УДК 517.5

В.И. Мататов,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений и системного анализа БГУ;
С.В. Пенталь,
ассистент кафедры прикладной математики и экономической кибернетики БГЭУ;
Ю.В. Цвирбут,
студент IV курса ММФ БГУ

О ФУНКЦИЯХ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ АВТОНОМНОЙ СИСТЕМОЙ ГАМИЛЬТОНА ШЕСТОГО ПОРЯДКА

Введение. Настоящая статья посвящена изучению подвижных особых точек решений автономной системы Гамильтона шестого порядка [1–3]. Рассмотрим гамильтониан вида $H = F(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$, где F – голоморфная функция своих аргументов, причем

$$\varphi_1 = \frac{x_1^2}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1},$$

$$\varphi_2 = \frac{x_2 y_2}{\beta_1 x_2 + \beta_2 y_2},$$

$$\varphi_3 = \frac{y_3^2}{\gamma_1 x_3 + \gamma_2 y_3}.$$

Соответствующая система Гамильтона запишется так:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_1} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{-\alpha_2 x_1^2}{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1)^2} & (1.1) \\ \dfrac{dx_2}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_2} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2} \cdot \dfrac{\beta_1 x_2^2}{(\beta_1 x_2 + \beta_2 y_2)^2} & (1.2) \\ \dfrac{dx_3}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial y_3} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_3} \cdot \dfrac{2\gamma_1 x_3 y_3 + \gamma_2 y_3^2}{(\gamma_1 x_3 + \gamma_2 y_3)^2} & (1.3) \\ \dfrac{dy_1}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_1} \cdot \dfrac{\alpha_1 x_1^2 + 2\alpha_2 x_1 y_1}{(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1)^2} & (1.4) \\ \dfrac{dy_2}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = -\dfrac{\partial F}{\partial \varphi_2} \cdot \dfrac{\beta_2 y_2^2}{(\beta_1 x_2 + \beta_2 y_2)^2} & (1.5) \\ \dfrac{dy_3}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_3} = \dfrac{\partial F}{\partial \varphi_3} \cdot \dfrac{\gamma_1 y_3^2}{(\gamma_1 x_3 + \gamma_2 y_3)^2}, & (1.6) \end{cases}$$

где независимая переменная

$t \in \mathbb{C}, x_1, \dots, y_3 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Целью статьи является исследование системы (1.1)–(1.6) на предмет характера подвижных особых точек ее решений [4–5].

В статьях [6–7] рассмотрены неавтономные системы второго порядка с квадратичными нелинейностями. Авторами получены условия однозначности подвижных особых точек решений указанных выше систем.

Работа [8] посвящена исследованию подвижных особых точек решений автономной системы Гамильтона двенадцатого порядка в случае, когда промежуточные аргументы гамильтониана имеют вид:

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1 + \alpha_0}{\beta_1 x_1 + \beta_2 y_1 + \beta_0}, \quad \varphi_2 = \frac{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 y_1 + \gamma_0}{\delta_1 x_1 + \delta_2 y_1 + \delta_0},$$

$$\varphi_3 = \frac{\varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 y_1 + \varepsilon_0}{\eta_1 x_1 + \eta_2 y_1 + \eta_0},$$

$$\varphi_4 = \alpha x_4 + \beta y_4, \quad \varphi_5 = \gamma x_5 + \delta y_5, \quad \varphi_6 = \varepsilon x_6 + \eta y_6.$$

Основная часть. Из уравнений (1.2) и (1.5) будем иметь

$$\frac{dx_2}{dy_2} = -\frac{\beta_1 x_2^2}{\beta_2 y_2^2}.$$

Отсюда получим один из первых интегралов системы (1.1)–(1.6), который записывается следующим образом

$$\varphi_2 = \frac{x_2 y_2}{\beta_1 x_2 + \beta_2 y_2} = C_2 \ (C_2 - \text{произвольная постоянная}). \qquad (2)$$

Аналогичным образом получим еще два первых интеграла исходной системы:

$$\varphi_1 = \frac{x_1^2}{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 y_1} = C_1, \qquad (3)$$

$$\varphi_3 = \frac{y_3^2}{\gamma_1 x_3 + \gamma_2 y_3} = C_3, \qquad (4)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные.

Из соотношения (2)

$$y_2 = \frac{C_2 \beta_1 x_2}{x_2 - C_2 \beta_2}. \qquad (5)$$

Используя равенство (5), дифференциальное уравнение (1.2) запишется так:

$$\frac{dx_2}{dt} = \Phi_2(C_1, C_2, C_3) \cdot \frac{\beta_1 x_2^2}{\left(\beta_1 x_2 + \beta_2 \dfrac{C_2 \beta_1 x_2}{x_2 - C_2 \beta_2}\right)^2},$$

где $\Phi_2(C_1,C_2,C_3)=\left.\frac{\partial F}{\partial\varphi_2}\right|_{\varphi_1=C_1,\ \varphi_2=C_2,\ \varphi_3=C_3}$.

После упрощения дифференциальное уравнение (1.2) принимает вид:

$$\frac{dx_2}{dt}=\Phi_2(C_1,C_2,C_3)\frac{(x_2-C_2\beta_2}{\beta_1x_2^2}. \qquad (6)$$

Разделяя переменные, уравнение (6) можно записать следующим образом:

$$\int\left(1+\frac{C_2\beta_2}{x_2-C_2\beta_2}\right)^2dx_2=\frac{1}{\beta_1}\Phi_2(C_1,C_2,C_3)(t-C_4),$$

где C_4 – произвольная постоянная. Отсюда, используя разложение

$$1+\frac{C_2\beta_2}{x_2-C_2\beta_2}=-\frac{x_2}{C_2\beta_2}-\frac{x_2^2}{C_2^2\beta_2^2}-\ldots\left(\left|\frac{x_2}{C_2\beta_2}\right|<1\right),$$

будем иметь

$$\frac{x_2^3}{3C_2^2\beta_2^2}+\frac{x_2^4}{2C_2^3\beta_2^3}+\ldots=\frac{1}{\beta_1}\text{Ц}_2(C_1,C_2,C_3)(t-C_4).$$

Обращая соответствующий степенной ряд [4], получим равенство

$$x_2=a_1(t-C_4)^{\frac{1}{3}}+\ldots, \qquad (7)$$

где $a_1=\sqrt[3]{\frac{3C_2^2\beta_2^2}{\beta_1}\Phi_2(C_1,C_2,C_3)}$, причем ряд сходится в кольце $0<|t-C_4|<R$.

Из формул (7) и (5) вытекает, что зависимые переменные $x_2=x_2(t)$ и $y_2=y_2(t)$ имеют в $\mathbb{C}$ подвижные точки ветвления третьего порядка.

Используя первый интеграл (3), дифференциальное уравнение (1.1) можно записать следующим образом:

$$\frac{dx_1}{dt}=-\Phi_1(C_1,C_2,C_3)\frac{\alpha_2C_1^2}{x_1^2},$$

где $\Phi_1(C_1,C_2,C_3)=\left.\frac{\partial F}{\partial\varphi_1}\right|_{\varphi_1=C_1,\ \varphi_2=C_2,\ \varphi_3=C_3}$.

Отсюда

$$x_1=\sqrt[3]{-3\Phi_1(C_1,C_2,C_3)\alpha_2C_1^2(t-C_5)}, \qquad (8)$$

где C_5 – произвольная постоянная.

Из формул (8) и (3) вытекает, что зависимые переменные $x_1=x_1(t)$ и $y_1=y_1(t)$ имеют в $\mathbb{C}$ подвижные точки ветвления третьего порядка.

Аналогичным образом устанавливается, что зависимые переменные $x_3=x_3(t)$ и $y_3=y_3(t)$ имеют в $\mathbb{C}$ подвижные точки ветвления третьего порядка. Для этого используется первый интеграл (4), а также дифференциальное уравнение (1.6). Таким образом, справедливо утверждение.

Теорема. Зависимые переменные $x_1=x_1(t)$, $y_1=y_1(t), x_2=x_2(t), y_2=y_2(t), x_3=x_3(t), y_3=y_3(t)$ автономной системы Гамильтона (1.1)–(1.6) имеют в $\mathbb{C}$ подвижные точки ветвления третьего порядка.

Замечание. Очевидно, что полученная теорема имеет место и для аналогичных автономных систем Гамильтона 2-го и 4-го порядка.

Промежуточные аргументы гамильтониана в этих случаях таковы:

$$\varphi_1=\frac{x_1^2}{\alpha_1x_1+\alpha_2y_1},\quad \varphi_2=\frac{x_2y_2}{\beta_1x_2+\beta_2y_2}.$$

Приведем пример автономной системы Гамильтона 2-го порядка, решения которой имеют подвижные точки ветвления третьего порядка.

Пусть гамильтониан некоторой системы $H=\sin\varphi=\sin\frac{xy}{x+y}$. Соответствующая система Гамильтона запишется так:

$$\begin{cases}\dot{x}=\cos\varphi\dfrac{x^2}{(x+y)^2} & (9.1)\\[2ex] \dot{y}=-\cos\varphi\dfrac{y^2}{(x+y)^2}. & (9.2)\end{cases}$$

Система (9.1)–(9.2) имеет первый интеграл вида

$$\varphi=\frac{xy}{x+y}=C_1, \qquad (10)$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Из равенства (10)

$$y=\frac{C_1x}{x-C_1}. \qquad (11)$$

Используя равенство (11), дифференциальное уравнение (9.1) запишется следующим образом:

$$\frac{x^2dx}{(x-C_1)^2}=(\cos C_1)dt. \qquad (12)$$

Откуда, используя разложение

$$\left(\frac{x}{x-C_1}\right)^2=\frac{x^2}{C_1^2}+\frac{2x^3}{C_1^3}+\ldots\left(\left|\frac{x}{C_1}\right|<1\right),$$

получим равенство

$$\frac{x^3}{3C_1^2}+\frac{x^4}{2C_1^3}+\ldots=(\cos C_1)(t-C_2),$$

где C_2 – произвольная постоянная.

Обращая соответствующий степенной ряд [4], будем иметь

$$x=\sqrt[3]{-3C_1^2\cos C_1}(t-C_2)^{\frac{1}{3}}+\ldots, \qquad (13)$$

где ряд сходится в кольце $0<|t-C_2|<R$. На основании формулы (13) заключаем, что зависимая переменная $x=x(t)$ имеет в $\mathbb{C}$ подвижные точки ветвления третьего порядка. Поскольку $y=\frac{C_1x}{x-C_1}=-\frac{x}{C_1}-\frac{x^2}{C_1^2}-\dots$ (см. (11)), то зависимая переменная $y=y(t)$ также имеет в $\mathbb{C}$ подвижные точки ветвления третьего порядка.

Заключение. В статье рассмотрена автономная система Гамильтона шестого порядка

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1},$$
$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2},$$
$$\frac{dx_3}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_3}\cdot\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_3},$$
$$\frac{dy_1}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1},$$
$$\frac{dy_2}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2},$$
$$\frac{dy_3}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_3}\cdot\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3},$$

где $F=F(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$ – голоморфная функция своих аргументов, причем

$$\varphi_1=\frac{x_1^2}{\alpha_1x_1+\alpha_2y_1},\ \varphi_2=\frac{x_2y_2}{\beta_1x_2+\beta_2y_2},\ \varphi_3=\frac{y_3^2}{\gamma_1x_3+\gamma_2y_3}.$$

Доказано, что зависимые переменные $x_1=x_1(t),\ y_1=y_1(t),\ x_2=x_2(t),$ $y_2=y_2(t), x_3=x_3(t),\ y_3=y_3(t)$ в плоскости $\mathbb{C}$ имеют подвижные точки ветвления третьего порядка. Других подвижных особых точек решения указанной выше системы не имеют.

Литература

1. *Айзерман, М.А.* Классическая механика / М.А. Айзерман. – М.: Наука, 1974. – 367 с.
2. *Мышкис, А.Д.* Математика. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – М.: Наука, 1971. – 632 с.
3. *Ольховский, И.И.* Курс теоретической механики для физиков / И.И. Ольховский. – М.: Наука, 1970. – 447 с.
4. *Голубев, В.В.* Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений / В.В. Голубев. – М.; Л.:ГИТТЛ, 1950. – 436 с.
5. *Еругин, Н.П.* Проблема Римана / Н.П. Еругин. – Минск: Наука и техника, 1982. – 336 с.
6. *Яблонский, А.И.* Об одной системе дифференциальных уравнений без подвижных критических особых точек / А.И. Яблонский // Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2. – № 6. – С. 752–762.
7. *Мататов, В.И.* К вопросу о подвижных особенностях неавтономной системы двух дифференциальных уравнений с квадратичными нелинейностями / В.И. Мататов, О.Н. Тишкевич // Вестник БГУ. – Серия 1. – 2003. – № 6. – С. 108–109.
8. *Мататов, В.И.* О подвижных особых точках решений автономной системы Гамильтона двенадцатого порядка / В.И. Мататов, С.В. Пенталь, Н.В. Реут // Весці БДПУ. – Сер. 3. – 2011. – № 4. – С. 18–23.

Summary

The article considers Hamilton's autonomus 6-th order system of the form

$$\frac{dx_1}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial y_1},$$
$$\frac{dx_2}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial y_2},$$
$$\frac{dx_3}{dt}=\frac{\partial F}{\partial \varphi_3}\cdot\frac{\partial \varphi_3}{\partial y_3},$$
$$\frac{dy_1}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_1}\cdot\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1},$$
$$\frac{dy_2}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_2}\cdot\frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2},$$
$$\frac{dy_3}{dt}=-\frac{\partial F}{\partial \varphi_3}\cdot\frac{\partial \varphi_3}{\partial x_3},$$

where $F=F(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$, F *is a holomorphic function of its arguments, and*

$$\varphi_1=\frac{x_1^2}{\alpha_1x_1+\alpha_2y_1},\ \varphi_2=\frac{x_2y_2}{\beta_1x_2+\beta_2y_2},\ \varphi_3=\frac{y_3^2}{\gamma_1x_3+\gamma_2y_3}.$$

It has been proved that dependent variables $x_1=x_1(t),\ y_1=y_1(t),\ x_2=x_2(t),$ $y_2=y_2(t), x_3=x_3(t),\ y_3=y_3(t)$ *in the* $\mathbb{C}$ *plane have variable 3-rd order branch points. Other variable special points in the above mentioned system don't exist.*

Поступила в редакцию 24.01.2013 г.