УДК 517.925

В.И. Мататов,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры дифференциальных уравнений
и системного анализа БГУ;
И.В. Авдеенко,
студент VI курса ММФ БГУ;
С.В. Пенталь,
ассистент кафедры прикладной математики
и экономической кибернетики БГЭУ

О ПОДВИЖНЫХ ОСОБЫХ ТОЧКАХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ГАМИЛЬТОНА ВОСЬМОГО ПОРЯДКА В СЛУЧАЕ, КОГДА СРЕДИ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ АРГУМЕНТОВ ГАМИЛЬТОНИАНА ЕСТЬ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Введение. Многие задачи прикладного характера приводят к необходимости решать и исследовать свойства решений автономных систем Гамильтона [1–3].

Исследование подвижных особых точек решений нелинейных дифференциальных уравнений – одна из основных задач аналитической теории дифференциальных уравнений [4–10].

В статье [7] изучена неавтономная система вида

$$x'_z = R_1(z,y),$$
$$y'_z = R_2(z,x),$$

где R_1, R_2 – рациональные функции относительно вторых аргументов с голоморфными по z коэффициентами. В указанной работе получены условия однозначности подвижных особых точек решений указанной выше системы. В работе [8] показано, что решения автономной системы Гамильтона $x'_z = H'_y(x,y)$, $y'_z = -H'_x(x,y)$ (*H(x,y)* – рациональная функция) могут иметь в плоскости $\mathbb{C}$ только алгебраические подвижные особые точки. Статья [9] посвящена исследованию подвижных особых точек решений неавтономной системы Гамильтона второго порядка с кубическими нелинейностями. В работе [10] рассмотрена автономная система Гамильтона 2n-го порядка

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_1}, \ \ldots, \ \frac{dx_n}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y_n},$$
$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ \ldots, \ \frac{dy_n}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_n},$$

где $H = F(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, F – голоморфная функция своих аргументов, причем

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1}, \ \ldots, \ \varphi_n = \frac{\psi_1 x_n + \psi_2 y_n}{\omega_1 x_n + \omega_2 y_n}.$$

Доказано, что если хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \begin{vmatrix} \psi_1 & \psi_2 \\ \omega_1 & \psi_2 \end{vmatrix}$ не равен нулю, то решения указанной системы имеют в плоскости $\mathbb{C}$ подвижные точки ветвления второго порядка.

Основная часть. Пусть гамильтониан некоторой системы $H = F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$, где F – голоморфная функция своих аргументов, причем

$$\varphi_1 = \frac{x_1^2}{\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1}, \varphi_2 = \frac{y_2^2}{\alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2},$$
$$\varphi_3 = \alpha x_3 + \beta y_3, \varphi_4 = \gamma x_4^2 + \delta y_4^2.$$

Соответствующая система Гамильтона будет такой:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_1}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{-\beta_1 x_1^2}{(\alpha_1 x_1+\beta_1 y_1)^2} &&(1.1)\\
&\frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_2}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{2\alpha_2 x_2 y_2+\beta_2 y_2^2}{(\alpha_2 x_2+\beta_2 y_2)^2} &&(1.2)\\
&\frac{dx_3}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_3}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_3}\cdot\beta &&(1.3)\\
&\frac{dx_4}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_4}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_4}\cdot 2\delta y_4 &&(1.4)\\
&\frac{dy_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{2\beta_1 x_1 y_1+\alpha_1 x_1^2}{(\alpha_1 x_1+\beta_1 y_1)^2} &&(1.5)\\
&\frac{dy_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{-\alpha_2 y_2^2}{(\alpha_2 x_2+\beta_2 y_2)^2} &&(1.6)\\
&\frac{dy_3}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_3}\cdot\alpha &&(1.7)\\
&\frac{dy_4}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_4}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_4}\cdot 2\gamma x_4^2, &&(1.8)
\end{aligned}\right.$$

где $t\in\mathbb{C}, x_1,\ldots,y_4\in\mathbb{C}\bigcup\{\infty\}$.

Из уравнений (1.1) и (1.5) имеем

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{2\beta_1 x_1 y_1+\alpha_1 x_1^2}{\beta_1 x_1^2}=\frac{2y_1}{x_1}+\frac{\alpha_1}{\beta_1}. \qquad (2)$$

С помощью замены $\frac{y_1}{x_1}=u$ $(u=u(x_1))$ получаем общий интеграл ДУ (2):

$$\frac{x_1^2}{\alpha_1 x_1+\beta_1 y_1}=C_1, \qquad (3)$$

где C_1 – произвольная постоянная. Таким образом, мы получили один из первых интегралов системы (1.1)–(1.8). Из равенства (3)

$$y_1=\frac{x_1^2-C_1\alpha_1 x_1}{C_1\beta_1}. \qquad (2.1)$$

Используя первый интеграл (3), дифференциальное уравнение (1.1) запишется так:

$$\frac{dx_1}{dt}=\Phi_1(C_1,C_2,C_3,C_4)\frac{-\beta_1 x_1^2}{\left(\alpha_1 x_1+\beta_1\cdot\frac{x_1^2-C_1\alpha_1 x_1}{C_1\beta_1}\right)^2}=$$

$$=\Phi_1(C_1,C_2,C_3,C_4)\frac{-\beta_1 C_1^2}{x_1^2},$$

где $\Phi_1(C_1,C_2,C_3,C_4)=\left.\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\right|_{\varphi_1=C_1,\varphi_2=C_2,\varphi_3=C_3,\varphi_4=C_4}$.

Отсюда

$$x_1=\sqrt[3]{-3\beta_1\Phi_1(C_1,C_2,C_3,C_4)\cdot C_1^2(t-C_5)}, \qquad (2.2)$$

где C_5 – произвольная постоянная.

Из формулы (2.1) следует, что

$$y_1=\frac{1}{\beta_1}\Big(C_1\sqrt[3]{9C_1\beta_1^2\Phi_1^2(C_1,C_2,C_3,C_4)(t-C_5)^2}-$$
$$-\alpha_1\sqrt[3]{-3C_1^2\beta_1\Phi_1(C_1,C_2,C_3,C_4)(t-C_5)}\Big). \qquad (2.3)$$

Из уравнений (1.4) и (1.8) получаем, что

$$\frac{dx_4}{dy_4}=-\frac{\delta y_4}{\gamma x_4}.$$

Отсюда

$$\gamma x_4^2+\delta y_4^2=C_4, \qquad (4)$$

где C_4 – произвольная постоянная. Аналогичным образом находятся первые интегралы вида

$$\frac{y_2^2}{\alpha_2 x_2+\beta_2 y_2}=C_2, \qquad (5)$$

$$\alpha x_3+\beta y_3=C_3, \qquad (6)$$

где C_2, C_3 – произвольные постоянные.

Из равенства (5) имеем

$$x_2=\frac{y_2^2-\beta_2 C_2 y_2}{\alpha_2 C_2}. \qquad (7)$$

Интегрируя ДУ (1.6), получим

$$y_2=\sqrt[3]{3\alpha_2 C_2^2\Phi_2(C_1,C_2,C_3,C_4)(t-C_6)}, \qquad (8)$$

где C_6 – произвольная постоянная,

$$\Phi_2(C_1,C_2,C_3,C_4)=\left.\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\right|_{\varphi_1=C_1,\varphi_2=C_2,\varphi_3=C_3,\varphi_4=C_4}.$$

На основании формулы (7) функция

$$x_2=\frac{1}{\alpha_2}\Big(\sqrt[3]{9C_2\alpha_2^2\Phi_2^2(C_1,C_2,C_3,C_4)(t-C_6)^2}-$$
$$-\beta_2\sqrt[3]{3C_2^2\alpha_2\Phi_2(C_1,C_2,C_3,C_4)(t-C_6)}\Big). \qquad (9)$$

Интегрируя уравнение (1.3), будем иметь

$$x_3=\Phi_3(C_1,C_2,C_3,C_4)\beta(t-C_7), \qquad (10)$$

где C_7 – произвольная постоянная,

$$\Phi_3(C_1,C_2,C_3,C_4)=\left.\frac{\partial F}{\partial \varphi_3}\right|_{\varphi_1=C_1,\varphi_2=C_2,\varphi_3=C_3,\varphi_4=C_4}.$$

Используя первый интеграл (6), получим

$$y_3=\frac{1}{\beta}(C_3-\alpha\Phi_3(C_1,C_2,C_3,C_4)\beta(t-C_7)). \qquad (11)$$

Из формулы (4)

$$y_4=\sqrt{\frac{C_4-\gamma x_4^2}{\delta}}. \qquad (12)$$

Используя формулу (12), уравнение (1.4) запишется так:

$$\frac{dx_4}{dt}=2\Phi_4\left(C_1,C_2,C_3,C_4\right)\sqrt{\delta}\sqrt{\left(\sqrt{C_4}\right)^2-\left(\sqrt{\gamma}x_4\right)^2}.$$

Отсюда

$$x_4=\sqrt{\frac{C_4}{\gamma}}\sin(2\sqrt{\gamma\cdot\delta}\Phi_4\left(C_1,C_2,C_3,C_4\right)\left(t-C_8\right)), \quad (13)$$

где C_8 – произвольная постоянная,

$$\Phi_4\left(C_1,C_2,C_3,C_4\right)=\left.\frac{\partial F}{\partial\varphi_4}\right|_{\varphi_1=C_1,\varphi_2=C_2,\varphi_3=C_3,\varphi_4=C_4}.$$

Из формулы (13) видим, что функция $x_4=x_4\left(t\right)$ не имеет в $\mathbb{C}$ никаких подвижных особых точек. На основании равенства (12) заключаем, что таким же свойством обладает и функция $y_4=y_4\left(t\right)$.

Из всего вышеизложенного вытекает утверждение.

Теорема. Зависимые переменные $x_1=x_1\left(t\right),y_1=y_1\left(t\right),x_2=x_2\left(t\right),\ \ y_2=y_2\left(t\right)$ системы (1.1)–(1.8) имеют в плоскости $\mathbb{C}$ подвижные точки ветвления третьего порядка (см. формулы (2.2), (2.3), (8), (9)). Других подвижных особых точек решения системы (1.1)–(1.8) не имеют.

Замечание. Из формул (10) и (11) следует, что функции $x_3=x_3\left(t\right)$ и $y_3=y_3\left(t\right)$ не имеют в $\mathbb{C}$ никаких подвижных особых точек.

Заключение. В статье рассмотрена автономная система Гамильтона восьмого порядка

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_1}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_2}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2},$$

$$\frac{dx_3}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_3}==\frac{\partial F}{\partial\varphi_3}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial y_3},\quad \frac{dx_4}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_4}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_4}\cdot\frac{\partial\varphi_4}{\partial y_4},$$

$$\frac{dy_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1},$$

$$\frac{dy_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2},$$

$$\frac{dy_3}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=-\frac{\partial F}{\partial\varphi_3}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial x_3},$$

$$\frac{dy_4}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_4}=-\frac{\partial F}{\partial\varphi_4}\cdot\frac{\partial\varphi_4}{\partial x_4},$$

где F – голоморфная функция своих аргументов, причем

$$\varphi_1=\frac{x_1^{\ 2}}{\alpha_1x_1+\beta_1y_1},\quad \varphi_2=\frac{y_2^{\ 2}}{\alpha_2x_2+\beta_2y_2},$$

$$\varphi_3=\alpha x_3+\beta y_3,\quad \varphi_4=\gamma x_4^{\ 2}+\delta y_4^{\ 2}.$$

Доказано, что зависимые переменные

$$x_1=x_1\left(t\right),\ x_2=x_2\left(t\right),\ y_1=y_1\left(t\right),\ y_2=y_2\left(t\right)$$

имеют в плоскости независимой переменной $\mathbb{C}$ подвижные точки ветвления третьего порядка. Установлено также, что функции $x_3=x_3\left(t\right),y_3=y_3\left(t\right),x_4=x_4\left(t\right),y_4=y_4\left(t\right)$ не имеют в $\mathbb{C}$ никаких подвижных особых точек.

Литература

1. *Айзерман, М.А.* Классическая механика / М.А. Айзерман. – М.: Наука, 1974. – С. 367.
2. *Мышкис, А.Д.* Математика. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1971. – С. 632.
3. *Гантмахер, Ф.Р.* Лекции по аналитической механике / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, 2001. – 264 с.
4. *Айнс, Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. – Харьков: ГНТИУ, 1939. – С. 718.
5. *Голубев, В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. – С. 436.
6. *Еругин, Н.П.* Проблема Римана / Н.П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1982. – С. 336.
7. *Яблонский, А.И.* Системы дифференциальных уравнений, критические особые точки которых неподвижны / А.И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1967. – Т. 3. – № 3. – С. 468–478.
8. *Мататов, В.И.* О характере особых подвижных точек некоторых систем Гамильтона / В.И. Мататов // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17. № 8. – С. 1502–1503.
9. *Мататов, В.И.* Исследование подвижных особенностей неавтономных систем Гамильтона с кубическими нелинейностями / В.И. Мататов, Л.В. Сабынич // Вест. БГУ. Серия 1. – 1993. – № 2. – С. 59–63.
10. *Мататов, В.И.* О характере подвижных особых точек решений автономной системы Гамильтона 2n-го порядка / В.И. Мататов, С.В. Пенталь, Н.В. Реут // Весці БДПУ. Серия 3. – 2012. – № 2. – С. 22–24.

Summary

The autonomous Hamilton system of the eighth order

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_1}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\cdot\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1},\quad \frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_2}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\cdot\frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2},$$

$$\frac{dx_3}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_3}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_3}\cdot\frac{\partial\varphi_3}{\partial y_3},\quad \frac{dx_4}{dt}=\frac{\partial H}{\partial y_4}=\frac{\partial F}{\partial\varphi_4}\cdot\frac{\partial\varphi_4}{\partial y_4},$$

$$\frac{dy_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1},\ \frac{dy_2}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2},$$

$$\frac{dy_3}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_3} = -\frac{\partial F}{\partial \varphi_3}\cdot\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3},\ \frac{dy_4}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_4} = -\frac{\partial F}{\partial \varphi_4}\cdot\frac{\partial \varphi_4}{\partial x_4},$$

where F is a holomorphic function of its arguments, and

$$\varphi_1 \frac{x_1^{\,2}}{\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1},\ \varphi_2 = \frac{y_2^{\,2}}{\alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2},$$

$$\varphi_3 = \alpha x_3 + \beta y_3\ ,\ \varphi_4 = \gamma x_4^{\,2} + \delta y_4^{\,2},$$

has been considered in the article.

It has been proved that dependent variables

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ y_1 = y_1(t),\ y_2 = y_2(t)$$

have movable branching points of the second order in the plane of independent variable $\mathbb{C}$*. It is also determined that functions*

$$x_3 = x_3(t), y_3 = y_3(t), x_4 = x_4(t), y_4 = y_4(t)$$

do not have any movable singular points in $\mathbb{C}$*.*

Поступила в редакцию 11.12.2012 г.