

УДК 537.622

Е.М. Овсюк,кандидат физико-математических наук, доцент кафедры
общей физики и методики преподавания физики

МГПУ им. И.П. Шамякина;

В.В. Кисель,кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры общей и теоретической физики БГПУ;**В.М. Редьков,**кандидат физико-математических наук,
ведущий научный сотрудник Института физики
им. Б.И. Степанова НАН Беларуси

ЧАСТИЦА СО СПИНОМ 1 В МАГНИТНОМ ПОЛЕ НА СФЕРИЧЕСКОЙ ПЛОСКОСТИ S_2

1. Постановка задачи. Задача об определении уровней энергии частицы в однородном магнитном поле относится к числу классических в квантовой механике [1–3]. В работах [4–6] найдены точные решения уравнения Шредингера для скалярной частицы в магнитном поле на фоне пространств постоянной положительной и отрицательной кривизны, сферическом пространстве Римана и гиперболическом пространстве Лобачевского. Анализ соответствующих систем в рамках классической механики выполнен в [7–9]. В работах [10–11] определены решения уравнения Дирака в магнитном поле на фоне пространства Лобачевского и Римана. В [12] построены решения для уравнения Даффина-Кеммера для векторной частицы в плоском пространстве. В настоящей работе будут получены точные решения уравнения Даффина-Кеммера частицы со спином 1 во внешнем магнитном поле на 2-мерной сферической плоскости S_2 .

Волновое уравнение Даффина-Кеммера для векторной частицы в римановом пространстве имеет вид [13]

$$\{\beta^c [i\hbar (e_{(c)}^\beta \partial_\beta + \frac{1}{2} J^{ab} \gamma_{abc}) + \frac{e}{c} A_c] - mc\} \Psi = 0, \quad (1.1)$$

где γ_{abc} – символы вращения Риччи, $A_a = e_{(a)}^\beta A_\beta$ – тетрадные компоненты 4-вектора A_β ; $J^{ab} = (\beta^a \beta^b - \beta^b \beta^a)$ – генераторы 10-мерного представления группы Лоренца. В дальнейшем будем использовать сокращения $e / c\hbar \Rightarrow e$, $mc / \hbar \Rightarrow M$ и систему обоб-

щенных цилиндрических координат в пространстве S_3 :

$$dS^2 = c^2 dt^2 - \rho^2 [\cos^2 z (dr^2 + \sin^2 r d\phi^2) + dz^2], \quad (1.2)$$

$$z \in [-\pi/2, +\pi/2], r \in [0, +\pi], \phi \in [0, 2\pi].$$

Представление постоянного магнитного поля в плоском пространстве в цилиндрических координатах (1.2) легко можно обобщить и на случай пространства Римана S_3 :

$$A_\phi = -2B \sin^2 \frac{r}{2} = B (\cos r - 1). \quad (1.3)$$

Этому 4-потенциалу отвечает единственная ненулевая компонента электромагнитного тензора $F_{\phi r} = \partial_\phi A_r - \partial_r A_\phi = B \sin r$. Можно убедиться, что этот тензор удовлетворяет уравнениям Максвелла в сферическом пространстве.

Рассмотрим уравнение Даффина-Кеммера в магнитном поле (1.3) в пространстве Римана S_3 . Цилиндрическим координатам отвечает тетрада

$$e_{(a)}^\beta(x) = \text{diag}(1, \cos^{-1} z, \cos^{-1} z \cos^{-1} r, 1). \quad (1.4)$$

С учетом (1.3), (1.4) уравнение (1.1) принимает вид

$$\left\{ i\beta^0 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\cos z} \left(i\beta^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2 \frac{i\partial_\phi + eB(\cos r - 1) + iJ^{12} \cos r}{\sin r} \right) + i\beta^3 \frac{\partial}{\partial z} + i \frac{\sin z}{\cos z} (\beta^1 J^{13} + \beta^2 J^{23}) - M \right\} \Psi = 0. \quad (1.5)$$

При разделении переменных в волновом уравнении потребуются явный вид основных матриц β^a . При этом наиболее удобно последние задать в циклическом базисе, в кото-

ром генератор J^{12} диагонален (укажем явный вид 15-мерных матриц, разбитых в соответствии со структурой волновой функции на блоки размерностей 1-3-3-3):

$$\beta^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tau_i \\ -e_i^* & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\tau_i & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.6)$$

Здесь

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i, 0, i), \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1), \quad e_3 = (0, i, 0),$$

$$\tau_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\tau_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = s_3.$$

Входящая в уравнение (1.5) матрица J^{12} имеет следующий явный вид:

$$J^{12} = \beta^1 \beta^2 - \beta^2 \beta^1 = -i |0 \oplus \tau_3 \oplus \tau_3 \oplus \tau_3| = -i S_3. \quad (1.8)$$

2. Ограничение к 2-мерному случаю, разделение переменных. В уравнении (1.5) проведем ограничение к 2-мерному пространству S_2

$$\left[i\beta^0 \frac{\partial}{\partial t} + i\beta^1 \frac{\partial}{\partial r} + \beta^2 \frac{i\partial_\phi + eB(\cos r - 1) + iJ^{12} \cos r}{\sin r} - M \right] \Psi = 0. \quad (2.1)$$

С использованием подстановки для волновой функции

$$\Psi = e^{-ict} e^{im\phi} \begin{pmatrix} \Phi_0(r) \\ \vec{\Phi}(r) \\ \vec{E}(r) \\ \vec{H}(r) \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

уравнение (2.1) принимает вид (введено обозначение $m + B(1 - \cos r) = v(r)$)

$$\left[\varepsilon \beta^0 + i\beta^1 \frac{\partial}{\partial r} - \beta^2 \frac{v(r) - \cos r S_3}{\sin r} - M \right] \begin{pmatrix} \Phi_0(r) \\ \vec{\Phi}(r) \\ \vec{E}(r) \\ \vec{H}(r) \end{pmatrix} = 0. \quad (2.3)$$

После разделения переменных с учетом обозначений

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v - \cos r}{\sin r} \right) = \hat{a}_-,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v + \cos r}{\sin r} \right) = \hat{a}_+,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{\sin r} \right) = \hat{a},$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v - \cos r}{\sin r} \right) = \hat{b}_-,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v + \cos r}{\sin r} \right) = \hat{b}_+,$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{\sin r} \right) = \hat{b}$$

приходим к системе радиальных уравнений

$$\begin{aligned} -\hat{b}_- E_1 - \hat{a}_+ E_3 &= M \Phi_0, \\ -i\hat{b}_- H_1 + i\hat{a}_+ H_3 + i\varepsilon E_2 &= M \Phi_2, \\ i\hat{a} H_2 + i\varepsilon E_1 &= M \Phi_1, \\ -i\hat{b} H_2 + i\varepsilon E_3 &= M \Phi_3, \\ \hat{a} \Phi_0 - i\varepsilon \Phi_1 &= M E_1, \\ -i\varepsilon \Phi_2 &= M E_2, \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \hat{b} \Phi_0 - i\varepsilon \Phi_3 &= M E_3, \\ -i\hat{a} \Phi_2 &= M H_1, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} i\hat{b}_- \Phi_1 - i\hat{a}_+ \Phi_3 &= M H_2, \\ i\hat{b} \Phi_2 &= M H_3. \end{aligned}$$

3. Переход к нерелятивистскому пределу. Нединамическими переменными являются функции Φ_0, H_1, H_2, H_3 :

$$\begin{aligned} -\hat{b}_- E_1 - \hat{a}_+ E_3 &= M \Phi_0, \quad -i\hat{a} \Phi_2 = M H_1, \\ i\hat{b}_- \Phi_1 - i\hat{a}_+ \Phi_3 &= M H_2, \quad i\hat{b} \Phi_2 = M H_3. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Исключая их, получаем шесть уравнений (группируем их в пары)

$$\begin{aligned} i\hat{a} (i\hat{b}_- \Phi_1 - i\hat{a}_+ \Phi_3) + i\varepsilon M E_1 &= M^2 \Phi_1, \\ \hat{a} (-\hat{b}_- E_1 - \hat{a}_+ E_3) - i\varepsilon M \Phi_1 &= M^2 E_1, \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\begin{aligned} -i\hat{b}_- (-i\hat{a} \Phi_2) + i\hat{a}_+ (i\hat{b} \Phi_2) + i\varepsilon M E_2 &= M^2 \Phi_2, \\ -i\varepsilon M \Phi_2 &= M^2 E_2, \end{aligned} \quad (3.2b)$$

$$\begin{aligned} -i\hat{b} (i\hat{b}_- \Phi_1 - i\hat{a}_+ \Phi_3) + i\varepsilon M E_3 &= M^2 \Phi_3, \\ \hat{b} (-\hat{b}_- E_1 - \hat{a}_+ E_3) - i\varepsilon M \Phi_3 &= M^2 E_3, \end{aligned} \quad (3.2c)$$

Введем разбиение на большие и малые компоненты согласно

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= B_1 + M_1, \quad \Phi_2 = B_2 + M_2, \quad \Phi_3 = B_3 + M_3, \\ iE_1 &= B_1 - M_1, \quad iE_2 = B_2 - M_2, \quad iE_3 = B_3 - M_3. \end{aligned}$$

Одновременно выделим энергию покоя формальной заменой $\varepsilon \Rightarrow \varepsilon + M$. Складывая уравнения для каждой из трех пар и пре-

небрегая малыми компонентами M_k на фоне больших B_k , получаем

$$\begin{aligned} (-2\hat{a}_-\hat{b}_+ + 2\varepsilon M)B_1 &= 0, \\ (-\hat{b}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+\hat{b}_+ + 2\varepsilon M)B_2 &= 0, \\ (-2\hat{b}_+\hat{a}_+ + 2\varepsilon M)B_3 &= 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Это искомая система уравнений в приближении Паули. Учитывая явный вид операторов и выражение для $v(r) = m + B(1 - \cos r)$, приводим уравнения (3.3) к виду

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\cos r}{\sin r} \frac{d}{dr} - B - \frac{1 - 2[m + B(1 - \cos r)]\cos r}{\sin^2 r} \right] B_1 = 0, \quad (3.4a)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\cos r}{\sin r} \frac{d}{dr} - \frac{[m + B(1 - \cos r)]^2}{\sin^2 r} + 2\varepsilon M \right] B_2 = 0, \quad (3.4b)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{\cos r}{\sin r} \frac{d}{dr} + B - \frac{1 + 2[m + B(1 - \cos r)]\cos r}{\sin^2 r} - \frac{[m + B(1 - \cos r)]^2}{\sin^2 r} + 2\varepsilon M \right] B_3 = 0. \quad (3.4c)$$

Полученные уравнения решаются по одной и той же схеме. Остановимся подробно на решении уравнения (3.4a). Перейдем к новой переменной $1 - \cos r = 2y$. С использованием подстановки $B_1 = y^{C_1}(1-y)^{A_1}f_1$ получим

$$\begin{aligned} y(1-y) \frac{d^2 B_1}{dy^2} + [2C_1 + 1 - (2A_1 + 2C_1 + 2)y] \frac{dB_1}{dy} + [B^2 + B + 2\varepsilon M - (A_1 + C_1)(A_1 + C_1 + 1) + \frac{1}{4} \frac{4A_1^2 - (2B + m + 1)^2}{1-y} + \frac{1}{4} \frac{4C_1^2 - (m-1)^2}{y}] B_1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

При A_1, C_1 , выбранных согласно

$$A_1 = \frac{1}{2}|2B + m + 1|, \quad C_1 = \frac{1}{2}|m - 1|,$$

уравнение (3.5) является уравнением гипергеометрического типа с параметрами

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= A_1 + C_1 + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 + B + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}}, \\ \beta_1 &= A_1 + C_1 + \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 + B + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}}, \\ \gamma_1 &= 2C_1 + 1, \quad B_1 = y^{C_1}(1-y)^{A_1} \\ &F(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1; y). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Гипергеометрический ряд сводится к полиному, если $\alpha_1 = -n$ (n – натуральное число), откуда следует, что

$$\begin{aligned} \sqrt{B^2 + B + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}} &= \\ &= n + \frac{1}{2} + \frac{|2B + m + 1| + |m - 1|}{2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Приведем решение уравнения (3.4b):

$$\begin{aligned} B_2 &= y^{C_2}(1-y)^{A_2} F(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2; y), \\ A_2 &= \frac{1}{2}|2B + m|, \quad C_2 = \frac{|m|}{2}, \quad \gamma_2 = 2C_2 + 1, \\ \alpha_2 &= A_2 + C_2 + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}}, \\ \beta_2 &= A_2 + C_2 + \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Правило квантования имеет вид $\alpha_2 = -n$, откуда следует

$$\sqrt{B^2 + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}} = n + \frac{1}{2} + \frac{|2B + m| + |m|}{2}. \quad (3.9)$$

Решение уравнения (3.4c) и соответствующее правило квантования имеют вид

$$\begin{aligned} B_3 &= y^{C_3}(1-y)^{A_3} F(\alpha_3, \beta_3, \gamma_3; y), \\ A_3 &= \frac{1}{2}|2B + m - 1|, \quad C_3 = \frac{1}{2}|m + 1|, \quad \gamma_3 = 2C_3 + 1, \\ \alpha_3 &= A_3 + C_3 + \frac{1}{2} - \sqrt{B^2 - B + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}}, \\ \beta_3 &= A_3 + C_3 + \frac{1}{2} + \sqrt{B^2 - B + 2\varepsilon M + \frac{1}{4}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

4. Решение радиальных уравнений в релятивистском случае. Исходим из системы 10 уравнений (2.3), (2.5). Исключив 6 компонент E_i, H_i с помощью (2.5), приходим к 4-м уравнениям второго порядка относительно Φ_a :

$$\begin{aligned} (-\hat{b}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+\hat{b}_+ + \varepsilon^2 - M^2)\Phi_2 &= 0, \\ (-\hat{b}_-\hat{a}_+ - \hat{a}_+\hat{b}_+ - M^2)\Phi_0 + i\varepsilon(\hat{b}_-\Phi_1 + \hat{a}_+\Phi_3) &= 0, \\ (-\hat{a}_-\hat{b}_+ + \varepsilon^2 - M^2)\Phi_1 + \hat{a}_+\hat{a}_+\Phi_3 + i\varepsilon\hat{a}_+\Phi_0 &= 0, \\ (-\hat{b}_+\hat{a}_+ + \varepsilon^2 - M^2)\Phi_3 + \hat{b}_+\hat{b}_+\Phi_1 + i\varepsilon\hat{b}_+\Phi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Отмечаем существование простого решения этой системы

$$\Phi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_3 = 0, \quad (-\hat{b}_- \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{b}_+ + \varepsilon^2 - M^2) \Phi_2 = 0. \quad (4.2a)$$

$$\text{При этом из (2.5) следует, что } E_1 = 0, E_2 = -i\varepsilon M^{-1} \Phi_2, E_3 = 0, \quad (4.2b)$$

$$H_1 = -iM^{-1} \hat{a}_- \Phi_2, H_2 = 0, H_3 = iM^{-1} \hat{b}_+ \Phi_2.$$

Подействуем на третье уравнение в (4.1) слева оператором \hat{b}_- и на четвертое уравнение слева оператором \hat{a}_+ . Вводя обозначения $\hat{b}_- \Phi_1 = Z_1, \hat{a}_+ \Phi_3 = Z_3$, получающуюся из (4.1) систему уравнений представим в виде

$$\begin{aligned} (-\hat{b}_- \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{b}_+ + \varepsilon^2 - M^2) \Phi_2 &= 0, \\ (-\hat{b}_- \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{b}_+ - M^2) \Phi_0 + i\varepsilon(Z_1 + Z_3) &= 0, \\ (-\hat{b}_- \hat{a}_- + \varepsilon^2 - M^2) Z_1 + \hat{b}_- \hat{a}_+ Z_3 + i\varepsilon \hat{b}_- \hat{a}_+ \Phi_0 &= 0, \\ (-\hat{a}_+ \hat{b}_+ + \varepsilon^2 - M^2) Z_3 + \hat{a}_+ \hat{b}_- Z_1 + i\varepsilon \hat{a}_+ \hat{b}_- \Phi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Определяя функции Z_1, Z_3 как $Z_1 = \frac{f+g}{2}$,

$Z_3 = \frac{f-g}{2}, Z_1 + Z_3 = f, Z_1 - Z_3 = g$, приходим к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (-\hat{b}_- \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{b}_+ + \varepsilon^2 - M^2) \Phi_2 &= 0, \\ (-\hat{b}_- \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{b}_+ - M^2) \Phi_0 + i\varepsilon f &= 0, \\ -\hat{b}_- \hat{a}_- \frac{f+g}{2} + (\varepsilon^2 - M^2) \frac{f+g}{2} + \\ + \hat{b}_- \hat{a}_+ \frac{f-g}{2} + i\varepsilon \hat{b}_- \hat{a}_+ \Phi_0 &= 0, \\ -\hat{a}_+ \hat{b}_+ \frac{f-g}{2} + (\varepsilon^2 - M^2) \frac{f-g}{2} + \\ + \hat{a}_+ \hat{b}_- \frac{f+g}{2} + i\varepsilon \hat{a}_+ \hat{b}_- \Phi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

или (складываем и вычитаем третье и четвертое уравнения)

$$\begin{aligned} (-\hat{b}_- \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{b}_+ + \varepsilon^2 - M^2) \Phi_2 &= 0, \\ (-\hat{b}_- \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{b}_+ - M^2) \Phi_0 + i\varepsilon f &= 0, \\ (-\hat{b}_- \hat{a}_- + \hat{a}_+ \hat{b}_+) g + (\varepsilon^2 - M^2) f + \\ + i\varepsilon(\hat{b}_- \hat{a}_- + \hat{a}_+ \hat{b}_+) \Phi_0 &= 0, \\ (-\hat{b}_- \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{b}_+) g + (\varepsilon^2 - M^2) g + \\ + i\varepsilon(\hat{b}_- \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{b}_+) \Phi_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Учитывая тождества

$$-\hat{b}_- \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{b}_+ = \Delta_2, \quad -\hat{b}_- \hat{a}_- + \hat{a}_+ \hat{b}_+ = 2B,$$

уравнения (4.5) приводим к виду

$$(\Delta_2 + \varepsilon^2 - M^2) \Phi_2 = 0, \quad (4.6)$$

$$(\Delta_2 - M^2) \Phi_0 + i\varepsilon f = 0, \quad (4.7)$$

$$2B g + (\varepsilon^2 - M^2) f - i\varepsilon \Delta_2 \Phi_0 = 0,$$

$$\Delta_2 g + (\varepsilon^2 - M^2) g - 2i\varepsilon B \Phi_0 = 0.$$

Определим решения системы (4.7). Из второго уравнения (4.7), используя выражение для $\Delta_2 \Phi_0$ из первого уравнения этой же системы, находим линейное соотношение между тремя функциями g, f, Φ_0 : $2B g - M^2 f - i\varepsilon M^2 \Phi_0 = 0$. С помощью этого условия исключим функцию f ($f = \frac{2B}{M^2} g - i\varepsilon \Phi_0$) из второго и третьего уравнений системы (4.7):

$$\begin{aligned} (\Delta_2 + \varepsilon^2 - M^2) g &= 2i\varepsilon B \Phi_0, \\ (\Delta_2 + \varepsilon^2 - M^2) \Phi_0 &= -\frac{2i\varepsilon B}{M^2} g. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Введем обозначение $\gamma = \varepsilon^2 / M^2$. Систему (4.8) представим в матричной форме

$$(\Delta_2 + \varepsilon^2 - M^2) \begin{vmatrix} g \\ \varepsilon \Phi_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2iB \\ -2iB\gamma & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} g \\ \varepsilon \Phi_0 \end{vmatrix} \quad (4.9)$$

или в символическом виде: $\Delta f = Af, \Delta f' = SAS^{-1} f', f' = Sf$. Найдем преобразование, приводящее матрицу A к диагональному виду:

$$\begin{aligned} f' &= Sf, \Delta f' = SAS^{-1} f', \\ SAS^{-1} &= \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix}, S = \begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Задача сводится к решению двух систем уравнений:

$$\begin{aligned} -\lambda_1 a - 2i\gamma B d &= 0, & 2iB a - \lambda_1 d &= 0; \\ -\lambda_2 c - 2i\gamma B b &= 0, & 2iB c - \lambda_2 b &= 0. \end{aligned}$$

Выберем следующее решение:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= +\frac{2\varepsilon B}{M}, \lambda_2 = -\frac{2\varepsilon B}{M}, \\ S &= \begin{vmatrix} \varepsilon & +iM \\ \varepsilon & -iM \end{vmatrix}, S^{-1} = \frac{1}{-2i\varepsilon M} \begin{vmatrix} -iM & -iM \\ -\varepsilon & \varepsilon \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Новые функции удовлетворяют уравнениям:

$$1) \left(\Delta_2 + \varepsilon^2 - M^2 - \frac{2\varepsilon B}{M} \right) g' = 0; \quad (4.11a)$$

$$2) \left(\Delta_2 + \varepsilon^2 - M^2 + \frac{2\varepsilon B}{M} \right) \Phi_0' = 0. \quad (4.11b)$$

Они независимы друг от друга, поэтому существует два решения:

$$\begin{aligned} 1) g' \neq 0, \Phi_0' &= 0, \\ 2) g' = 0, \Phi_0' &\neq 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Исходные функции в случаях 1) и 2) принимают соответственно вид

$$1) g = \frac{1}{2\varepsilon} g', \quad \varepsilon\Phi_0 = \frac{1}{2iM} g';$$

$$2) g = \frac{1}{2i\varepsilon} \varepsilon\Phi'_0, \quad \varepsilon\Phi_0 = -\frac{1}{2iM} \varepsilon\Phi'_0.$$

В каждом случае при этом два уравнения из (4.9) принимают вид, совпадающий соответственно с (4.11a) и (4.11b). Чтобы получить решения этих уравнений и уравнения (4.6), никаких дополнительных вычислений проводить не нужно. Достаточно в формуле (3.9) провести следующие замены:

$$2\varepsilon M \Rightarrow \left(\varepsilon^2 - M^2 - \frac{2\varepsilon B}{M} \right);$$

$$\left(\varepsilon^2 - M^2 \right); \quad (4.13)$$

$$\left(\varepsilon^2 - M^2 + \frac{2\varepsilon B}{M} \right).$$

Таким образом, построены точные решения квантовомеханического уравнения для частицы со спином 1 при ограничении ее движения по поверхности 3-мерной сферы, последнюю можно рассматривать как 2-мерное пространство постоянной положительной кривизны. Решения построены в нерелятивистском приближении и также в релятивистском случае. Найдены соответствующие спектры энергии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rabi, I.I. Ztshr. Phys. / I.I. Rabi. – 1928. Bd. 49. – P. 507–511.
2. Landau, L. Ztshr. Phys. / L. Landau. – 1930. Bd. 64. – P. 629–637.
3. Plesset, M.S. Phys. Rev. / M.S. Plesset. – 1931. – № 12. – P. 1728–1731.
4. Bogush, A.A. Nonlinear Phenomena in Complex Systems / A.A. Bogush, V.M. Red'kov, G.G. Krylov. – 2008. – Vol. 11, № 4. – P. 403–416.

5. Богуш, А.А. Доклады НАН Беларуси / А.А. Богуш, В.М. Редьков, Г.Г. Крылов. – 2009. – Т. 53. – № 2. – С. 45–51.
6. Богуш, А.А. Вестці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук / А.А. Богуш, В.М. Редьков, Г.Г. Крылов. – 2009. – № 2. – С. 57–63.
7. Kudryashov, V.V. AP Conference Proceedings / V.V. Kudryashov, Yu.A. Kurochkin, E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov. – Vol. 1205. – P. 120–126 (2010); Eds. Remo Ruffini and Gregory Vereshchagin.
8. Кудряшов, В.В. Доклады НАН Беларуси / В.В. Кудряшов, Ю.А. Курочкин, Е.М. Овсюк [и др.]. – 2009. – Т. 53. – № 6. – С. 50–53.
9. Kudryashov, V.V. SIGMA / V.V. Kudryashov, Yu. A. Kurochkin, E.M. Ovsyuk, V.M. Red'kov. – 004, 34 p. (2010).
10. Овсюк, Е.М. Доклады НАН Беларусі / Е.М. Овсюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков. – 2010. – Т. 54. – № 3. – С. 47–54.
11. Овсюк, Е.М. Вестці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук / Е.М. Овсюк, В.В. Кисель, В.М. Редьков. – 2010. – № 4. – С. 95–101.
12. Кисель, В.В. Вестці НАН Беларусі / В.В. Кисель, Е.М. Овсюк, В.М. Редьков. – 2010. – Т. 54. – № 4. – С. 64–71.
13. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. – Минск: Белорус. наука, 2009. – 495 с.

SUMMARY

There are constructed exact solutions of the quantum-mechanical equation for a spin $S = 1$ particle in 2-dimensional Riemannian space of constant positive curvature, spherical plane, against a background of an external magnetic field which is the analogue of the homogeneous magnetic field in the Minkowski space. A generalized formula for energy levels describing quantization of the motion of the vector particle in magnetic field on the 2-dimensional space S_2 has been found, nonrelativistic and relativistic equations have been solved.

Поступила в редакцию 27.01.2012 г.