МАТЭМАТЫКА

УДК 517.95

У.А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук,
дэкан матэматычнага факультэта БДПУ;
Т.І. Борыс,
студэнт V курса матэматычнага факультэта БДПУ;
К.В. Падпалуха,
студэнт V курса матэматычнага факультэта БДПУ

ДАСЛЕДАВАННЕ СІСТЭМЫ ЛІНЕЙНЫХ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ РАЎНАННЯЎ У ЧАСТКОВЫХ ВЫТВОРНЫХ МЕТАДАМ МАНАГЕННЫХ У СЭНСЕ У.С. ФЁДАРАВА ФУНКЦЫЙ

Уводзіны. Для вывучэння дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных выкарыстоўваюцца розныя метады. Адным з такіх метадаў з'яўляецца метад функцый, манагенных у сэнсе У.С. Фёдарава (F-манагенных) [1–9]. У прыватнасці, пры дапамозе F-манагенных функцый можна пабудаваць функцыянальна-інварыянтныя рашэнні сістэмы Максвэла для электрамагнітнага поля ў пустаце і функцыянальна-інварыянтныя вектар-аналітычныя функцыі [10–13]. Акрамя гэтага, пры дапамозе адзначаных функцый для асобных відаў дыферэнцыяльных раўнанняў і сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў будуюцца рашэнні ў замкнутай форме [14].

У дадзенай працы пры дапамозе F-манагенных функцый даследуецца сістэма трох дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных з трыма невядомымі функцыямі і сталымі каэфіцыентамі.

Асноўная частка. Разгледзім сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных выгляду

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=M_1\frac{\partial u}{\partial y}-M_3\frac{\partial v}{\partial y}-M_2\frac{\partial w}{\partial y},\\ \frac{\partial v}{\partial x}&=M_2\frac{\partial u}{\partial y}+M_1\frac{\partial v}{\partial y}-M_3\frac{\partial w}{\partial y},\\ \frac{\partial w}{\partial x}&=M_3\frac{\partial u}{\partial y}+M_2\frac{\partial v}{\partial y}+M_1\frac{\partial w}{\partial y},\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

дзе u,v,w – шуканыя камплекснназначныя функцыі дзвюх рэчаісных зменных x,y; M_1,M_2,M_3 – некаторыя камплексныя канстанты.

Для даследавання адзначанай сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў (1) скарыстаем лінейную асацыятыўна-камутатыўную алгебру (гіперкамплексную сістэму) A з адзінкай над полем камплексных лікаў. Алгебра A мае базіс $1,\lambda,\lambda^2$, закон множання вызначаецца роўнасцю $\lambda^3=-1$.

Разгледзім спачатку задачу аб прывядзенні сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў (1) да гіперкамплекснага выгляду

$$a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial y}=0, \qquad (2)$$

дзе $a=a_1+a_2\lambda+a_3\lambda^2$, $b=b_1+b_2\lambda+b_3\lambda^2$, $f=u+v\lambda+w\lambda^2$, $a_k,b_k\,(k=1,2,3)$ – камплексныя канстанты.

З сістэмы (1) атрымаем

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}\lambda+\frac{\partial w}{\partial x}\lambda^2=\\ &=(M_1+M_2\lambda+M_3\lambda^2)\frac{\partial u}{\partial y}+\\ &+(-M_3+M_1\lambda+M_2\lambda^2)\frac{\partial v}{\partial y}+\\ &+(-M_2-M_3\lambda+M_1\lambda^2)\frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned} \qquad (3)$$

Апошняе раўнанне (3) можна запісаць у наступным выглядзе:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=(M_1+M_2\lambda+M_3\lambda^2)\frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (4)$$

дзе $f=u+v\lambda+w\lambda^2$.

Раўнанне (4) можна разглядаць як умову (2) пры $a=-1$, $b=M_1+M_2\lambda+M_3\lambda^2$ у алгебры

$A\{1,\lambda,\lambda^2\}$, дзе закон множання вызначаецца роўнасцю $\lambda^3=-1$.

Як вядома [1–2], умова (неабходная і дастатковая) манагеннасці адной гіперкамплекснай функцыі f па другой гіперкамплекснай функцыі ζ у некаторым абсягу D плоскасці x,y мае выгляд

$$\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

(прычым мяркуецца, што ў кожным пункце абсягу D існуе элемент дадзенай алгебры A, адваротны значэнню $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$ або $\frac{\partial\zeta}{\partial y}$ у гэтым пункце).

Адсюль вынікае, што раўнанне (4) выражае манагеннасць гіперкамплекснай функцыі f па гіперкамплекснай функцыі ζ, дзе функцыя ζ задавальняе наступным умовам:

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}=1,\ \frac{\partial\zeta}{\partial x}=M_1+M_2\lambda+M_3\lambda^2,$$

адкуль атрымліваем, што

$$\zeta=(M_1x+y)+M_2x\lambda+M_3x\lambda^2.$$

Такім чынам, агульным рашэннем сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1), запісаным у гіперкамплексным выглядзе, у дадзеным абсягу D плоскасці x,y будзе адвольная гіперкамплексная функцыя $f=u+v\lambda+w\lambda^2$, манагенная ў сэнсе У.С. Фёдарава ў абсягу D па функцыі $\zeta=(M_1x+y)+M_2x\lambda+M_3x\lambda^2$.

У гэтым выпадку дамовімся пісаць $f\in(\zeta,D,A)$. Даследуем структуру функцый $f\in(\zeta,D,A)$.

Поруч з гіперкамплекснай сістэмай з базісам $1,\lambda,\lambda^2$ $(\lambda^3=-1)$ разгледзім гіперкамплексную сістэму з базісам

$$e_1=\frac{1}{3}(\lambda^2-\lambda+1),$$

$$e_2=\frac{1}{6}((-1-\sqrt{3}i)\lambda^2+(1-\sqrt{3}i)\lambda+2),$$

$$e_3=\frac{1}{6}((-1+\sqrt{3}i)\lambda^2+(1+\sqrt{3}i)\lambda+2),$$

дзе $i^2=-1$.

Тады $e_1+e_2+e_3=1$, $e_i\cdot e_k=0$ $(i\neq k)$, $e_1(e_1+e_2+e_3)=e_1$, адкуль $e_1^2=e_1$; аналагічна $e_2^2=e_2$, $e_3^2=e_3$.

Відавочнай з'яўляецца роўнасць

$$\lambda^3+1=$$
$$=((\lambda+1))\left(\lambda-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\left(\lambda-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right).$$

Калі ўлічыць, што $\lambda^3=-1$, то будзем мець

$$e_1(\lambda+1)=0,\ e_2\left(\lambda-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=0,$$

$$e_3\left(\lambda-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)=0,$$

адкуль

$$\lambda e_1=-e_1,\ \lambda e_2=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e_2,$$

$$\lambda e_3=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)e_3.$$

Такім чынам, $\lambda=-e_1+re_2+\bar{r}e_3$, $\lambda^2=e_1+r^2e_2+\bar{r}^2e_3$ $\left(r=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, адкуль

$$a+b\lambda+c\lambda^2=e_1(a+-b+c)+$$
$$+e_2(a+rb+r^2c)+e_3(a+\bar{r}b+\bar{r}^2c),$$

дзе a, b, c – камплексныя лікі.

Калі скарыстаць апошнюю роўнасць, функцыі

$$f=u+\lambda v+\lambda^2w,$$

$$\zeta=(M_1x+y)+M_2x\lambda+M_3x\lambda^2,$$

$$\theta=\theta_1+\lambda\theta_2+\lambda^2\theta_3$$

можна запісаць наступным чынам:

$$f=Pe_1+Qe_2+Re_3,$$

$$\zeta=\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3,$$

$$\theta=Ke_1+Be_2+Ce_3,$$

дзе

$$P=u-v+w,\ Q=u+rv+r^2w,$$

$$R=u+\bar{r}v+\bar{r}^2w,$$

$$\alpha=M_1x+y-M_2x+M_3x,$$

$$\beta=M_1x+y+rM_2x+r^2M_3x,$$

$$\gamma=M_1x+y+\bar{r}M_2x+\bar{r}^2M_3x,$$

$$K=\theta_1-\theta_2+\theta_3,\ B=\theta_1+r\theta_2+r^2\theta_3,$$

$$C=\theta_1+\bar{r}\theta_2+\bar{r}^2\theta_3.$$

Тады ўмова манагеннасці $df=\theta d\zeta$ функцыі f па функцыі ζ прыме наступны выгляд:

$$e_1 dP + e_2 dQ + e_3 dR =$$
$$= e_1 K\, d\alpha + e_2 B\, d\beta + e_3 C\, d\gamma,$$

адкуль $dP = Kd\alpha$, $dQ = Bd\beta$, $dR = Cd\gamma$, гэта значыць, камплексная функцыя P з'яўляецца F-манагеннай па камплекснай функцыі α, функцыя Q з'яўляецца F-манагеннай па функцыі β, R – F-манагеннай па функцыі γ.

Такім чынам, для кампанентаў u, v, w функцыі $f = u + \lambda v + \lambda^2 w$ $(\lambda^3 = -1)$, F-манагеннай па функцыі

$$\zeta = (M_1 x + y) + M_2 x\lambda + M_3 x\lambda^2,$$

маем:

$$u - v + w \equiv P[\alpha],$$
$$u + rv + r^2 w \equiv Q[\beta], \qquad (5)$$
$$u + \bar{r}v + \overline{r^2} w \equiv R[\gamma],$$

дзе $P[\alpha]$ $(Q[\beta]$, $R[\gamma])$ – адвольная камплексная функцыя, F-манагенная па функцыі α (β, γ) у абсягу D.

Заключэнне. З роўнасцей (5) вынікае наступная тэарэма.

Тэарэма. Агульнае рашэнне сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных (1) мае выгляд:

$$u_0 = \frac{P + Q + R}{3},$$
$$v = \frac{\bar{r}Q - P - R}{3},$$
$$w = \frac{P + Q - \bar{r}R}{3},$$

дзе $P \equiv P[\alpha]$ $(Q \equiv Q[\beta]$, $R \equiv R[\gamma])$ – адвольная камплексная функцыя, F-манагенная па функцыі

$$\alpha = M_1 x + y - M_2 x + M_3 x$$
$$(\beta = M_1 x + y + rM_2 x + r^2 M_3 x,$$
$$\gamma = M_1 x + y + \bar{r}M_2 x + \overline{r^2} M_3 x)$$

у абсягу D; $r = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

ЛІТАРАТУРА

1. *Федоров, В.С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В.С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
2. *Павлов, С.Д.* Решение систем линейных дифференциальных уравнений с частными производными с помощью моногенных функций в смысле В.С. Федорова / С.Д. Павлов // Anal. stiint. Univ. Iasi. – 1962. – F. 2. – T. 8. – P. 323–329.
3. *Стельмашук, Н.Т.* О некоторых линейных дифференциальных системах в частных производных / Н.Т. Стельмашук // Сибирский математический журнал. – 1964. – № 1. – Т. 5. – С. 166–173.
4. *Федоров, В.С.* Решение некоторых уравнений в частных производных методами F-моногенных функций / В.С. Федоров, Н.Т. Стельмашук // Rev. Roum. de Math. Pures et Appl. – 1973. – № 2. – Т. 18. – P. 233–241.
5. *Кусковский, Л.Н.* О краевой задаче типа Римана-Гильберта / Л.Н. Кусковский // Дифференциальные уравнения. – 1975. – № 3. – Т. 11. – С. 523–532.
6. *Стельмашук, Н.Т.* О решении одной линейной дифференциальной системы в частных производных методами F-моногенных функций / Н.Т. Стельмашук, С.Б. Пенчанский // Дифференциальные уравнения. – 1990. – № 4. – Т. 26. – С. 724–727.
7. *Стельмашук, Н.Т.* Метод формальных производных для решения задачи Коши для одной системы дифференциальных уравнений в частных производных / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Дифференциальные уравнения. – 1993. – № 11. – Т. 29. – С. 2019–2020.
8. *Stelmashuk, N.T.* The solution of the boundary value problem for a system of equations in formal derivatives by means dual differential operators / N.T. Stelmashuk, V.A. Shylinets // Труды института математики НАН Беларуси. – 2004. – № 2. – Т. 12. – С. 170–171.
9. *Стельмашук, Н.Т.* О преобразовании к каноническому виду системы линейных уравнений в частных производных с помощью двойных дифференциальных операторов / Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2008. – № 2. – С. 61–65.
10. *Стельмашук, Н.Т.* Об одном исследовании системы Максвелла с помощью F-моногенных функций / Н.Т. Стельмашук // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1967. – № 2. – Т. 7. – С. 431–436.
11. *Стэльмашук, М.Т.* Пабудова інтэгральных выяўленняў для функцыянальна-інварыянтных рашэнняў сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў Максвэла / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец // Весці БДПУ. – 1999. – № 2. – С. 147–150.
12. *Стельмашук, Н.Т.* Об интегральном представлении функционально-инвариантных вектор-аналитических функций // Н.Т. Стельмашук, В.А. Шилинец // Весці НАН Беларусі. Серыя фіз.-мат. навук. – 2006. – № 1. – С. 44–47.
13. *Шилинец, В.А.* Исследование краевой задачи для функционально-инвариантных вектор-аналитических функций / В.А. Шилинец // Еругинские чтения – 2011: тез. докл. XIV Междунар. науч. конф. по дифференциальным уравнениям (Новополоцк, 12–14 мая 2011 г.) / Полоц. гос. ун-т. – Новополоцк, 2011. – 194 с. – С. 116–117.

14. *Шылінец, У.А.* Знаходжанне агульнага рашэння сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў у частковых вытворных другога парадку / У.А. Шылінец, А.В. Альшэўская, М.Г. Двурэчанская // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2011. – № 2. – С. 16–20.

SUMMARY

Using the class of F-monogenic functions the general solution of one system of differential equations in the partial derivatives is obtained.

Паступіў у рэдакцыю 12.10.2012 г.