УДК 517.23

А.Ф. Касабуцкий,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики БГАТУ;
Н.Г. Серебрякова,
кандидат педагогических наук,
заведующий кафедрой прикладной информатики БГАТУ

О КИНЕМАТИЧЕСКОМ ПОДОБИИ НЕПРЕРЫВНЫХ МАТРИЦ С ПАРАМЕТРОМ-МНОЖИТЕЛЕМ

Введение. Через CM_n^*, где натуральное $n \geq 2$, обозначим класс непрерывных матричнозначных функций (называемых далее матрицами или $n \times n$-матрицами) $\mathrm{A}(\cdot) = (\mathrm{a}_{ij}(\cdot))_{i,j=1}^n : [0, +\infty) \to \mathrm{Mat}_n(\mathrm{R})$, где $\mathrm{Mat}_n(\mathrm{R})$ – алгебра вещественных $n \times n$-матриц со стандартной топологией. Матрица $L(\cdot) \in CM_n^*$ называется матрицей Ляпунова, если она невырождена при всех $t \geq 0$, дифференцируема на $[0, +\infty)$ и удовлетворяет неравенству

$$\sup_{t \geq 0} \left\{ \|L(t)\| + \|L^{-1}(t)\| + \|\dot{L}(t)\| \right\} < +\infty. \quad (1)$$

Матрицы $A(\cdot)$, $B(\cdot) \in CM_n^*$ называются кинематически подобными [1; 2, с. 243], если существует такая матрица Ляпунова $L(\cdot)$, что при всех $t \geq 0$ имеет место равенство

$$B(t) = L^{-1}(t)A(t)L(t) - L^{-1}(t)\dot{L}(t). \quad (2)$$

Очевидно, что отношение кинематического подобия является отношением эквивалентности на классе CM_n^*. Если $L(\cdot)$ – тождественно постоянная матрица, то равенство (2) приводит к обычному подобию матриц, которое в этом случае называют также [3, с. 93] статическим подобием. Понятие кинематического подобия введено А.М. Ляпуновым [1, с. 42]; термин «кинематическое подобие» предложен в [4]. Кинематическое подобие матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ обозначим как $A(\cdot) \overset{c}{\sim} B(\cdot)$; если же матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ не являются кинематически подобными, то это будем обозначать как $A(\cdot) \overset{c}{\nsim} B(\cdot)$. Очевидно, что статически подобные матрицы остаются статически подобными при умножении их на один и тот же скаляр. Верно ли это же утверждение для отношения кинематического подобия, то есть верно ли, что если $A(\cdot) \overset{c}{\sim} B(\cdot)$, то и $\mu A(\cdot) \overset{c}{\sim} \mu B(\cdot)$ для любого скаляра $\mu \in \mathrm{R}$? Ответ на этот вопрос, которому и посвящена статья, оказывается отрицательным: ниже строится пример кинематически подобных матриц $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ из M_n^*, таких, что, например, матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными.

Основная часть. Хорошо известно [1, с. 42; 2, с. 243; 3, с. 94], что понятие кинематического подобия матриц своим происхождением [1, с. 42] обязано линейным дифференциальным системам. Если в линейной дифференциальной системе

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathrm{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (3)$$

сделать линейную замену переменных $x = L(t)y$ с невырожденной при всех $t \geq 0$ и дифференцируемой на $[0, +\infty)$ матрицей $L(\cdot)$, то придем к линейной системе

$$\dot{y} = B(t)y, \quad y \in \mathrm{R}^n, \quad t \geq 0, \quad (4)$$

с матрицей $B(\cdot)$, задаваемой равенством (2). Если при этом $L(\cdot)$ – матрица Ляпунова, то такое преобразование называется преобразованием Ляпунова. Системы (3) и (4), матрицы коэффициентов которых принадлежат классу CM_n^*, называются приводимыми друг к другу, если существует преобразование Ляпунова, переводящее одну из них в другую. Приводимые друг к другу системы называют также [3, с. 94] кинематически подобными или [5; 6, с. 17] асимптотически эквивалентными [7, с. 95]. Другими словами, приводимость систем (3) и (4) друг к другу равносильна кинематическому подобию их матриц коэффициентов.

Далее считаем системы (3) и (4) произвольными линейными системами с матрицами $A(\cdot)$, $B(\cdot) \in CM_n^*$. Следующее хорошо известное (и легко доказываемое) утверждение связывает свойство кинематического подобия матриц со свойствами решений тех линейных дифференциальных систем, матрицами коэффициентов которых эти матрицы являются: матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ кинематически подобны, если и только если найдутся такие фундаментальные матрицы $X_A(\cdot)$ и $Y_B(\cdot)$ систем (3) и (4) соответственно, что матрица $X_A(\cdot)Y_B^{-1}(\cdot)$ является матрицей Ляпунова.

Из этого утверждения и определения матрицы Ляпунова вытекает следующее необходимое условие кинематического подобия матриц.

Лемма 1. Если матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ кинематически подобны, то найдутся фундаментальные матрицы $X_A(\cdot)$ и $Y_B(\cdot)$ систем (3) и (4) соответственно, такие, что каждое из отношений $\|X_A(t)\|/\|Y_B(t)\|$ и $\|Y_B(t)\|/\|X_A(t)\|$ ограничено сверху на полуоси $t \geq 0$.

Доказательство. Действительно, соотношение $A(\cdot)\overset{c}{\sim}B(\cdot)$, как сказано выше, равносильно тому, что при некоторых фундаментальных матрицах $X_A(\cdot)$ и $Y_B(\cdot)$ систем (3) и (4) матрица $L(t)=X_A(t)Y_B^{-1}(t)$, $t \geq 0$, является матрицей Ляпунова. Это равенство означает, что $X_A(t)=L(t)Y_B(t)$, и поэтому $\|X_A(t)\| \leq \|L(t)\|\|Y_B(t)\|$, а значит, $\|L(t)\| \geq \|X_A(t)\|/\|Y_B(t)\|$, откуда и неравенства (1) вытекает ограниченность сверху отношения $\|X_A(t)\|/\|Y_B(t)\|$, $t \geq 0$. Точно так же, поскольку $L^{-1}(t)=Y_B(t)X_A^{-1}(t)$, то $\|Y_B(t)\|/|X_A(t)| \leq \|L^{-1}(t)\|$, $t \geq 0$, а значит, вследствие неравенства (1) отношение $\|Y_B(t)\|/\|X_A(t)\|$, $t \geq 0$, ограничено сверху на полуоси $t \geq 0$. Лемма 1 доказана.

Этим необходимым условием мы воспользуемся ниже для доказательства того, что некоторые матрицы не являются кинематически подобными. Отметим, что утверждение леммы 1 необратимо: можно построить примеры систем (3) и (4), для которых каждое из отношений $\|X_A(t)\|/\|Y_B(t)\|$ и $\|Y_B(t)\|/\|X_A(t)\|$ ограничено сверху на полуоси $t \geq 0$ при любых фундаментальных матрицах $X_A(\cdot)$ и $Y_B(\cdot)$ этих систем, но матрицы коэффициентов n $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ которых не являются кинематически подобными. Например, легко убедиться, что для систем (3) и (4) с постоянными матрицами $A=\operatorname{diag}[2,1,-2]$ и $B=\operatorname{diag}[2,-1,-2]$ отношение норм любых двух их фундаментальных матриц ограничено сверху на полуоси, но эти системы не являются кинематически подобными, поскольку их множества показателей Ляпунова различны.

В доказательстве теоремы работы нам будет удобно рассматривать более широкий класс линейных дифференциальных систем – систем с кусочно-непрерывными коэффициентами (решением такой системы называется непрерывная дифференцируемая всюду, за исключением точек разрыва коэффициентов, вектор-функция, удовлетворяющая системе всюду, кроме, быть может, точек разрыва). Класс таких n-мерных систем обозначим через S_n^*, а через S_n – его подкласс, состоящий из систем с равномерно ограниченными на полуоси коэффициентами. Если система (3) принадлежит классу S_n и $\sup\limits_{t\geq 0}\|A(t)\| \leq a$, то для нормы любой ее фундаментальной матрицы $X(\cdot)$ имеют место при всех $t \geq 0$ оценки [2, с. 20]

$$\|X(t)\| \leq c\exp(at) \quad \text{и} \quad \|X^{-1}(t)\| \leq c\exp(at), \tag{5}$$

где c – некоторая постоянная (своя для каждой фундаментальной матрицы).

В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2. Пусть системы (3) и (4) принадлежат классу S_n, а $\sup\limits_{t\geq 0}\|A(t)\| \leq a$ и $\sup\limits_{t\geq 0}\|B(t)\| \leq b$. Тогда если несобственный интеграл $\int\limits_0^{+\infty}\|A(\tau)-B(\tau)\|\exp\{(a+b)\tau\}d\tau$ сходится, то для любых фундаментальных матриц $X(\cdot)$ системы (3) и $Y(\cdot)$ системы (4) найдутся положительные постоянные c_0 и c_1, для которых при всех $t \geq 0$ выполняются двойные неравенства:

$$c_0\|X(t)\| \leq \|Y(t)\| \leq c_1\|X(t)\|$$
и $\qquad (6)$
$$c_1^{-1}\|X^{-1}(t)\| \leq \|Y^{-1}(t)\| \leq c_0^{-1}\|X^{-1}(t)\|.$$

Доказательство. Обозначим $Q(t)=A(t)-B(t)$, $t \geq 0$.

Так как по формуле Лагранжа

$$Y(t)=X(t)(X^{-1}(0)Y(0)+\int\limits_0^t X^{-1}(\tau)Q(\tau)Y(\tau)\,d\tau), \quad t \geq 0, \tag{7}$$

и вследствие неравенств (5) $\|X^{-1}(t)\| \leq c\exp(at)$ и $\|Y(t)\| \leq c\exp(bt)$ при всех $t \geq 0$, где c – некоторая постоянная, то, обозначив через I значение несобственного интеграла

$$\int\limits_0^{+\infty}\|A(\tau)-B(\tau)\|\exp\{(a+b)\tau\}d\tau,$$

получаем: $\|Y(t)\| \leq \|X(t)\|(\|X^{-1}(0)Y(0)\|+c^2I)$,

что и доказывает правое из первого двойного неравенства в (6) ($c_1=\|X^{-1}(0)Y(0)\|+c^2I$). Поменяв в этих рассуждениях системы (3) и (4) местами (то есть рассматривая систему (3) как систему, являющуюся возмущенной системой для системы (4) – с возмущением $-Q(t)$, $t \ge 0$), получим левое из первого неравенства в (6).

Точно такими же рассуждениями, переписав тождество (7) в виде

$$X^{-1}(t) = Y^{-1}(t)\Big(X^{-1}(0)Y(0) + \int_0^t X^{-1}(\tau)Q(\tau)Y(\tau)\,d\tau\Big),\quad t \ge 0,$$

получается второе из двойных неравенств в (6). Лемма 2 доказана.

Доказательство приводимой ниже теоремы основано на идее, впервые примененной В.М. Миллионщиковым [9] в доказательстве им несимметричности отношения почти приводимости линейных дифференциальных систем и впоследствии неоднократно использовавшейся многими авторами в различных ситуациях (см., напр., [10–14]). Далее для определенности считаем норму вектора в R^n евклидовой, а норму матрицы – спектральной.

Теорема. Существуют непрерывные ограниченные кинематически подобные матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, такие, что матрицы $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными, то есть $A(\cdot)\overset{c}{\sim}B(\cdot)$, но $2^{-1}A(\cdot)\overset{c}{\not\sim}2^{-1}B(\cdot)$.

Доказательство. Построим вначале кусочно-непрерывные матрицы $C(\cdot)$ и $D(\cdot)$, такие, что у систем

$$\dot{x} = C(t)x,\ x \in \mathrm{R}^2, \quad \text{и} \quad \dot{y} = D(t)y,\ y \in \mathrm{R}^2,\quad t \ge 0, \tag{8}$$

найдутся их фундаментальные матрицы $X_C(\cdot)$ и $Y_D(\cdot)$ соответственно, для которых обе матрицы $L(t) \overset{\mathrm{def}}{=} X_C(t)Y_D^{-1}(t)$ и $L^{-1}(t)$, $t \ge 0$, являются ограниченными на полуоси, но для систем

$$\dot{x} = 2^{-1}C(t)x,\ x \in \mathrm{R}^2, \quad \text{и} \quad \dot{y} = 2^{-1}D(t)y,\ y \in \mathrm{R}^2,\quad t \ge 0, \tag{9}$$

таких их фундаментальных матриц не существует.

Зададим элементы матриц $C(\cdot) = \big(c_{ij}(\cdot)\big)_{i,j=1}^2$ и $D(\cdot) = \big(d_{ij}(\cdot)\big)_{i,j=1}^2$ равенствами:

$$c_{ii}(t) \equiv d_{ii}(t) \equiv \begin{cases} (-1)^{i+k} & t \in [2k-2, 2k-1), \\ 0 & t \in [2k-1, 2k), \end{cases}$$
$$c_{ij}(t) \equiv 2d_{ij}(t) \equiv \begin{cases} 0 & t \in [2k-2, 2k-1), \\ (-1)^j 2\pi & t \in [2k-1, 2k),\ i \ne j, \end{cases} \tag{10}$$

где $i, j = 1, 2$, $k \in \mathrm{N}$. Найдем матрицы Коши $X(\cdot,\cdot)$ и $Y(\cdot,\cdot)$, соответственно, первой и второй систем (8) с таким образом определенными матрицами $C(\cdot)$ и $D(\cdot)$ коэффициентов. Поскольку на каждом единичном отрезке, концы которого – целые числа, матрицы $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$ являются постоянными, то непосредственным интегрированием из определений (10) легко получаем, что для любого $k \in \mathrm{N}$ имеют место равенства:

$$X(2k-1, 2k-2) = Y(2k-1, 2k-2) =$$
$$= \mathrm{diag}\,[\exp(-1)^{k+1}, \exp(-1)^k],$$
$$X(2k, 2k-1) = E_2,\quad Y(2k, 2k-1) = -E_2,$$

где $E_2 = \mathrm{diag}\,[1, 1]$.

Поэтому $X(4k, 4(k-1)) = Y(4k, 4(k-1)) = E_2$, $k \in \mathrm{N}$, а значит,

$$X(4k, 0) = X(0, 4k) = E_2$$
$$\text{и} \tag{11}$$
$$Y(4k, 0) = Y(0, 4k) = E_2,\ k \in \mathrm{N}.$$

Для $t \ge 0$ через q_t обозначим наибольшее целое, кратное 4 и не превосходящее t. Тогда вследствие первого из равенств (11) и неравенств (5), учитывая неравенства $\sup\limits_{t \ge 0}\|C(t)\| \le 1$ и $0 \le t - q_t \le 4$, получаем при всех $t \ge 0$ оценки

$$\|X(t,0)\| \le \|X(t,q_t)\|\|X(q_t,0)\| = \|X(t,q_t)\| \le e^4,$$
$$\|X^{-1}(t,0)\| = \|X(0,t)\| \le \|X(0,q_t)\|\|X(q_t,t)\| = \|X^{-1}(t,q_t)\| \le e^4.$$

Точно так же получим, что $\|Y(t,0)\| \le e^4$ и $\|Y^{-1}(t,0)\| \le e^4$ для любых $t \ge 0$. Следовательно, если взять фундаментальные матрицы $X_C(\cdot)$ и $Y_D(\cdot)$ систем (8) равными $X(t,0)$ и $Y(t,0)$ соответственно, то получаем, что каждая из величин $\|X_C(t)\|$, $\|X_C^{-1}(t)\|$ и $\|Y_D(t)\|$, $\|Y_D^{-1}(t)\|$ при любом $t \ge 0$ не превосходит e^4. Поэтому обе матрицы $L(t) \overset{\mathrm{def}}{=} X_C(t)Y_D^{-1}(t)$ и $L^{-1}(t)$, $t \ge 0$, являются ограниченными на полуоси.

Докажем теперь, что, какие бы ни взять фундаментальные матрицы $X_{C/2}(\cdot)$ и $Y_{D/2}(\cdot)$ первой и второй из систем (9) соответственно, матрица $Y_{D/2}(\cdot)X_{C/2}^{-1}(t)$, $t \ge 0$, не будет ограничена на полуоси.

Все решения первой из систем (9) ограничены на полуоси (доказательство точно такое же, как и выше); в частности, для любой фундаментальной матрицы $X_{C/2}(\cdot)$ первой из систем (9) найдется такая постоянная c (своя для каждой матрицы), что $\sup\limits_{t \ge 0}\|X_{C/2}(t)\| \le c$. Покажем, что вторая из систем (9) имеет неограниченное решение. Действительно, непосредственным интегрированием для матрицы Коши $Y_1(\cdot,\cdot)$ этой системы получаем в силу определения (10) равенства: матрица $Y_1(2k-1,2k-2)=\mathrm{diag}[\exp((-1)^{k+1}2^{-1}),exp((-1)^{k}2^{-1})]$, $k\in\mathrm{N}$, а матрица $Y_1(2k,2k-1)$, $k\in\mathrm{N}$, – это матрица поворота на угол $\pi/2$ (по ходу часовой стрелки, если считать систему координат Oy_1y_2 правой). Поэтому решение $y(\cdot)$ этой системы с начальным вектором $y(0,0)=(1,0)^{\mathrm{T}}$ при $t=4k$ имеет норму $\|y(4k)\|=\exp k$, $\mathrm{k}\in\mathrm{N}$, а поэтому норма любой фундаментальной матрицы $Y_{D/2}(\cdot)$ второй из систем (9) неограничена на полуоси. Это и означает неограниченность матрицы $Y_{D/2}(t)X^{-1}_{C/2}(t)$, $t\ge 0$, поскольку

$$\|Y_{D/2}(t)\| = \|Y_{D/2}(t)X^{-1}_{C/2}(t)X_{C/2}(t)\| \le$$
$$\le \|Y_{D/2}(t)X^{-1}_{C/2}(t)\|\|X_{C/2}(t)\| \le c\|Y_{D/2}(t)X^{-1}_{C/2}(t)\|,$$

и если бы правая часть этого неравенства была ограниченной, то являлась бы ограниченной и его левая часть, что, как показано, не так.

Для завершения доказательства остается перейти от кусочно-непрерывных матриц $C(\cdot)$ и $D(\cdot)$ к непрерывным матрицам, обладающим теми же свойствами. Для этого воспользуемся леммой 2.

Покроем каждую точку $t=m$, $m\in\mathrm{N}$, интервалом δ_m длины $|\delta_m|=2^{-m}\exp(-m^2)$, $m\in\mathrm{N}$, и на каждом интервале δ_m изменим матрицы $C(\cdot)$ и $D(\cdot)$ так, чтобы получившиеся матрицы, которые мы обозначим через $A(\cdot)$ и $\mathrm{B}(\cdot)$ соответственно, были непрерывны и ограничены на $[0,+\infty)$. Пусть $a=\sup\limits_{t\ge 0}\max\{\|A(t)\|,\|B(t)\|\}$. Тогда, поскольку матрицы $A(t)-C(t)$ и $B(t)-D(t)$, $t\ge 0$, тождественно нулевые вне интервалов δ_m, $m\in\mathrm{N}$, очевидно, в силу выбора длин $|\delta_m|$, $m\in\mathrm{N}$, что каждый из интегралов

$$\int\limits_0^{+\infty}\|A(\tau)-C(\tau)\|\exp\{(a+1)\tau\}d\tau$$

и

$$\int\limits_0^{+\infty}\|B(\tau)-D(\tau)\|\exp\{(a+1)\tau\}d\tau$$

сходится. Из леммы 2, доказанных выше утверждений для фундаментальных матриц систем (9) и леммы 1 очевидно вытекает, что линейные системы с матрицами коэффициентов $2^{-1}A(\cdot)$ и $2^{-1}B(\cdot)$ не являются кинематически подобными. Из леммы 2 и доказанных выше утверждений для фундаментальных матриц систем (8) вытекает, что если $X_A(\cdot)$ и $Y_B(\cdot)$ – какие-либо фундаментальные матрицы линейных систем с матрицами коэффициентов $A(\cdot)$ и $B(\cdot)$, то каждая из норм $\|X_A(t)\|$, $\|X_A^{-1}(t)\|$ и $\|Y_B(t)\|$, $\|Y_B^{-1}(t)\|$ ограничена сверху на полуоси. Значит, тогда и матрицы $L(t)=X_A(t)Y_B^{-1}(t)$ и $L^{-1}(t)$, $t\ge 0$, ограничены на полуоси. Ограниченность нормы производной $\dot{L}(t)$ вытекает из легко проверяемого тождества $\dot{L}(t)=A(t)L(t)-L(t)B(t)$, $t\ge 0$, и ограниченности на полуоси всех матриц в его правой части. Поэтому $L(\cdot)$ – матрица Ляпунова. Теорема доказана.

Литература

1. *Ляпунов, А.М.* Собр. соч. В 6 т. / А.М. Ляпунов. – М. – Л.: Изд-во АН СССР, 1956. – Т. 2.
2. *Былов, Б.Ф.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б.Ф. Былов, Р.Э. Виноград, Д.М. Гробман. – М.: Наука, 1966.
3. *Чезари, Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений / Л. Чезари. – М.: Мир, 1964.
4. *Markus, L.* Continuous matrices and the stability of differential systems // Math. Zeitschr. Markus L. 1955. – Bd 62, Hf 1. – S. 310–319.
5. *Богданов, Ю.С.* Об асимптотически эквивалентных линейных дифференциальных системах / Ю.С. Богданов // Дифференциальные уравнения. – 1965. – Т. 1. – № 6.
6. *Мазаник, С.А.* Преобразования Ляпунова линейных дифференциальных систем / С.А. Мазаник. – Минск: БГУ, 2008.
7. *Изобов, Н.А.* Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.А. Изобов // Итоги науки и техники. Мат. анализ. – М.: ВИНИТИ, 1974. – Т. 12. С. 71–146.
8. *Изобов, Н.А.* Об асимптотической эквивалентности линейных систем при экспоненциально убывающих возмущениях / Н.А. Изобов, С.А, Мазаник // Дифференциальные уравнения. – 2006. – Т. 42 – № 2. – С. 168–173.
9. *Миллионщиков, В.М.* О неустойчивости особых показателей и о несимметричности отношения почти приводимости линейных систем дифференциальных уравнений / В.М. Миллионщиков // Дифференциальные уравнения. – 1969. Т. 5. – № 4. – С. 749–750.
10. *Рахимбердиев, М.И.* О бэровском классе показателей Ляпунова / М.И. Рахимбердиев // Математические заметки. – 1982. – Т. 31. – Вып. 6. – С. 925–931.
11. *Изобов, Н.А.* О неправильных по Ляпунову линейных системах с параметром при производной / Н.А. Изобов, Е.К. Макаров // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 11. – С. 1870–1880.
12. *Макаров, Е.К.* О множествах неправильности линейных систем с параметром при производной / Е.К. Макаров // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24. – № 12. – С. 2091–2098.

13. *Барабанов, Е.А.* Множества правильности и устойчивости однопараметрических семейств линейных дифференциальных систем / Е.А. Барабанов, А.Ф. Касабуцкий // Весцi НАН Беларусi. Серыя фiз.-мат. навук. – 2009. – № 4. – С. 67–75.
14. *Касабуцкий А.Ф.* Множества устойчивости и экспоненциальной устойчивости однопараметрических семейств линейных дифференциальных систем со слабой зависимостью от параметра / А.Ф. Касабуцкий, Н.Г. Серебрякова // Весцi БДПУ. – 2012. Серия 3. – № 4. – С. 28–32.

Summary

With regard to the ratio of kinematic similarity it is shown that if $A(\cdot)\sim B(\cdot)$, *then* $\mu A(\cdot)\overset{c}{\not\sim}\mu B(\cdot)$ *for any scalar of the type* $\mu\in\mathrm{R}$. *The authors provide an example of kinematically similar matrices* $A(\cdot)$ *and* $B(\cdot)$ *of* M_n^*, *so that matrices* $2^{-1}A(\cdot)$ *and* $2^{-1}B(\cdot)$ *are not kinematically similar.*

Поступила в редакцию 18.09.2013 г.