УДК 531.1

В.В. Балащенко,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры геометрии, топологии
и методики преподавания математики БГУ

КАНОНИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НА ЕСТЕСТВЕННО РЕДУКТИВНЫХ Ф-ПРОСТРАНСТВАХ ПОРЯДКОВ 5 И 7

Введение. Аффинорной структурой на гладком многообразии M называется тензорное поле типа (1, 1), реализованное в виде поля эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении к данному многообразию. Наличие таких структур несет существенную информацию об исходном многообразии. К числу классических аффинорных структур относятся структуры почти произведения P ($P^2 = 1$), почти комплексные структуры J ($J^2 = -1$), обобщающие их f-структуры К. Яно ($f^3 + f = 0$) и некоторые другие. В частности, структуры P порождают на многообразии M пару взаимно дополнительных распределений. Изучение свойств таких распределений – одна из важных задач дифференциальной геометрии и топологии многообразий.

Инвариантные распределения на однородных многообразиях вызывают особый интерес в силу возможности использования сильного аппарата теории групп Ли и алгебр Ли. Важным классом однородных многообразий являются *однородные Ф-пространства G/H порядка k* [1–2], порождаемые автоморфизмами Ф порядка k ($\Phi^k = id$) группы Ли G (*однородные k-симметрические пространства* [3]). Такие пространства обладают значительным запасом *канонических* аффинорных структур классических типов [4], в частности, канонических структур P, которые порождают на G/H семейство канонических инвариантных распределений.

В данной работе для однородных Ф-пространств порядков 5 и 7, наделенных инвариантной естественно редуктивной римановой метрикой, охарактеризованы все канонические распределения, порождаемые каноническими структурами почти произведения на этих пространствах. Более точно, для всех таких распределений указаны алгебраические критерии их принадлежности типу ***TGF*** (totally geodesic foliation) – вполне геодезическое слоение. Тем самым получено полное описание всех канонических структур почти произведения на этих пространствах с точки зрения классификации А. Навейры римановых структур почти произведения [5]. Заметим, что эта задача для однородных Ф-пространств порядков 4 и 6 была решена ранее в работах [6] и [7] соответственно. Интересные отличия тех результатов от полученных в данной работе приведены в конце статьи.

Инвариантные распределения на естественно редуктивных пространствах. Напомним в связи с этим следующую общую конструкцию. Пусть на римановом многообразии (M, g) задана структура почти произведения P, согласованная с метрикой g условием $g(PX, PY) = g(X, Y)$, где X, Y – гладкие векторные поля на M. В этом случае пара (g, P) называется *римановой структурой почти произведения* [5]. Такая структура порождает на M пару взаимно ортогональных распределений, соответствующих собственным значениям +1 и –1 структуры P и называемых *вертикальным* V и *горизонтальным* H (при замене P на $-P$ они меняются местами). В работе А. Навейры [5] указаны 8 типов для каждого из распределений, которые характеризуют «степень параллельности» структуры P относительно данного распределения в связности Леви-Чивита ∇ метрики g. Таким образом, возникает [5] 36 классов для пар (V, H), которые обычно называют классами А. Навейры римановых структур почти произведения (перестановка в паре означает тот же класс). Для целей данной работы достаточно указать лишь 3 типа распределений. Для простоты сформулируем определяющие условия в терминах вертикального распределения, обозначив через B и C вертикальные векторные поля [5]:

AF (anti-foliation – анти-слоение): $\nabla_B(P)B = 0$;

F (foliation – слоение): $\nabla_B(P)C = \nabla_C(P)B$;

TGF (totally geodesic foliation – вполне геодезическое слоение): $\nabla_B P = 0$.

Отметим также, что одновременное выполнение условий ***AF*** и ***F*** эквивалентно условию ***TGF*** [8].

Будем рассматривать далее инвариантные структуры почти произведения на однородных многообразиях. Пусть *G/H* – однородное редуктивное пространство связной группы Ли *G*, $\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{m}$ – соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли **g** группы *G*, где **m** отождествляется, как обычно, с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке o = H. Рассмотрим на *G/H* инвариантную риманову метрику $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ и инвариантную структуру *P*. Инвариантные структуры полностью определяются своими значениями в точке *o*, а потому условимся не различать далее в обозначениях инвариантные структуры на *G/H* и их значения в точке *o*. Если пара (*g, P*) является римановой структурой почти произведения, то она порождает на *G/H* два инвариантных распределения, определяемых подпространствами $\mathbf{m}_+$ и $\mathbf{m}_-$, где $\mathbf{m}_+ \oplus \mathbf{m}_- = \mathbf{m}$. Напомним также, что метрика $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на *G/H* называется естественно редуктивной относительно редуктивного разложения $\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{m}$, если $\langle [X, Y]_{\mathbf{m}}, Z\rangle = \langle X, [Y, Z]_{\mathbf{m}}\rangle$ для всех $X, Y, Z \in \mathbf{m}$, где индекс **m** обозначает проекцию на **m** относительно указанного редуктивного разложения [9].

Пусть теперь (*G/H*, *g*, *P*) – естественно редуктивное пространство с инвариантной римановой структурой почти произведения *P*. В работе [6] было доказано, что каждое из распределений на *G/H* имеет тип ***AF***, при этом оно может иметь тип ***F***, то есть порождать слоение на *G/H*, которое, следовательно, является вполне геодезическим слоением ***TGF***. Таким образом оказалось [6], что для естественно редуктивных однородных пространств с инвариантной римановой структурой почти произведения имеется ровно три класса А. Навейры (***AF***, ***AF***), (***TGF***, ***AF***), (***TGF***, ***TGF***), при этом все возможности реализуются. Для дальнейшего рассмотрения сформулируем (в приведенных обозначениях и в терминах вертикального распределения) следующие результаты.

Теорема 1 [6]. Любая инвариантная риманова структура почти произведения *P* на естественно редуктивном пространстве (*G/H*, *g*) входит в класс (***AF***, ***AF***). Более того, распределение $\mathbf{m}_+$ имеет тип ***TGF*** тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$[\mathbf{m}_+, \mathbf{m}_+] \subset \mathbf{m}_+ \oplus \mathbf{h}, \qquad [\mathbf{m}_+, \mathbf{m}_-] \subset \mathbf{m}_- \oplus \mathbf{h}.$$

Канонические структуры на однородных Ф-пространствах. Пусть далее *G/H* – однородное Ф-пространство, определяемое автоморфизмом Ф группы Ли *G* [1], [2], $\varphi = d\Phi_e$ – соответствующий автоморфизм алгебры Ли **g**. *G/H* называется *регулярным Ф-пространством* [1; 10], если $\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus A\mathbf{g}$, где $A = \varphi - id$. Указанное разложение алгебры Ли **g** φ-инвариантно и является ее *каноническим редуктивным разложением* [10]. Обозначим через θ сужение φ на $\mathbf{m} = A\mathbf{g}$. Напомним также, что все однородные Ф-пространства *порядка k* (Φ^k = id) регулярны [1].

Инвариантная аффинорная структура *F* на регулярном Ф-пространстве *G/H* называется *канонической*, если ее значение в точке *o* является полиномом от $\theta : F = F(\theta)$ [4]. Все канонические структуры образуют коммутативную подалгебру $\mathcal{A}(\theta)$ в алгебре $\mathcal{A}$ всех инвариантных аффинорных структур на *G/H*. Алгебра $\mathcal{A}(\theta)$ содержит структуры классического типа (почти произведения, почти комплексные, *f*-структуры), полное описание которых получено в [4]. В частности, для однородных Ф-пространств порядка *k* получены точные вычислительные формулы [4], которые детализированы для порядков *k* = 3, 4, 5. Например, на однородных Ф-пространствах порядков 4 и 5 имеется единственная (с точностью до знака) каноническая структура *P*, задаваемая соответственно операторами $P = \theta^2$ и $P = \frac{1}{\sqrt{5}}(\theta - \theta^2 - \theta^3 + \theta^4)$ [11], [4].

Охарактеризуем подробнее канонические структуры почти произведения *P* на однородных Ф-пространствах *G/H* порядка *k*. Каноническое редуктивное разложение алгебры Ли **g** может быть представлено в виде

$$\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \oplus \mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \oplus \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 \oplus \ldots \oplus \mathbf{m}_u, \quad (1)$$

где подпространства $\mathbf{m}_i$, $i = 1, \ldots, u$ соответствуют спектру оператора θ (некоторые из этих подпространств могут быть нулевыми).

Здесь число *u* определяется следующим образом: $u = \begin{cases} n, & \text{если } k = 2n+1 \\ n-1, & \text{если } k = 2n \end{cases}$. В терминах разложения (1) действие операторов канонических структур *P* выглядит так: на сумме некоторых подпространств $\mathbf{m}_i$ оператор *P* есть тождественное отображение *id* (это вертикальное подпространство), а на остальных подпространствах $\mathbf{m}_i$ оператор *P* есть – *id* (горизонтальное подпространство). Инвариантные распределения на *G/H*, порождаемые вертикальными и горизонтальными подпространствами канонических структур P, называются *каноническими* распределениями. В частности, будем обозначать через P_i и называть *базовой* такую каноническую структуру, для которой вертикальным подпространством является $\mathbf{m}_i$ ($i = 1, \ldots, u$), а все остальные подпространства из $\mathbf{m}$ образуют горизонтальное подпространство. Приведем еще важную информацию о разложении (1).

Теорема 2 [12]. Пусть G/H – однородное Ф-пространство порядка k ($k \ge 2$), $\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{m}$ – соответствующее каноническое редуктивное разложение, представленное в виде (1). Пусть $i, j = 0, 1, \ldots, u$, где $i \ge j$, при этом условимся понимать под $\mathbf{m}_{i+j}$ подпространство $\mathbf{m}_{k-(i+j)}$, если $i + j > u$. Тогда справедливы следующие коммутаторные соотношения:

$$\mathbf{m}_i \oplus \mathbf{m}_j \subset \mathbf{m}_{i+j} + \mathbf{m}_{i-j}\,. \tag{2}$$

Будем предполагать далее, что на однородном Ф-пространстве G/H порядка k задана инвариантная риманова метрика, определяемая симметрической билинейной формой $g = \langle \cdot,\cdot \rangle$ на $\mathbf{m}\times\mathbf{m}$, инвариантной относительно $\mathrm{Ad}(H)$ и θ. Известно [10], что относительно такой метрики все канонические структуры P на $(G/H,\ g)$ являются римановыми структурами почти произведения. В случае полупростой группы Ли G классическим примером метрики g с указанными свойствами является так называемая стандартная метрика, индуцированная формой Киллинга алгебры Ли $\mathbf{g}$. Отметим также, что такая метрика на любом регулярном Ф-пространстве является естественно редуктивной относительно канонического редуктивного разложения [1].

Таким образом, естественно редуктивные однородные Ф-пространства порядка k, обладающие значительным запасом канонических структур P, позволили предъявить обширный ресурс однородных многообразий, реализующих классификацию А. Навейры в классах (***AF***, ***AF***), (***TGF***, ***AF***), (***TGF***, ***TGF***). Заметим, что для $k = 4$ структура $P = \theta^2$ детально изучена в [6], а результаты для канонических структур и соответствующих распределений для $k = 6$ изложены в [7]. Перейдем теперь к рассмотрению однородных Ф-пространств порядков 5 и 7.

Однородные Ф-пространства порядка 5. Рассмотрим однородное Ф-пространство G/H порядка 5. Для таких пространств каноническое редуктивное разложение алгебры Ли $\mathbf{g}$, соответствующее автоморфизму φ, имеет вид:

$$\mathbf{g} = \mathbf{h} \oplus \mathbf{m} = \mathbf{m}_0 \oplus \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2\,,$$

где $\mathbf{m}_1$ (соответственно, $\mathbf{m}_2$) является вертикальным (соответственно, горизонтальным) подпространством для единственной (с точностью до знака) канонической структуры почти произведения [4; 11]:

$$P = \frac{1}{\sqrt{5}}(\theta - \theta^2 - \theta^3 + \theta^4).$$

Охарактеризуем теперь свойства канонических распределений на G/H в случае естественно редуктивной метрики.

Теорема 3. Пусть $(G/H,\ g)$ – естественно редуктивное однородное Ф-пространство порядка 5. Тогда для римановой канонической структуры P и соответствующих ей канонических распределений на G/H, порождаемых подпространствами $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$, справедливы следующие утверждения:

1. Структура P принадлежит классу (***AF***, ***AF***).
2. Каноническое распределение на G/H, порождаемое подпространством $\mathbf{m}_1$, имеет тип ***TGF*** (то есть P принадлежит классу (***TGF***, ***AF***)) тогда и только тогда, когда выполняются оба включения:
   $[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1] \subset \mathbf{h}$, $[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] \subset \mathbf{m}_2$.
   Аналогично $\mathbf{m}_2$ имеет тип ***TGF*** тогда и только тогда, когда выполняются включения:
   $[\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_2] \subset \mathbf{h}$, $[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] \subset \mathbf{m}_1$.
3. Структура P принадлежит классу (***TGF***, ***TGF***) тогда и только тогда, когда G/H является локально симметрическим пространством (то есть $[\mathbf{m}, \mathbf{m}] \subset \mathbf{h}$), для которого выполняется дополнительное условие $[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] = 0$.

Доказательство. 1. Первое утверждение есть частный случай общего факта для естественно редуктивных пространств, обладающих инвариантной римановой структурой почти произведения (см. теорему 1).

2. Для доказательства второго утверждения воспользуемся коммутаторными соотношениями, справедливыми для любого однородного Ф-пространства порядка 5 (см. [13] либо формулу (2) для случая $k = 5$):

$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1] \subset \mathbf{m}_2 \oplus \mathbf{h}$,
$[\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_2] \subset \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{h}$,
$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] \subset \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2$.

В принятых ранее обозначениях имеем: $\mathbf{m}_+ = \mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_- = \mathbf{m}_2$. Используя теорему 1 и приведенные выше соотношения, заключаем, что $\mathbf{m}_1$ имеет тип ***TGF*** тогда и только тогда, когда $[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1] \subset \mathbf{h}$ и $[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] \subset \mathbf{m}_2$. Аналогичными рассуждениями доказывается критерий для $\mathbf{m}_2$.

3. Из результатов пункта 2) следует, что оба распределения $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ имеют тип ***TGF*** тогда и только тогда, когда имеют место соотношения:

$$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] = 0,\ [\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1] \subset \mathbf{h},\ [\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_2] \subset \mathbf{h}.$$

Отсюда, в частности, следует, что $[\mathbf{m}, \mathbf{m}] \subset \mathbf{h}$, то есть G/H является локально симметрическим пространством. Заметим, что из условия $[\mathbf{m}, \mathbf{m}] \subset \mathbf{h}$ не следует, вообще говоря, равенство $[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] = 0$. Теорема доказана.

Однородные Ф-пространства порядка 7. В заключение рассмотрим канонические распределения на естественно редуктивных однородных Ф-пространствах порядка 7. На этих пространствах все нетривиальные канонические структуры почти произведения – это (с точностью до знака) 3 базовые структуры P_1, P_2, P_3. Сформулируем полученные результаты.

Теорема 4. Пусть $(G/H, g)$ – естественно редуктивное однородное Ф-пространство порядка 7, $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2 \oplus \mathbf{m}_3$ – разложение канонического редуктивного дополнения $\mathbf{m}$, соответствующее спектру оператора θ. Пусть $i = 1, 2, 3$, при этом индексы рассматриваются по *mod* 3. Тогда для инвариантных распределений на G/H, определяемых подпространствами из данного разложения, и канонических структур почти произведения P_i справедливы следующие утверждения.

1. Все канонические структуры P_i на G/H принадлежат классу (***AF***, ***AF***).

2. Каноническое инвариантное распределение на G/H, определяемое подпространством $\mathbf{m}_i$, имеет тип ***TGF*** тогда и только тогда, когда имеют место оба включения:

$$[\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i] \subset \mathbf{h},\ [\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_{i+1}] \subset \mathbf{m}_{i+2}.$$

3. Каноническое инвариантное распределение на G/H, порождаемое подпространством $\mathbf{m}_i \oplus \mathbf{m}_{i+2}$, имеет тип ***TGF*** тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия:

$$[\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i] \subset \mathbf{h},\ [\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_{i+2}] \subset \mathbf{m}_{i+2},$$
$$[\mathbf{m}_{i+1}, \mathbf{m}_{i+2}] \subset \mathbf{m}_{i+1},\ [\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_{i+1}] = 0.$$

4. Каноническая структура P_{i+1} принадлежит классу (***TGF***, ***TGF***) тогда и только тогда, когда имеют место следующие условия:

$$[\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_i] \subset \mathbf{h},\ [\mathbf{m}_{i+1}, \mathbf{m}_{i+1}] \subset \mathbf{h},$$
$$[\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_{i+2}] \subset \mathbf{m}_{i+2},$$
$$[\mathbf{m}_i, \mathbf{m}_{i+1}] = [\mathbf{m}_{i+1}, \mathbf{m}_{i+2}] = 0.$$

Доказательство. Укажем коммутаторные соотношения для подпространств $\mathbf{m}_1$, $\mathbf{m}_2$, $\mathbf{m}_3$, детализируя для данного случая теорему 2:

$$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_1] \subset \mathbf{m}_2 \oplus \mathbf{h},$$
$$[\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_2] \subset \mathbf{m}_3 \oplus \mathbf{h},$$
$$[\mathbf{m}_3, \mathbf{m}_3] \subset \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{h},$$
$$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2] \subset \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_3,$$
$$[\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_3] \subset \mathbf{m}_2 \oplus \mathbf{m}_3,$$
$$[\mathbf{m}_2, \mathbf{m}_3] \subset \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{m}_2.$$

Используя эти соотношения и теорему 1, все дальнейшие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 3.

Выводы. Полученные результаты показывают, что для однородных Ф-пространств порядков 5 и 7 ни одно из канонических распределений не принадлежит, вообще говоря, типу ***TGF***. Это существенно отличает данные пространства от однородных Ф-пространств порядков 4 и 6, где всегда имеются (без дополнительных условий) канонические распределения типа ***TGF*** [6–7]. Отметим также, что имеется огромный ресурс примеров естественно редуктивных однородных Ф-пространств любого порядка k (см., например, [2–3; 10] и ссылки в этих работах).

Литература

1. *Степанов, Н.А.* Основные факты теории φ-пространств / Н.А. Степанов // Известия вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.
2. *Феденко, А.С.* Пространства с симметриями / А.С. Феденко. – Минск: Изд-во БГУ, 1977. – 168 с.
3. *Ковальский, О.* Обобщенные симметрические пространства / О. Ковальский. – М.: Мир, 1984. – 240 с.
4. *Балащенко, В.В.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах / В.В. Балащенко, Н.А. Степанов // Мат. сб. – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 3–34.
5. *Naveira, A.M.* A classification of Riemannian almost-product manifolds / A.M. Naveira // Rend. Mat. – 1983. – Vol. 3. – № 3. – P. 577–592.
6. *Balashchenko, V.V.* Naturally reductive almost product manifolds / V.V. Balashchenko // Diff. Geom. and Appl. Proc. of the 7th Intern. Conf., Satellite Conf. of ICM in Berlin. – 1999. – P. 13–21.
7. *Балащенко, В.В.* Канонические *f*-структуры на естественно редуктивных Ф-пространствах порядка 6 / В.В. Балащенко, А.С. Самсонов // Доклады НАН Беларуси. – 2010. – Т. 54. – № 3. – С. 26–31.
8. *Gil-Medrano, O.* Geometric properties of some classes of Riemannian almost-product manifolds / O. Gil-Medrano // Rend. Circ. Mat. Palermo. Ser. 2. – 1983. – Vol. 32. – № 3. – P. 315–329.
9. *Кобаяси, Ш.* Основы дифференциальной геометрии. Т. 2 / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М.: Наука, 1981. – 414 с.

10. *Балащенко, В.В.* Однородные пространства: теория и приложения: монография / В.В. Балащенко [и др.]. – Ханты-Мансийск: Полиграфист, 2008. – 280 с.
11. *Балащенко, В.В.* Инвариантные структуры на однородных Ф-пространствах порядка 5 / В.В. Балащенко, Ю.Д. Чурбанов // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45. – Вып. 1. – С. 169–170.
12. *Балащенко, В.В.* Приближенно келеровы и эрмитовы *f*-структуры на однородных *k*-симметрических пространствах / В.В. Балащенко, А.С. Самсонов // Доклады РАН. – 2010. – Т. 432. – № 3. – С. 295–298.
13. *Чурбанов, Ю.Д.* Геометрия однородных Ф-пространств порядка 5 / Ю.Д. Чурбанов // Известия вузов. Математика. – 2002. – № 5. – С. 70–81.

Summary

*This paper investigates all the canonical distributions within naturally reductive homogeneous Φ-spaces of orders 5 and 7 (homogeneous 5- and 7-symmetric spaces in the other terminology). To be more precise, the authors indicate algebraic criteria under which these distributions belong to the type **TGF**, i.e. they determine totally geodesic foliations. As a result, the authors provide a full description of all the canonical almost product structures within the spaces mentioned above in terms of Naveira classification of Riemannian almost product structures.*

Поступила в редакцию 30.09.2013 г.