УДК 517.9

**Т.С. Мардвилко,**
*кандидат физико-математических наук,*
*доцент кафедры высшей математики БГУИР*

# ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ С ПРОИЗВОДНЫМИ ИЗ ПРОСТРАНСТВА БЕРГМАНА

Пусть $G\subset\mathbb{C}$ – область, отличная от $\mathbb{C}$; $\partial G$ – граница $G$; $\overline{G}=G\cap\partial G$ – замыкание области $G$; $\rho(z,\partial G)$ – расстояние от точки $z$ до границы $\partial G$. Введем пространство Бергмана $A_{p,\mu}=A_{p,\mu}(G)$, состоящее из аналитических в $G$ функций $f$, для которых конечна квазинорма

$$f_{A_{p,\mu}(G)}=\left(\int_G \rho(z,\partial G)^{p\mu-1}\left|f(z)\right|^p dm_2(z)\right)^{1/p}, p>0, \mu>0,$$

где $m_2$ – плоская мера Лебега в $\mathbb{C}$.

**Лемма 1.** Если $f\in A_{p,\mu}(G)$, то

$$f(z)\le c(p,s,\mu)\frac{\| f_{A_{p,\mu}}\|}{\left(\rho(z,\partial G)\right)^{\mu+\frac{1}{p}}}, z\in G.$$

***Доказательство*** (основано на субгармоничности функции $\left|f(z)\right|^p$ (см., например, утверждение 1.1 из [1], где эта теорема доказана для круга). Для фиксированного $z\in G$ положим $r=\dfrac{\rho(z,\partial G)}{2}$ и рассмотрим круг $D_r(z):=\{\xi:|z-\xi|\le r\}\subset G$. В силу субгармоничности функции $|f|^p$ справедливо равенство

$$|f(z)|^p\le\frac{1}{\pi r^2}\int_{D_r(z)}\left|f(\xi)\right|^p dm_2(\xi). \qquad (1)$$

Для $\xi\in D_r(z)$ имеем $r\le\rho(\xi,\partial G)\le 3r$, и следовательно,

$$r^{p\mu-1}\le 3\rho(\xi,\partial G)^{p\mu-1} \text{ и } r^{p\mu+1}=\left(\rho(z,\partial G)/2\right)^{p\mu+1}.$$

Используя последние соотношения и неравенство (1), получим

$$|f(z)|^p\le\frac{1}{\pi r^{p\mu+1}}\int_{D_r(z)}\left|f(\xi)\right|^p r^{p\mu-1}dm_2(\xi)\le$$

$$\le\frac{3}{\pi r^{p\mu+1}}\int_{D_r(z)}\left|f(\xi)\right|^p\rho(\xi,\partial G)^{p\mu-1}dm_2(\xi)=$$

$$=\frac{3\cdot 2^{p\mu+1}}{\pi\left(\rho(z,\partial G)\right)^{p\mu+1}}\int_G\left|f(\xi)\right|^p\rho(\xi,\partial G)^{p\mu-1}dm_2(\xi)=$$

$$=\frac{c_1(p,\mu)}{\rho(z,\partial G)^{p\mu+1}}\| f\|^p_{A_{p,\mu}}.$$

Лемма 1 доказана.

С использованием леммы 1 доказывается, в частности, полнота пространства $A_{p,\mu}(G)$. Если $G$ – жорданова область со спрямляемой границей, то, как следует из теоремы 1 работы [2], множество алгебраических многочленов всюду плотно в $A_{p,\mu}(G)$.

Через $E_p=E_p(G)$, $0<p<\infty$, обозначим пространство В.И. Смирнова. Согласно определению [3–4], аналитическая в односвязной области $G$ со спрямляемой жордановой границей $\partial G$ функция $f\in E_p$, если $\min\limits_{n\in\mathbb{N}}\| f\|_{L_p(\partial G_n)}<\infty$ хотя бы для одной последовательности $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ односвязных областей, удовлетворяющей условиям: а) границы $\partial G_n$ – спрямляемы; б) $G_n\subset G_{n+1}$ и $\overline{G}_n\subset G$ для всех $n$; в) $\bigcup_{n=1}^{\infty}G_n=G$. Здесь под $L_p(\partial G_n)$ мы понимаем пространство Лебега комплексных измеримых функций $f$ на $\partial G_n$ с классической квазинормой для этого пространства.

Далее будем считать, что $G$ – односвязная ограниченная область, граница которой $\partial G$ является кривой М.А. Лаврентьева. Именно, $\partial G$ спрямляемая кривая Жордана, и для любых точек $\xi_1,\xi_2\in\partial G$ выполняется неравенство

$$\left|\Gamma(\xi_1,\xi_2)\right|\le æ\left|\xi_1-\xi_2\right|, \qquad (2)$$

где $æ>1$ – некоторая постоянная, а $\left|\Gamma(\xi_1,\xi_2)\right|$ – длина наименьшей $\Gamma(\xi_1,\xi_2)$ из двух дуг $\partial G$ с концами $\xi_1$ и $\xi_2$.

Приведем необходимые нам сведения из теории квазиконформных отображений [5–6]. Будем считать, что $0\in G$. Через $^*$ будем обозначать квазиконформную инволюцию $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющую условиям: $\xi^{**}=\xi$ при всех $\xi\in\overline{\mathbb{C}}$, $0^*=\infty$, $\xi^*=\xi$ при $\xi\in\partial G$. Отображение $^*$ неединственное и его можно выбрать так, чтобы выполнялись условия:

(i) для каждой окрестности $U$ точки 0 отображение $\xi\mapsto\xi^*$ квазиконформно из $\mathbb{C}\setminus(U\cup U^*)$ в себя;

(ii) отображение $\xi\mapsto\xi^*$ непрерывно дифференцируемо в $\mathbb{C}\setminus(0\cup\partial G)$, и для всех $\xi\in\mathbb{C}\setminus(U\cup U^*\cup\partial G)$ выполняются соотношения

$$\left|\frac{\partial\xi^*}{\partial\xi}\right|\le c_1, c_2\le\left|\frac{\partial\xi^*}{\partial\overline{\xi}}\right|\le\frac{1}{c_2},$$

где $c_1$ и $c_2$ зависят лишь от $æ$ из (2) и окрестности $U$ точки 0.

Отметим, что для любого множества $D\subset\overline{\mathbb{C}}$ мы полагаем $D^*=\{\xi^*:\xi\in D\}$. В дальнейшем будем считать, что отображение $^*$ выбрано так, что условия (i), (ii) выполняются. Например, если $G$ – круг $|\xi|<1$, то $\xi^*=1/\overline{\xi}$.

Рассмотрим замкнутые кривые $\Gamma_s=\left\{\xi^*:|\xi|=\frac{1}{2^{2-s}}\rho(0,\partial G)\right\}$, $s=0,1$. Через $\Omega_0$, $\Omega_1$ обозначим соответственно замкнутые двусвязные области, заключенные между кривыми $\Gamma_0$ и $\Gamma_1$, $\Gamma_1$ и $\partial G$. Положим $\Omega=\Omega_0\cup\Omega_1$. Введем какую-либо гладкую функцию $\eta:\Omega\mapsto[0,1]$, удовлетворяющую условиям $\eta(\xi)=1$ при $\xi\in\Omega_1$ и $\eta(\xi)=0$ при $\xi\in\Gamma_0$. Существование такой функции легко обосновать, используя усреднения в смысле В.А. Стеклова. Тогда образ $\Omega$ под действием отображения $\theta(\xi)=\xi^*\cdot\eta(\xi)$ совпадает с $\overline{G}$, причем $\theta(\xi)=\xi^*$ при $\xi\in\Omega_1$.

**Теорема 1.** Пусть функция $f$ аналитична в $G$, $f^{(s)}\in A_{1,s}(G)$, $s\in\mathbb{N}$, и

$$T_{s-1}(z)=T_{s-1}(z,f)=\sum_{k=0}^{s-1}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}z^k.$$

Тогда для $z\in G$ имеет место равенство

$$f(z)=T_{s-1}(z)-\frac{1}{\pi(s-1)!}\int_\Omega f^{(s)}(\theta(\xi))(\xi-\theta(\xi))^{s-1}\frac{\partial\theta(\xi)}{\partial\overline{\xi}}\frac{dm_2(\xi)}{\xi-z}.$$

***Доказательство.*** Эта теорема доказывается во многом также, как и лемма 2.3 из [7]. Поэтому мы здесь приведем лишь ключевые моменты доказательства теоремы 1, за подробными выкладками отсылая читателя к работе [7].

В силу замкнутости всех алгебраических многочленов в пространстве Бергмана $A_{1,s}(G)$ и свойств отображения $\xi\mapsto\xi^*$ нам достаточно убедиться в справедливости равенства для полиномов. В частности, можем считать функцию $f$ аналитической на $\overline{G}$.

Введем функцию

$$g(\xi):=\begin{cases} f(\xi), & \text{при } \xi\in\overline{G},\\ \sum_{k=0}^{s-1}\frac{f^{(k)}(\theta(\xi))}{k!}(\xi-\theta(\xi))^k, & \text{при } \xi\in\overline{\Omega}\setminus\partial G.\end{cases}$$

Зафиксируем $z\in G$ и положим

$$F_z(\xi):=\frac{g(\xi)}{\xi-z}.$$

Ввиду свойств функции $f$ и отображения $^*$ мы можем применить формулу Грина в комплексной форме:

$$\int_{\partial\Omega}F_z(\xi)d\xi=2i\int_\Omega\frac{\partial F_z(\xi)}{\partial\overline{\xi}}dm_2(\xi).$$

Заметим, что

$$\frac{\partial F_z(\xi)}{\partial\overline{\xi}}=\frac{f^{(s)}(\theta(\xi))}{(s-1)!}\cdot\frac{(\xi-\theta(\xi))^{s-1}}{\xi-z}\frac{\partial\theta(\xi)}{\partial\overline{\xi}},$$

и вычислим интеграл

$$\int_{\partial\Omega}F_z(\xi)d\xi=-\int_{\partial G}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi+\int_{|\xi|=2r_0}\frac{g(\xi)}{\xi-z}d\xi=$$

$$=-2\pi i f(z)+2\pi i T_{s-1}(z).$$

Теорема 1 доказана.

Необходимость получения теоремы 1 возникла при доказательстве теоремы вложения пространства Бергмана–Соболева в пространство Смирнова.

**Теорема 2.** Пусть $p$, $q$ и $\mu$ – положительные числа такие, что

$$0<p<q<\infty,\ \mu+\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=:l\in\mathbb{N},$$

и $G$ – односвязная ограниченная область, граница которой является кривой М.А. Лаврентьева. Если функция $f$ аналитична в $G$ и $f^{(l)}\in A_{p,\mu}(G)$, то $f\in E_q(G)$. Кроме того, если $f(z_0)=f'(z_0)=\ldots=f^{(l-1)}(z_0)=0$, в некоторой точке $z_0\in G$, то

$$\|f\|_{E_q}\le c\|f^{(l)}\|_{A_{p,\mu}},\qquad(3)$$

где $c>0$ и не зависит от $f$.

Доказательство теоремы 2, а также приложение данной теоремы к доказательству неравенства, связывающего квазинормы рациональных функций относительно линейной и плоской мер, можно найти в работе [8].

***Выводы.*** Анализ доказательства теоремы 2 показывает, что если $z_0$ – центр наибольшего круга, вписанного в $\overline{G}$ (или один из таких центров, если их несколько), то можно считать, что постоянная в (3) зависит лишь от $p$, $q$, $\mu$ и постоянной $æ$ из (2).

Результаты, приведенные в данной статье, обсуждались в [9–10].

Литература

1. *Hedenmalm, H.* Theory of Bergman Spaces / H. Hedenmalm, B. Korenblum, K. Zhu. – Springer–Verlag: New York, Berlin, Heidelberg, 2000.
2. *Brennan, J.E.* Point Evolutions, Invariant Subspaces and Approximation in the Mean by Polinomials / J.E. Brennan // Journal of Functional Analysis. – 34. – 1979. – P. 407–420.
3. *Duren, P.* Theory of $H_p$ Spaces / P. Duren. – Academic Press: New York, 1980.
4. *Привалов, И.И.* Граничные свойства аналитических функций / И.И. Привалов. – М. – Л.: ГИТТЛ, 1950.
5. *Альфорс, А.В.* Лекции по квазиконформным отображениям / А.В. Альфорс. – М.: Мир, 1969.
6. *Белый, В.И.* Современные методы геометрической теории функций комплексного переменного в задачах аппроксимации / В.И. Белый // Алгебра и анализ. – 9. – 1997. – № 3. – С. 3–40.
7. *Пекарский, А.А.* Рациональные приближения функций с производными из пространства В.И. Смирнова / А.А. Пекарский // Алгебра и анализ. – 2001. – № 3. – С. 165–190.
8. *Мардвилко, Т.С.* Прямая и обратная теоремы рациональной аппроксимации в пространстве Бергмана / Т.С. Мардвилко, А.А. Пекарский // Математический сборник. – 2011. – Т. 202. – № 9. – С. 77–96. (переведена на английский язык: Sbornik: Mathematics, 2011. – Vol. 202, № 9. – p. 77–96)
9. *Мардвилко, Т.С.* Эктремальное неравенство для квазинорм рациональных функций относительно линейной и плоской мер / Т.С. Мардвилко // Материалы 16-й Саратовской зимней школы. – Саратов, 27 января – 3 февраля 2012 г. – Саратов, 2012. – С. 119–120.
10. *Мардвилко, Т.С.* Вложение пространства Бесова, аналитических в области функций, в пространство Смирнова / Т.С. Мардвилко, А.А. Пекарский // Тезисы докладов междунар. семинара AMADE 2012, Минск, 10–14 сентября 2012 г., Минск: Ин-т математики НАН Беларуси, 2012. – С. 47–48.

Summary

*The article provides the integral representation for the function with derivatives of the Bergman space. There is also the application of the received representation to the proof of the theorem of embedding the Bergman-Sobolev space into the Smirnov space.*

Поступила в редакцию 14.10.2013 г.