УДК 378.016:517.5

В.К. Кирман,
кандидат педагогических наук, доцент кафедры статистики и теории вероятности Днепропетровского национального университета имени Олеся Гончара

О ЗАДАЧАХ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ

Введение. Задачи вычислительной математики традиционно занимали центральное место в преподавании. Школьный курс математики всегда был немыслим без обязательных блоков задач вычислительного характера. Эти задачи направлены на реализацию линии прикладной направленности математики, поэтому методисты всегда уделяли достаточное внимание задачам вычислительного характера. Как известно, концептуальные идеи построения содержательно-методической линии вычислений изложены в работах В.М. Брадиса [1]. Отметим, что в этих работах рассматривались не только теоретические и методические, но и технологические аспекты. Аналогичные технологические вопросы обсуждаются в работах И.В. Барановой [2], М.Г. Васильева [3].

Выход на новые вычислительные технологии и реформа математического образования 70-х годов прошлого века стимулировали новые работы С.А. Аллабергенова [4], А.Н. Бекаревича [5], где развиваются классические идеи [1], но с новой технологической составляющей и на более широком классе прикладных задач. Как эмпирическая база для формирования знаний в области математического анализа, вычислительные задачи рассматриваются в работах И.Ф. Соколовского [6]. Различные подходы к изучению приближенных вычислений в школе систематизированы в работах З.И. Слепкань [7], где анализируются также вопросы психологического характера, связанные с восприятием соответствующих математических идей.

В.М. Клиндукова в своих исследованиях [8–9], опираясь на опыт внедрения приближенных вычислений, рассматривает развивающие возможности вычислительных задач в современных условиях. Ряд вопросов формирования вычислительных навыков исследуются Л.А. Сухиной [10], Г.А. Корнем [11]. На современном этапе технологическая составляющая в основном связана с символьными вычислениями и внедрением в учебную практику интеллектуальных систем. Ж.Б. Лагранжем [12] доказана эффективность применения символьных вычислений для пропедевтики идей анализа.

В то же время, несмотря на большое количество работ отечественных и зарубежных методистов по приближенным вычислениям в школьном курсе математики, остается открытым вопрос об аргументации алгоритмов вычислений элементарных функций, что в целом выходит за рамки школьной программы. Учащиеся могут пользоваться таблицами, калькуляторами, современными математическими пакетами, но для них остаются открытыми вопросы: как составлена таблица, как работает соответствующая программа и т. д.

Частично эти вопросы обсуждаются при изучении начал математического анализа, но, как уже отмечалось, знаний по математическому анализу недостаточно даже у учащихся классов с углубленным изучением математики. Аргументы по поводу невозможности в школьной математике формализованного обоснования процедур, связанных с вычислениями значений функций, приводит И.А. Иванова [13]. Исследователь выдвигает идею построения двухъядерной модели курса алгебры и начала анализа на базе так называемой рациональной логики (логики прикладной математики), при этом основная деятельность ученика в таком курсе направляется на решение задач математического моделирования. Глубокие исследования в этом направлении в последнее время проводятся О.И. Мельниковым [14–15].

Некоторые алгоритмы в контексте применения компьютерных технологий вычисления элементарных функций, которые могут быть доступными для учащихся, предложены в работах П. Макштейна [16] и Р. Нейва [17]. Однако вопросы, затрагиваемые в этих работах, сильно оторваны от школьной программы по математике. Следовательно, актуальной остается проблема построения схем изучения материала, связанного с вычислениями значений элементарных функций и содержащего обоснования, доступные для учащихся старших классов.

Цель данной статьи – конструирование дидактически обоснованных подходов к задачам вычисления значений элементарных функций, адаптированных для учащихся классов с углубленным изучением математики.

Основная часть. Исходя из вышесказанного, реализация практической направленности обучения математике невозможна без систематического решения вычислительных задач. Вместе с тем новые программы не предусматривают изучение элементов вычислительной математики в явном виде. Однако именно вычислительные задачи вместе с навыками математического моделирования и составляют основу математической компетентности для большей части видов деятельности выпускников профильных физико-математических классов. Таким образом, изучение вопросов, связанных с вычислениями, необходимо проводить в фоновом режиме почти во всех темах курса математики. Это еще в большей степени касается изучения функций, так как всегда в задачах, особенно прикладных, возникает вопрос: как именно вычислить значение соответствующей функции? Точнее, возникает несколько вопросов: как можно вычислять в принципе, какая может быть погрешность при соответствующих вычислениях, какими могут быть способы вычисления, какой из них лучший, как строго обосновать соответствующий способ вычисления, как оптимально использовать инструменты для вычислений и выбирать их для соответствующих задач? С позиций компетентностного подхода для осознания эволюции знаний об отдельных видах функций мы считаем необходимым, чтобы учащиеся имели представления, хотя бы начальные, об истории развития вычислений, связанных с конкретными числовыми функциями. Такой подход можно охарактеризовать как введение элементов историзма при изучении вычислительных задач содержательной линии функций.

Итак, исходя из вышесказанного, выделяем пять основных компонентов для вычислительных задач при изучении функций: 1) концептуально-исторический (как можно вычислить значения функций, как это делали или могли делать математики в разные исторические эпохи); 2) теоретический (как предложить и обосновать соответствующий метод вычисления); 3) алгоритмический (как составить или реализовать алгоритм-инструкцию по реализации вычислительного метода); 4) технологический (как выбрать и пользоваться соответствующими вычислительными приборами в современных условиях, в основном компьютером, с соответствующими программными средствами); 5) организационный (как организовать проведение достаточно объемных вычислений в коллективе).

Принципиально новым здесь является последний, пятый, компонент. Очевидно, что его реализация, как и других компонентов, невозможна без правильного выбора организационных форм проведения занятий. В частности, организационные аспекты изучения вычислительных задач можно осветить при проведении уроков в виде деловой игры, в том числе и при решении задач математического моделирования.

Знакомство с идеями вычислительных методов может происходить и во время лекций (графические, вычислительные демонстрации), практических занятий и семинаров, где в виде задач предлагается обосновать тот или иной алгоритм или метод. Мы считаем необходимым проведение при изучении каждой темы содержательной линии функций лабораторных вычислительных (графических вычислительных) работ, в частности, в виде интегрированных уроков «математика–информатика» и решения индивидуальных вычислительных задач, которые выдаются после лабораторной работы в классе. Их можно совмещать с задачами математического моделирования. Теоретический фундамент для проведения таких работ формируется на предыдущих лекциях и практических занятиях. Примерная структура занятия, посвященного проведению графических и вычислительных работ, может быть такой: 1) мотивация учебной деятельности; 2) повторение опорных знаний (в виде фронтального опроса); 3) фронтальный инструктаж, выдача заданий; 4) выполнение (индивидуальное или бригадами) вычислительных задач по прилагаемым инструкциям; 5) обсуждение результатов выполнения заданий; 6) инструктаж по выполнению индивидуальных домашних вычислительных работ.

Новая программа по математике не предусматривает изучение основ теории погрешностей в явном виде. Мы предлагаем изучение основ теории погрешностей в фоновом режиме с помощью системы задач. Проиллюстрировать применения основ теории погрешностей можно в ходе выполнения соответствующих лабораторных вычислительных работ, где необходимые факты для вычисления абсолютных и относительных погрешностей приводятся в инструкции без доказательств. Относительно обоснований, то они могут осуществляться в фоновом режиме. Приведем примеры.

1. При изучении темы «Неравенства» (8 класс) можно провести ознакомление с понятиями погрешности, абсолютной и относительной погрешности, ознакомить с источниками погрешностей, вывести формулы для абсолютных и относительных погрешностей для суммы и разности, ознакомить с формулами-оценками для относительных погрешностей для произведения и частного (для произведения двух чисел можно предложить и доказательства). Это дает основание для выполнения работы на вычисление значений функций, задаваемых рациональными выражениями с учетом погрешностей.

2. При изучении корней и степенной функции, опираясь на формулы для относительной погрешности произведения, не сложно получить соответствующие оценки относительной погрешности степени с рациональным показателем, что позволяет обосновать инструкции в лабораторных работах по вычислению выражений с радикалами и рациональными степенями.

3. При изучении темы «Производная и ее применение» (11 класс) можно вывести общие формулы для абсолютных погрешностей для значений функций [18, с. 42–53], а при изучении темы «Показательная и логарифмическая функции» (11 класс) – и относительных погрешностей. Также при изучении этой темы легко провести доказательство формул-оценок относительной погрешности произведения и частного [19, с. 35].

При изучении функций очень важен концептуальный аспект вычислительных задач. Необходимо, чтобы ученики, которые знакомятся с определенным классом функций, понимали, как конкретно можно вычислять ее значения. При этом представления учащихся эволюционируют от примитивных алгоритмов до достаточно сложных их форм. Именно так рассматривается графический метод вычисления значений функций, причем почти для всех их классов. По эскизу графика, и ученики должны это понять, можно получить лишь грубые оценки значений функции. Для тригонометрических, обратных тригонометрических функций на этапе начального ознакомления очень важным является метод геометрического моделирования. Так, первую таблицу значений тригонометрических функций можно составить на уроке геометрии, проводя вычислительную иллюстрацию (можно с использованием компьютерной анимации). Также целесообразно применять геометрические модели для вычисления значений функций, задаваемых некоторыми выражениями с радикалами.

Очень важно, как в прикладном, так и в теоретическом аспекте, научить учащихся применять метод оценок для вычисления значений монотонных функций. Так можно вычислять квадратные корни и корни высших степеней, степени с рациональным показателем, обратные тригонометрические функции по прямым и т. д. При изучении квадратных корней мы считаем необходимым ознакомить учащихся с известными алгоритмами извлечения корней «столбиком». В дальнейшем проходит постепенное усовершенствование алгоритмов в направлении их «технологичности». Так, при изучении формул синуса и косинуса суммы можно предложить учащимся разработать алгоритм табулирования этих функций. Он будет заключаться в том, что, зная $\sin x_0$, $\varepsilon - N$, $\cos\Delta x$, $\sin\Delta x$ для некоторого x_0 и достаточно малого Δx, можно вычислить значения $u_n = \sin\left(x_0 + n\Delta x\right)$ и $\varepsilon - \delta$, используя рекуррентные формулы:

$$u_{n+1} = u_n \cos\Delta x + v_n \sin\Delta x;$$

$$v_{n+1} = v_n \cos\Delta x - u_n \sin\Delta x.$$

Аналогичную схему можно предложить и для показательной функции. Для этого понадобится рекуррентное соотношение: $d_{n+1} = d_n \cdot a^{\Delta x}$.

Принципиальным шагом в изучении вычислительных алгоритмов значений функций становится тема «Числовые последовательности». Именно во время работы над этой темой после ознакомления с теоремой Вейерштрасса о сходимости монотонной и ограниченной последовательности можно решать задачи на исследование сходимости и вычисление пределов последовательностей, заданных рекуррентно:

1) если $x_1 = a > 0$ и $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sqrt{a}$ (схема Герона);

2) если $y_1 = M$ и $y_{n+1} = \frac{1}{3}\left(y_n + \frac{M}{y_n}\right)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \sqrt[3]{M}$;

3) если a и N – произвольные положительные числа и m – натуральное число, большее 1, $z_1 = \frac{m-1}{m}a + \frac{N}{ma^{m-1}}$ и $z_{n+1} = \frac{m-1}{m}x_{n-1} + \frac{N}{mx_{n-1}^{m-1}}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \sqrt[m]{N}$.

Знания о пределах таких последовательностей дают возможность строить итерационный вычислительный процесс. Проводя вычислительные иллюстрации для итерационных процессов, нужно обращать внимание учащихся на возможность контроля точности вычислений, выводя неравенства вида $\left|\lim\limits_{n\to\infty} y_n - y_n\right| \le k\left|y_{n+1} - y_n\right|$.

Изучение темы «Производная и ее применение» открывает новые перспективы для методов вычислений значений элементарных функций. Относительно явных объектов изучения, то это, во-первых, приближенные формулы, связанные с главной частью приращения функции (без оценки точности), и, во-вторых, применение теоремы Лагранжа для оценки приращения функции. По нашему мнению, есть возможность ознакомить учащихся с формулой Тейлора (без доказательства) и показать ее для основных классов функций.

Еще одним значимым аспектом применения производной является возможность табулирования элементарных функций по дифференциальным уравнениям, которые их описывают. Например, предположим, что на уроке-лекции при изучении темы «Показательная и логарифмическая функция» происходит следующий диалог.

Учитель: «Итак, мы с вами доказали, что $\left(e^x\right)' = e^x$. Подумайте, как можно использовать этот факт для табуляции функции $y = e^x$».

Ученик 1: «Это достаточно просто. Исходя из геометрического смысла производной, нам надо построить график так, чтобы угловой коэффициент всегда был равен значению этой функции, а по графику составим таблицу».

Ученик 2: «У меня два замечания к предыдущему предложению. Как известно, график может дать значение функции лишь с ограниченной точностью, а во-вторых, я, честно говоря, не вижу, как очень просто, благодаря этой идее, построить график».

Учитель: «Обратите внимание, что для нашей функции $y(x)$ выполняется соотношение $y'(x) = y(x)$ для всех вещественных x. Но нам ведь нужно табулировать функцию, а значит, нас интересуют ...»

Ученик 2: «Дискретные значения аргумента!»

Учитель: «Это означает, что мы можем ...»

Ученик 3: «Перейти от дифференциального соотношения в разностной модели. Мы же фактически то же самое делали на уроках физики, когда решали вычислительные задачи на компьютере!»

Ученик 4: «А именно, рассмотрим уравнение, которое выполняется с большой точностью для малых Δx: $y(x+\Delta x) - y(x) = y(x)\Delta x$».

Ученик 2: «Нам лучше его записать в виде:

$$y(x+\Delta x) = y(x)(1+\Delta x) \quad (*),$$

ведь Δx очень маленькое».

Учитель: «Как вы считаете, достаточно ли нам этого уравнения для определения функции?»

Ученик 1: «Нет, потому что, если мы составим рекуррентное отношение, нам нужно знать еще начальные значения. Для нашей функции известно, что $y(0) = 1$».

Ученик 3: «Тогда, если $y_n = y(n\Delta x)$, то получаем соотношения $y_{n+1} = y_n(1+\Delta x)$ и $y_0 = 1$».

Учитель: «Теперь соответствующий алгоритм легко реализовать, например, в электронных таблицах».

Мультимедийный проектор освещает вычислительную иллюстрацию (рисунок 1 а, б, в). На последнем рисунке изображен фрагмент графика экспоненты, построенный в EXCEL.

Учитель должен обратить внимание на несовершенство такого метода, поскольку он приводит к накоплению погрешностей. Вместе с тем по контрольному значению числа Непера можно утверждать, что в нашей таблице точными являются три знака, причем обязательно.

По нашему мнению, при изучении функций необходимо ознакамливать учащихся с приближенными формулами, упрощающими вычисления (иногда вычисления надо сделать быстро, а компьютер или таблицы отсутствуют). Приближенные формулы также важны при решении задач по физике, других задач математического моделирования.

К сожалению, строгое обоснование многих приближенных формул в пределах школьного курса невозможно. В этом случае предлагается при изучении конкретного класса функций проводить для всего класса вычислительные эксперименты по замене одних (более сложных функций) другими, в частности многочленами. «Материал» для соответствующих экспериментов можно получить из разложения известных функций в степенные ряды. Например, при изучении темы «Тригонометрические функции» (10 кл.) после ознакомления учащихся с графиком функции $y = \cos x$ учитель спрашивает учеников о том, график какой функции напоминает косинус, если аргумент достаточно близок к 0. Ответ почти очевиден – квадратичной. Далее учитель просит учащихся предложить возможный вид этой квадратичной функции. Первый возможный вариант – $f(x) = 1 - x^2$. Далее при помощи инструментов GRAN1 строятся соответствующие графики (рисунок 2).

C3 | f_x =C2*(1+$E$2)

	A	B	C	D	E
1		АРГУМЕНТ	ФУНКЦІЯ		КРОК
2	ПОЧАТКОВЕ ЗНАЧЕННЯ	0	1		0,0001
3		0,0001	1,0001		
4		0,0002	1,0002		
5		0,0003	1,0003		
6		0,0004	1,0004		
7		0,0005	1,0005		
8		0,0006	1,0006		
9		0,0007	1,0007		
10		0,0008	1,0008		
11		0,0009	1,0009		
12		0,001	1,001		
13		0,0011	1,001101		
14		0,0012	1,001201		
15		0,0013	1,001301		

Рисунок 1а – Начало таблицы для экспоненты с шагом 0,0001

C10002 | f_x =C10001*(1+$E$2)

	A	B	C	D	E	F
10000		0,9998	2,7176024			
10001		0,9999	2,7178741			
10002		1	2,7181459	**ЧИСЛО е. Точність - 3 знаки**		
10003		1,0001	2,7184177			
10004		1,0002	2,7186896			
10005		1,0003	2,7189615			
10006		АРГУМЕНТ	ЗНАЧЕННЯ			
10007						

Рисунок 1б – Значение экспоненты в окрестности неперова числа. Точность – три знака

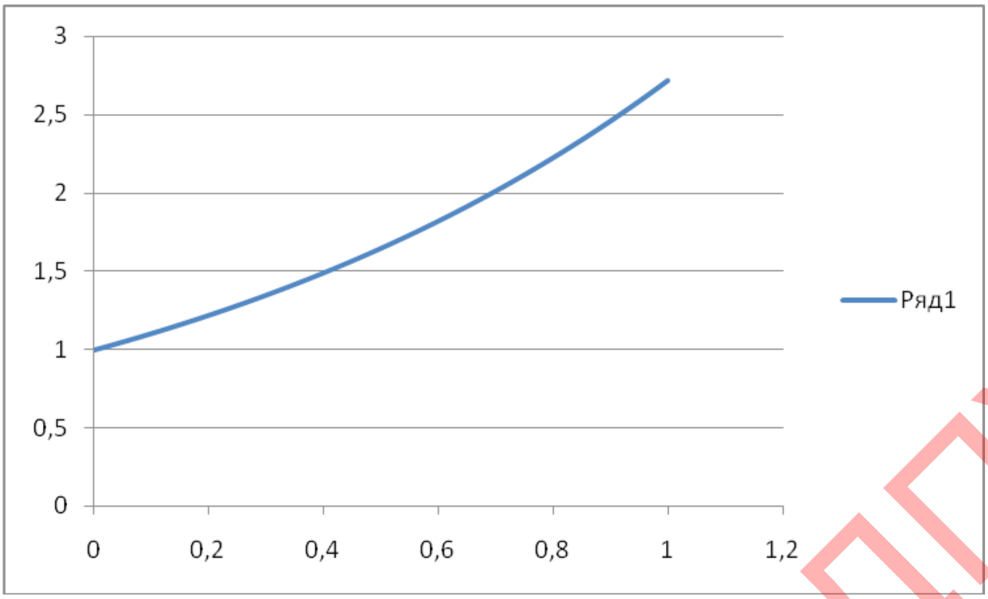

Рисунок 1в – График экспоненты, построенный по таблице

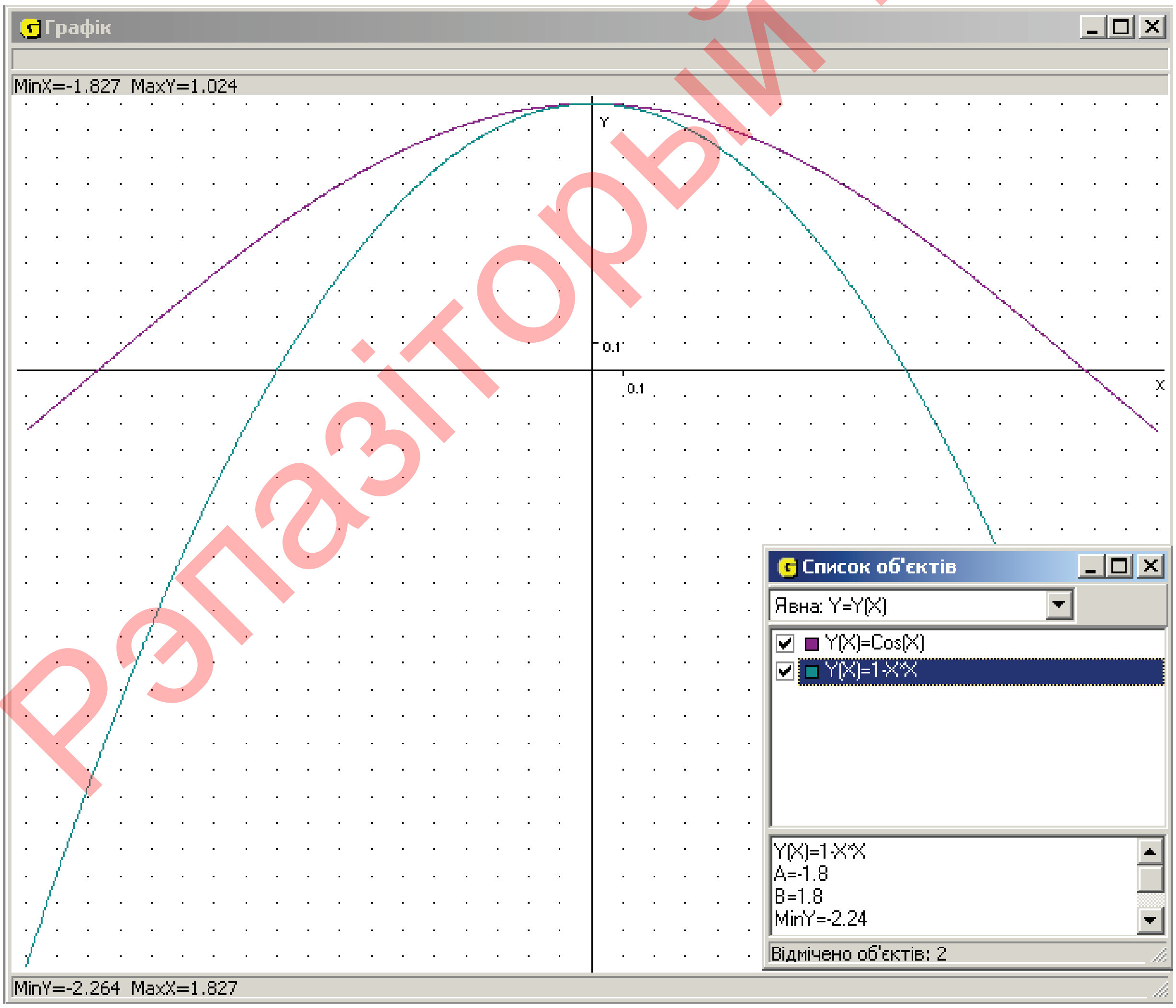

Рисунок 2 – Графики функций $y = \cos x$ *и* $f(x) = 1 - x^2$

Несмотря на то, что для очень маленьких значений аргумента значения функции почти совпадают, легко увидеть, что графики очень отличаются. Ученики должны понять, что надо «расширить ветви». Это можно сделать, если искать квадратичную функцию в виде $f(x)=1-kx^2$, где $0<k<1$. Простейший вариант: $k=\frac{1}{2}$. Проводим эксперимент в GRAN1 (рисунок 3).

По графикам легко увидеть, что для достаточно малых значений аргумента графики почти совпадают (трассировка иллюстрирует эти значения). Таким образом, имеем приближенную формулу, которая работает для достаточно малых x: $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$.

Аналогичными рассуждениями выдвигаем гипотезу: косинус еще в большей окрестности 0 можно приблизить многочленом четной степени (ведь косинус – четная функция). Так приходим, например, для $-1\le x\le 1$ к приближенной формуле: $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$ (рисунок 4).

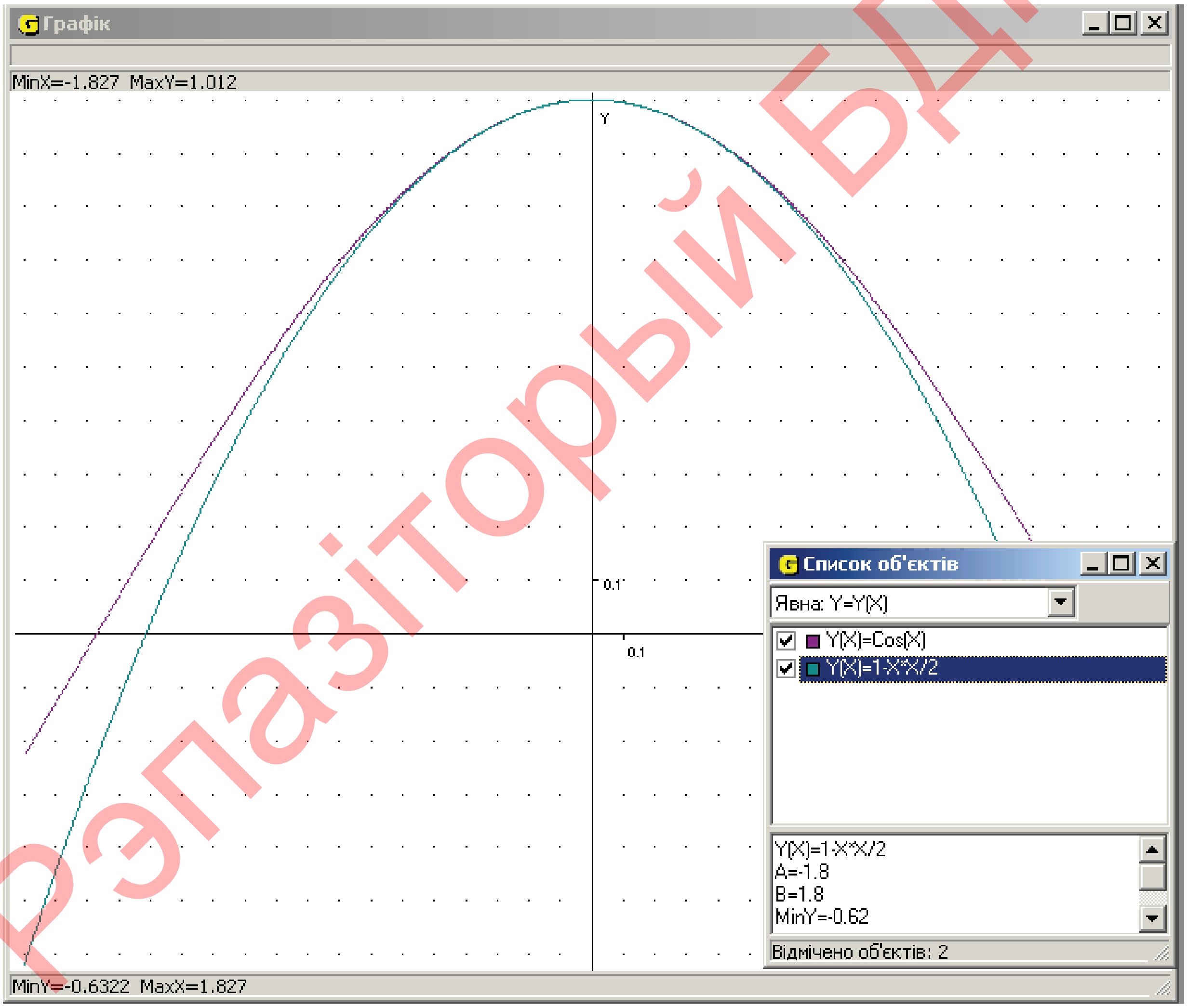

Рисунок 3 – Иллюстрация приближенной формулы $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$

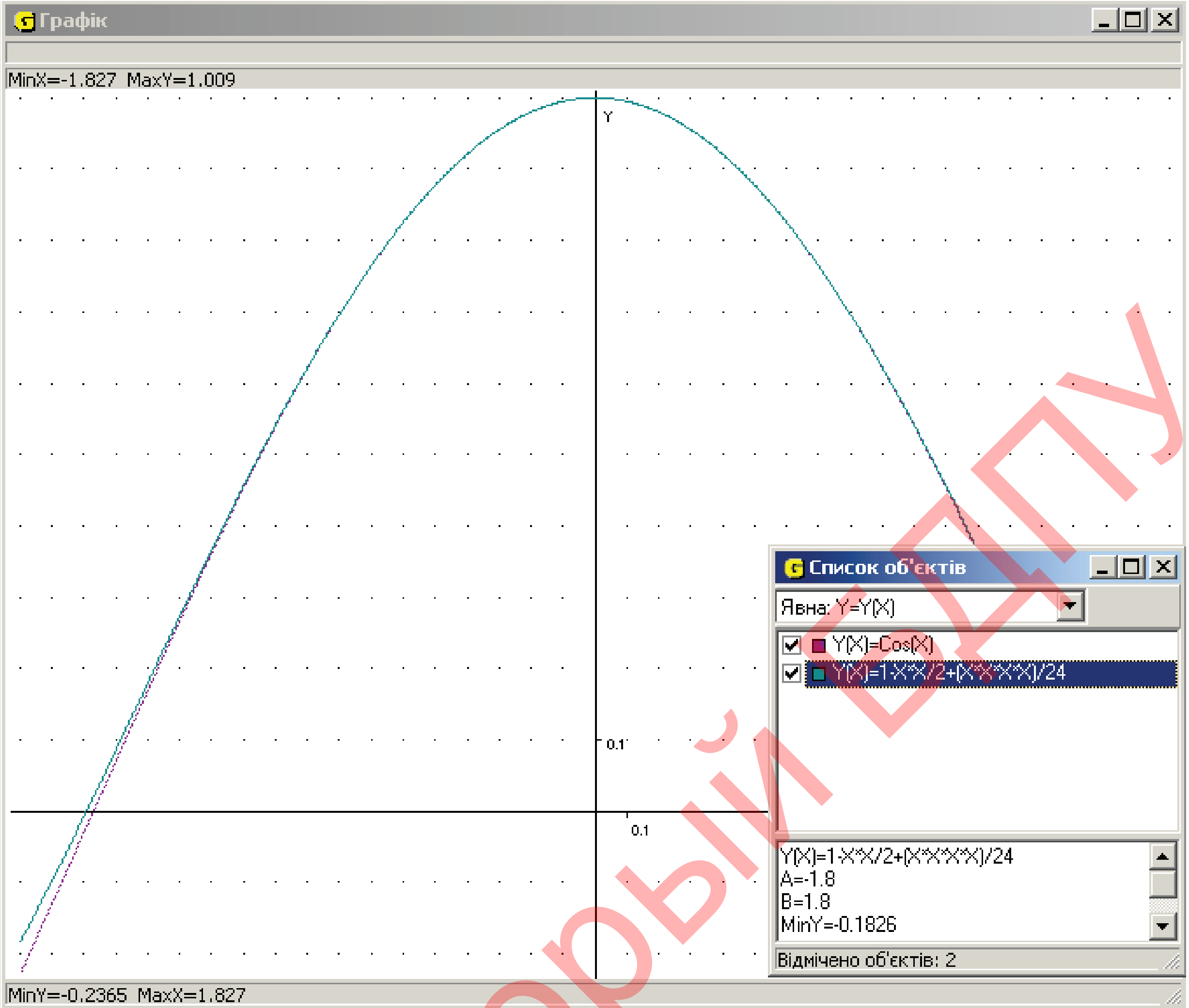

Рисунок 4 – Иллюстрация приближенной формулы $\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

Для изучения вопросов, связанных с вычислениями функций в фоновом режиме, необходима четкая организационная работа методических объединений учителей математики, физики, информатики. Исходя из того, что, согласно нашему подходу, основными целями при изучении тем, связанных с функциями, становятся цели, направленные на обучение реальным технологиям вычисления значений элементарных функций, учитель математики должен запланировать проведение занятий с демонстрацией различных вычислительных процедур, семинаров, посвященных обоснованиям вычислительных алгоритмов, а также лабораторных графических и вычислительных работ. Организация последних должна происходить в тесной координации с учителями информатики и учитывать уровень подготовленности учащихся в области компьютерных технологий.

Заметим, что на сегодняшний день реализация предложенной схемы возможна в классах профильного обучения математике и классах с углубленным изучением математики. Это обусловлено тремя причинами. Первая – наличие квалифицированных учителей, способных организовать обучение соответствующему материалу, вторая – сравнительно однородные по уровню подготовки коллективы учащихся. Последнее позволяет эффективно использовать технологии интерактивного обучения, в частности, при проведении лабораторных работ. И наконец, третью причину возможности реализации предложенной схемы мы усматриваем в наличии компьютерной базы и мультимедийных средств обучения в современной школе.

Заключение. Анализируя вышесказанное, *можно сделать выводы*, что обучение методам вычисления элементарных функций в фоновом режиме возможно в классах с углубленным изучением математики и классах математического профиля. Изучение этих методов не только способствует всестороннему математическому развитию учащихся, но и формированию устойчивых умений применения компьютерных технологий для решения практических задач, в том числе задач математического моделирования, а также дает представление о вычислительном эксперименте. Не менее важным является влияние такого обучения на развитие коммуникативной компетентности учащихся.

Содержание обучения математике в профильных математических классах и классах с углубленным изучением математики может быть скорректировано так, чтобы в нем уделялось достаточно внимания вопросам приближенного вычисления значений элементарных функций. Можно выделить два основных способа для обоснования приближенных вычислений значений элементарных функций: теоретическое обоснование и вычислительный эксперимент. Оптимальный синтез этих двух способов можно реализовать, используя многообразие организационных форм построения занятий и современных интерактивных методов обучения с использованием ИКТ.

Четкое выделение пятикомпонентной структуры знаний о вычислениях элементарных функций позволит учителю использовать соответствующий материал и для развития навыков вычислений, и для пропедевтики различных идей математического анализа, и для систематизации и обобщения пройденного материала по алгебре и началам анализа, и для мотивации изучения математики в целом.

В то же время в современных программах по математике не предусмотрены лабораторные графические и вычислительные работы, не созданы пособия, в которых систематически описывались бы такие работы. Для апробации таких пособий необходимо было бы проведение целенаправленного педагогического эксперимента. Эти задачи, как видим, ждут своего решения.

Литература

1. *Брадис, В.М.* Средства и способы элементарных вычислений / В.М. Брадис. – М.: АПН РСФСР, 1951. – 156 с.
2. *Баранова, И.В.* Приближенные вычисления в курсе математики восьмилетней школы / И.В. Баранова // Ученые записки ЛГПИ им. А.И. Герцена. – 1963. Т. 235. – С. 20–27.
3. *Васильев, М.Г.* О приближенных вычислениях в старших классах // Математика в школе. – 1953. – № 3. – С. 31–37.
4. *Аллабергенов, С.А.* Элементарные приближенные расчеты в среднем образовании: автореф. дис. … канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения (математика)» / С.А. Аллабергенов. – М., 1975. – 19 с.
5. *Бекаревич, А.Н.* Приближенные вычисления в средней школе / А.Н. Бекаревич. – Минск: Нар. асвета, 1979. – 254 с.
6. *Соколовский, И.Ф.* Вычислительная культура как основа методики введения начал математического анализа в средней школе: автореф. дис. … канд. пед. наук : спец. 13.00.02 «Теория и методика обучения (математика)» / И.Ф. Соколовский. – Л., 1998. – 17 с.
7. *Слєпкань, З.І.* До проблеми вивчення наближених обчислень в школі / З.І. Слєпкань // Математика в школі. – 2006. – № 10. – С. 8–10.
8. *Кліндухова, В.М.* Ретроспективний аналіз проблеми вивчення наближених обчислень в школі / В.М. Кліндухова // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнар. зб. наук. робіт. – Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2005. – Вип. 24. – С. 288–293.
9. *Кліндухова, В.М.* Про розвивальні можливості наближених обчислень / В.М. Кліндухова // Наука і сучасність: зб. наук. пр. НПУ ім. М.П. Драгоманова. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2006. – Т. 57. – С. 89–99.
10. *Сухіна, Л.А.* Теоретичні основи формування обчислювальних навичок / Л.А. Сухина // Дидактика математики: проблеми і дослідження: Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецьк: Фірма ТЕАН, 2006. – Вип. 25. – С. 55–59.
11. *Корінь, Г.О.* Вивчаємо наближені обчислення / Г.О. Корінь // Математика в школі. – 2003. – № 2. – С. 35–42.
12. *Lagrange, J.-B.* Complex Calculators in the Classroom: Theoretical and Practical Reflections on Teaching Pre-Calculus / Jean-Baptiste Lagrange // International Journal of Computers for Mathematical Learning. – 1999. – Vol. 4, № 1. – P. 51–81.
13. *Иванов, И.А.* Модель курса алгебры и начал анализа для классов естественнонаучного направления / И.А. Иванов // Известия Российского государственного педагогического университета имени А.И. Герцена. – СПб.: ЛГПУ, 2010. – № 136. – С.153–162.
14. *Мельников, О.И.* Современные аспекты обучения дискретной математике / О.И. Мельников. – Минск: БГУ, 2002. – 120 с.
15. *Мельников, О.И.* Этапы обучения математическому моделированию / О.И. Мельников, И.П. Кунцевич // Веснік Віцебскага дзяржаўнага ўніверсітэта. – 2011. – Т. 5. – № 65. – С. 90–95.
16. *Markstein, P.W.* Computation of elementary functions on the IBM RICS System / 6000 processor / P.W. Markstein // IBM Journal of Research and Development. – 1990. – № 1. – P. 111–119.
17. *Nave, R.* Implementation of transcendental functions on a numeric processor / R. Nave // Microprocessing and Microprogramming. – 1983. – Vol. 11. – P. 221–225.
18. *Березин, И.С.* Методы вычислений / И.С. Березин, Н.П. Жидков. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1962. – Т. 1. – 664 с.

19. *Демидович, Б.П.* Основы вычислительной математики / Б.П. Демидович, И.А. Марон. – М.: Наука, 1966. – 664 с.
20. *Мышкис, А.Д.* О формировании культуры построения и применения графиков функций / А.Д. Мышкис, П.Г. Сатьянов // Математика в школе. – 1985. – № 4. – С. 44–48.

Summary

The article examines approaches to teaching how to find the nearest values of elementary functions. The author substantiates the application of indicated approaches along with in-depth study of math at school as well as describes a quinary knowledge structure which is associated with problems of function value calculation including conceptual-historical, theoretical, algorithmic, technological and organizational components.

Поступила в редакцию 30.09.2013 г.