УДК 517.983

У.А. Шылінец,
кандыдат фізіка-матэматычных навук,
дэкан матэматычнага факультэта БДПУ;
Г.А. Скрабец,
студэнт IV курса матэматычнага факультэта БДПУ

АБ ІНТЭГРАЛЬНЫМ ВЫЯЎЛЕННІ КВАТЭРНІЁННЫХ МАНАГЕННЫХ У СЭНСЕ У.С. ФЁДАРАВА ФУНКЦЫЙ ТРОХ РЭЧАІСНЫХ ЗМЕННЫХ

Уводзіны. У.А. Гусеў у працы [1] вывучаў кватэрніённыя манагенныя ў сэнсе У.С. Фёдарава (F-манагенныя) функцыі [2] на плоскасці. У працах [3–5] даследаваліся F-манагенныя кватэрніённыя функцыі трох і чатырох рэчаісных зменных.

У дадзенай працы даследуюцца F-манагенныя кватэрніённыя функцыі, адрозныя ад раней разгледжаных. Для гэтых кватэрніённых функцый атрымана інтэгральнае выяўленне і рэшана краявая задача.

Асноўная частка. Няхай D – адназвязны абсяг трохмернай рэчаіснай эўклідавай прасторы $E^3(x,y,z)$.

Разгледзім кватэрніённыя функцыі выгляду

$$f = f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)i + f_3(x,y,z)j + f_4(x,y,z)k,$$
$$p = \lambda_1 x + \lambda_2 yi + \lambda_3 zj,$$

дзе f_1, f_2, f_3, f_4 – рэчаісныя функцыі класа $C^1(D)$, $1, i, j, k$ – базіс алгебры кватэрніёнаў ($i^2 = -1, j^2 = -1, k^2 = -1, ij = k, ji = -k, jk = i, kj = -i, ki = j$, $ik = -j$), λ_n $(n = 1,2,3)$ – такія рэчаісныя лікі, што $\lambda_2^2 + \lambda_3^2 = \lambda_1^2$.

Для любых пунктаў $M(x,y,z)$ і $M'(x',y',z')$ абсягу D мяркуем

$$\Delta f = f(M') - f(M), \quad \Delta p = p(M') - p(M).$$

Азначэнне. Кватэрніённая функцыя f называецца манагеннай у сэнсе У.С. Фёдарава (F-манагеннай) [2] па кватэрніённай функцыі p у абсягу D, калі існуе такая кватэрніённая функцыя

$$\theta = \theta_1(x,y,z) + \theta_2(x,y,z)i + \theta_3(x,y,z)j + \theta_4(x,y,z)k$$

($\theta_i(x,y,z)(i = 1,2,3,4)$ – адназначныя рэчаісныя функцыі пункта (x,y,z) абсягу D), што для любога фіксаванага пункта $M \in D$ і любога зменнага пункта $M' \in D$ маем

$$\Delta f = \Delta p\theta(M) + \alpha(M,M'),$$

дзе $\dfrac{\alpha(M,M')}{\rho} \to 0$ пры $\rho \to 0$, $\rho = \left|\overline{MM'}\right|$.

Лёгка паказаць, што калі функцыя f – F-манагенная па функцыі p у абсягу D, то існуюць частковыя вытворныя $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}, \dfrac{\partial f}{\partial z}$, і пры гэтым

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\theta, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}\theta, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}\theta. \qquad (1)$$

Абазначым функцыю θ праз $\dfrac{\partial f}{\partial p}$. Тады роўнасці (1) можна запісаць у выглядзе

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial p}. \qquad (1')$$

Разгледзім наступную краявую задачу.

Задача. Няхай V – трохмерны абмежаваны абсяг з граніцай σ ($\sigma \subset D, V \subset D$). Мяркуем далей, што p і функцыя f, F-манагенная па p, вызначаны на замкнутай двухмернай паверхні σ, гомеаморфнай сферы канечнага дыяметра і дастаткова гладкай для магчымасці скарыстаць формулу Астраградскага.

Патрабуецца знайсці ў любым унутраным пункце абсягу V значэнне функцыі f, F-манагеннай па p, калі вядомы яе значэнні на паверхні σ.

Для функцыі

$$f = f_1(x,y,z) + f_2(x,y,z)i + f_3(x,y,z)j + f_4(x,y,z)k$$

і адвольнага пункта $M(x_0,y_0,z_0) \notin \sigma$ лічым [6]:

$$I_\sigma = \int_\sigma \{\alpha_1(\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} - \lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial z}) + \alpha_2(\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}) + +\alpha_3(\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z})\} f d\sigma, \qquad (2)$$

дзе $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – кіроўныя косінусы вонкавай нармалі да паверхні σ у яе бягучым пункце

$$P(x,y,z), \; r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z)^2},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x-x_0}{r^3}, \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y-y_0}{r^3}, \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{z-z_0}{r^3}.$$

Няхай M – любы дадзены пункт абсягу D, $M \notin \overline{V}$.

Тэарэма 1. Для любой кватэрніённай функцыі f, F-манагеннай па кватэрніённай функцыі p у абсягу D, маем $I_\sigma = 0$, дзе I_σ вызначаецца роўнасцю (2).

Доказ. Па формуле Астраградскага атрымоўваем

$$I_\sigma=\int_V\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)f\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y}\left(\left(\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)f\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)f\right)\right\}dV=$$

$$=\int_V\left\{\left(\lambda_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}-\lambda_2 i\frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial x}-\lambda_3 j\frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial x}\right)f+\right.$$

$$+\left(\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+$$

$$+\left(\lambda_2 i\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}+\lambda_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right)f+\left(\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+$$

$$\left.+\left(\lambda_3 j\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z}+\lambda_1\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)f+\left(\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial z}\right\}dV=$$

$$=\int_V\left\{\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)f+\left(\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial x}+\right.$$

$$\left.+\left(\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\frac{\partial f}{\partial y}+\left(\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial z}\right\}dV.$$

Адсюль і з умоў ($1'$) F-манагеннасці функцыі f па функцыі p у абсягу D, паколькі $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0$, атрымоўваем

$$I_\sigma=\int_V\left\{\left(\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\lambda_1\frac{\partial f}{\partial p}+\right.$$

$$\left.+\left(\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\lambda_2 i\frac{\partial f}{\partial p}+\left(\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\lambda_3 j\frac{\partial f}{\partial p}\right\}dV=$$

$$=\int_V\left\{\left(\lambda_1^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\lambda_2\lambda_1 i\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\lambda_3\lambda_1 j\frac{\partial\varphi}{\partial z}-\lambda_2^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\lambda_1\lambda_2 i\frac{\partial\varphi}{\partial y}-\lambda_3^2\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_1\lambda_3 j\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\frac{\partial f}{\partial p}\right\}dV=$$

$$=\int_V\left\{(\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2)\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right\}dV=0.$$

Тэарэма 2. Калі кватэрніённая функцыя f з'яўляецца F-манагеннай па кватэрніённай функцыі p у абсягу D, то для любога пункта M, які ляжыць унутры V, маем

$$f(M)=\frac{1}{4\pi\lambda_1}\int_\sigma\{(\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial z})\lambda_1+$$

$$(\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial y})\lambda_2 i+(\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial z})\lambda_3 j\}fd\sigma.$$

Доказ. Няхай σ_1 – сфера з цэнтрам у пункце $M(x_0,y_0,z_0)$, якая размешчана ўнутры σ. Калі l – радыус сферы σ_1, то маем

$$I_{\sigma_1}=\int_{\sigma_1}\{(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2 i+\alpha_3\lambda_3 j)\frac{\partial\varphi}{\partial x}+$$

$$+(\alpha_2\lambda_1-\alpha_1\lambda_2 i)\frac{\partial\varphi}{\partial y}+(\alpha_3\lambda_1-\alpha_1\lambda_3 j)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\}fd\sigma_1=$$

$$=\int_{\sigma_1}\{(\alpha_1\lambda_1+\alpha_2\lambda_2 i+\alpha_3\lambda_3 j)\frac{x-x_0}{l^3}+(\alpha_2\lambda_1-\alpha_1\lambda_2 i)\frac{y-y_0}{l^3}+$$

$$+(\alpha_3\lambda_1-\alpha_1\lambda_3 j)\frac{z-z_0}{l^3}\}fd\sigma_1=$$

$$=\int_{\sigma_1}\{\frac{1}{l^2}(\alpha_1^2\lambda_1+\alpha_1\alpha_2\lambda_2 i+\alpha_1\alpha_3\lambda_3 j+\alpha_2^2\lambda_1- \tag{3}$$

$$-\alpha_1\alpha_2\lambda_2 i+\alpha_3^2\lambda_1-\alpha_1\alpha_3\lambda_3 j)\}fd\sigma_1=$$

$$=\int_{\sigma_1}\{\frac{1}{l^2}(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2)\lambda_1\}fd\sigma_1.$$

Вядома, што $\sum_{k=1}^{3}\alpha_k^2=1$, $d\sigma_1=l^2d\omega$ ($d\omega$ – элемент адзінкавай сферы).

З роўнасці (3) атрымаем

$$f(M)=\frac{1}{4\pi\lambda_1}I_{\sigma_1} \tag{4}$$

З тэарэмы 1 вынікае, што $I_{\sigma_1}=I_\sigma$.

Тады з роўнасці (4) маем

$$f(M)=\frac{1}{4\pi\lambda_1}I_\sigma=\frac{1}{4\pi\lambda_1}\int_\sigma\{(\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial z})\lambda_1+$$

$$+(\alpha_2\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial y})\lambda_2 i+(\alpha_3\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\alpha_1\frac{\partial\varphi}{\partial z})\lambda_3 j\}fd\sigma. \tag{5}$$

Заключэнне. Пры дапамозе інтэгральнага выяўлення (5) і рашаецца сфармуляваная краявая задача.

Літаратура

1. *Гусев, В.А.* О кватернионных функциях, моногенных в смысле В.С. Федорова / В.А. Гусев // Успехи математических наук. – 1965. – Т. 20. – Вып. 1(121). – С. 203–208.
2. *Федоров, В.С.* Основные свойства обобщенных моногенных функций / В.С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 6. – С. 257–265.
3. *Стэльмашук, М.Т.* Аб інтэгральным выяўленні кватэрніённых F-манагенных функцый аднаго класа / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2005. – № 2. – С. 8–10.
4. *Стэльмашук, М.Т.* Рашэнне краявой задачы для кватэрніённых функцый чатырох рэчаісных зменных / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец, Г.Ф. Падабед // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2006. – № 1. – С. 12–14.
5. *Стэльмашук, М.Т.* Аб кватэрніённых манагенных у сэнсе У.С. Фёдарава функцыях / М.Т. Стэльмашук, У.А. Шылінец, Г.А. Андрэева // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2010. – № 1. – С. 11–13.

6. *Федоров, В.С.* Об одном обобщении интеграла типа Коши в многомерном пространстве / В.С. Федоров // Известия вузов. Математика. – 1957.

SUMMARY

The article provides the analog of the Cauchy formula for quaternion F-monogenic functions. Using this analog, the author solves a boundary value problem for quaternion functions.

Паступіў у рэдакцыю 25.05.2013 г.