условием существования положительного решения системы уравнений

$$\begin{cases}\rho_1+\rho_2=1,\\ c_1\rho_1+c_2\rho_2=0\end{cases}$$

является наличие разных знаков у коэффициентов c_1 и c_2. Покажем, что справедливы неравенства $c_1<0<c_2$. Действительно, неравенство

$$(a-\delta)\sqrt{(a+\delta)^2+b^2}<(a+\delta)\sqrt{(a-\delta)^2+b^2}$$

эквивалентно неравенству

$$(a-\delta)^2\left[(a+\delta)^2+b^2\right]<(a+\delta)^2\left[(a-\delta)^2+b^2\right].$$

Последнее неравенство после приведения подобных слагаемых и сокращения обеих частей на b^2 приводится к виду

$$(a-\delta)^2<(a+\delta)^2,$$

то есть является справедливым.

Положительность коэффициента c_2 устанавливается аналогично.

Заключение. Основным результатом данной работы является сформулированная и доказанная теорема об экстремальном полиноме на соответствующем отрезке комплексной плоскости.

Литература

1. *Трубников, Ю.В.* Экстремальные конструкции в негладком анализе и операторные уравнения с аккретивными нелинейностями / Ю.В. Трубников. – М.: Астропресс-XXI, 2002. – 256 с.

Summary

In this article the scheme of the extremal polynomial of the first degree, based on the subdifferential constructions is formulated. In connection with the task, in this paper we consider the construction of a polynomial of the form

$$P(z)=1-\frac{z}{z_*}, \quad (1)$$

which has minimal norm among the Chebyshev polynomials of the form (1) defined on the interval D centered at a + bi and ends at a – δ + bi, a + δ + bi. Extremity of the polynomial (1) is established by using a method which reduces to the construction of the functional μ, according to the criterion element of best approximation.

Поступила в редакцию 10.10.2012 г.