УДК 517.587

Ю.В. Трубников,
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры теоретической физики ВГУ им. П.М. Машерова;
И.А. Орехова,
аспирант кафедры инженерной физики ВГУ им. П.М. Машерова

ПРИБЛИЖЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СТЕПЕНИ, ЗАДАННЫХ НА ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Введение. Статья посвящена нахождению экстремальных полиномов типа Чебышева, определенных в комплексной области. Как известно, такие полиномы важны не только с теоретической точки зрения, но и в приложениях, в частности, при построении оптимальных итерационных процессов высоких порядков для операторов с заданной областью локализации спектра [1, с. 96]. Ввиду этого в приложениях важным является разработка простых методов построения приближенных полиномов для естественных областей локализации спектра операторов. В данной статье в качестве областей локализации спектра рассматривается прямоугольник комплексной плоскости. Метод приближенного построения полиномов типа Чебышева (экстремальных полиномов) основан на известном эффекте стремления нормы полинома в пространстве L_p к норме в L_∞ (чебышевской норме) при $p\to\infty$ [2, с. 45].

Основная часть. Рассмотрим следующую задачу: пусть $f(z)\equiv 1/z$, $\varphi_0(z)=1$, $\varphi_1(z)=z$ и областью D является прямоугольник с вершинами в точках: $a+\delta+hi$, $a-\delta+hi$, $a-\delta-hi$, $a+\delta-hi$. Другими словами, на этом прямоугольнике D $(0<\delta<a,\ h>0)$ требуется найти обобщенный полином вида

$$P(z)=\frac{1}{z}+c_0+c_1z. \qquad (1)$$

с минимальной нормой в пространстве L_p. Необходимо отметить, что случай построения в равномерной метрике экстремального полинома вида $P(z)=\frac{1}{z}+c_0$, заданного на прямоугольнике комплексной плоскости, подробно описан в работе [3, с. 105].

Запишем интеграл по контуру $\oint|P(z)|^p d|z|$ прямоугольника комплексной плоскости и минимизируем его при $p=2$, где p – показатель степени подынтегрального выражения на каждой из сторон прямоугольника.

Рассмотрим подробно каждый этап данного процесса. Для начала найдем квадрат модуля полинома:

$$|P(z)|^2=\left|\frac{1}{z}+c_0+c_1z\right|^2=\left|\frac{1}{x+iy}+c_0+c_1(x+iy)\right|^2=$$
$$=\left(\frac{x}{x^2+y^2}+c_0+c_1x\right)^2+\left(-\frac{y}{x^2+y^2}+c_1y\right)^2. \qquad (2)$$

Затем вычислим определенный интеграл от квадрата модуля полинома (2) по каждой из сторон прямоугольника, используя нужные пределы интегрирования. Так, определенный интеграл при $y=-h=const$ имеет вид:

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta}\left(\left(\frac{x}{x^2+h^2}+c_0+c_1x\right)^2+\left(\frac{h}{x^2+h^2}-c_1h\right)^2\right)dx. \qquad (3)$$

При $x=a+\delta=const$ определенный интеграл имеет вид:

$$\int_{-h}^{h}\left(\left(\frac{a+\delta}{(a+\delta)^2+y^2}+c_0+c_1(a+\delta)\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{y}{(a+\delta)^2+y^2}+c_1y\right)^2\right)dy. \qquad (4)$$

При $y=h=const$ определенный интеграл имеет вид:

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta}\left(\left(\frac{x}{x^2+h^2}+c_0+c_1x\right)^2+\left(-\frac{h}{x^2+h^2}+c_1h\right)^2\right)dx. \qquad (5)$$

При $x=a-\delta=const$ определенный интеграл имеет вид:

$$\int_{-h}^{h}\left(\left(\frac{a-\delta}{(a-\delta)^2+y^2}+c_0+c_1(a-\delta)\right)^2+\right.$$
$$\left.+\left(-\frac{y}{(a-\delta)^2+y^2}+c_1y\right)^2\right)dy. \qquad (6)$$

После суммирования (3), (4), (5), (6) получаем

$$
\begin{aligned}
\varphi(c_0,c_1)=&\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta}\left(\left(\frac{x}{x^2+h^2}+c_0+c_1x\right)^2+\left(\frac{h}{x^2+h^2}-c_1h\right)^2\right)dx+\\
&+\int\limits_{-h}^{h}\left(\left(\frac{a+\delta}{(a+\delta)^2+y^2}+c_0+c_1(a+\delta)\right)^2+\right.\\
&\left.+\left(-\frac{y}{(a+\delta)^2+y^2}+c_1y\right)^2\right)dy+\\
&+\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta}\left(\left(\frac{x}{x^2+h^2}+c_0+c_1x\right)^2+\left(-\frac{h}{x^2+h^2}+c_1h\right)^2\right)dx+\\
&+\int\limits_{-h}^{h}\left(\left(\frac{a-\delta}{(a-\delta)^2+y^2}+c_0+c_1(a-\delta)\right)^2+\right.\\
&\left.+\left(-\frac{y}{(a-\delta)^2+y^2}+c_1y\right)^2\right)dy.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Теорема 1. Значения c_0 и c_1, при которых интеграл (7) является минимальным, определяются равенствами

$$
\begin{aligned}
c_0=&\frac{1}{4(h+\delta)^3}\left(\left((h+\delta)^2+3a^2\right)\ln\left(\frac{(a-\delta)^2+h^2}{(a+\delta)^2+h^2}\right)+\right.\\
&+12ah\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{a-\delta}{h}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{a+\delta}{h}\right)\right)-\\
&-2\left((h+\delta)^2+3a(2\delta-a)\right)\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a-\delta}\right)+\right.\\
&\left.\left.+\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a+\delta}\right)\right)-12a(h-\delta)\right),
\end{aligned}
\tag{8}
$$

$$
\begin{aligned}
c_1=&-\frac{3}{4(h+\delta)^3}\left(a\ln\frac{(a-\delta)^2+h^2}{(a+\delta)^2+h^2}+\right.\\
&+2a\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a+\delta}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a-\delta}\right)\right)+\\
&+4(\delta-h)+4h\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{a-\delta}{h}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{a+\delta}{h}\right)\right)+\\
&\left.+4\delta\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a+\delta}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a-\delta}\right)\right)\right).
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Доказательство. Минимизируем (7) по параметрам c_0 и c_1. Для этого находим частные производные:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial c_0}=&4(c_0+c_1a)(\delta+h)+\ln\left(\frac{(a+\delta)^2+h^2}{(a-\delta)^2+h^2}\right)+\\
&+2\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a+\delta}\right)+\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a-\delta}\right)\right);
\end{aligned}
\tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}=&\frac{1}{3}c_1\left(\delta^3+h^3\right)+c_1\delta\left(a^2+h^2\right)+\\
&+c_1h\left(a^2+\delta^2\right)+c_0a(h+\delta)+(\delta-h)+\\
&+(a-\delta)\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a-\delta}\right)+(a+\delta)\operatorname{arctg}\left(\frac{h}{a+\delta}\right)+\\
&+h\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{a-\delta}{h}\right)-\operatorname{arctg}\left(\frac{a+\delta}{h}\right)\right).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

В результате решения системы (10–11) получаем расчетные формулы (8–9) для параметров c_0 и c_1 при произвольных значениях *a, h,* δ.

Например, при *a* = 0,5; δ = 0,1; *h* = 1, в силу (8), (9) $c_0 = -1{,}6548$; $c_1 = 1{,}2185$. Далее, учитывая тот факт, что норма в L_p стремится к норме в L_∞ и что такая сходимость дает неплохие результаты при небольших значениях *p*, рассмотрим случай, когда *p* = 4. Так как интеграл от четвертой степени модуля полинома по контуру прямоугольника выражается весьма громоздким образом, реализуем и сравним два метода нахождения коэффициентов c_0 и c_1: численный метод, основанный на решении алгебраической системы по Ньютону–Канторовичу, и метод, основанный на исключении неизвестных при помощи результанта. В этом случае квадрат модуля полинома находится по формуле (2), а определенные интегралы, найденные на каждой из сторон прямоугольника, претерпевают следующие изменения. Так, при $y=-h=const$ (напомним, что рассматривается пример, где *a* = 0,5; δ = 0,1; *h* = 1) определенный интеграл имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{a-\delta}^{a+\delta}\left(\left(\frac{x}{x^2+h^2}+c_0+c_1x\right)^2+\left(\frac{h}{x^2+h^2}-c_1h\right)^2\right)^2dx=\\
&=0{,}45c_0^2+0{,}25c_0-0{,}38c_1-0{,}06c_0c_1-\\
&-0{,}16c_0^2c_1-0{,}07c_0c_1^2+0{,}69c_1^2+0{,}32c_0^3-\\
&-0{,}59c_1^3+0{,}7c_0^2c_1^2+0{,}5c_0c_1^3+0{,}4c_0^3c_1+\\
&+0{,}2c_0^4+0{,}31c_1^4+0{,}13;
\end{aligned}
\tag{12}
$$

при $x=a+\delta=const$

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{-h}^{h}\left(\left(\frac{a+\delta}{(a+\delta)^2+y^2}+c_0+c_1(a+\delta)\right)^2+\right.\\
&\left.+\left(-\frac{y}{(a+\delta)^2+y^2}+c_1y\right)^2\right)^2dy=\\
&=16{,}68c_0^2+16{,}35c_0+5{,}88c_1+15{,}3c_0c_1+11{,}78c_0^2c_1+\\
&+7{,}07c_0c_1^2+6{,}34c_1^2+0{,}21c_1^3+5{,}65c_0^2c_1^2+3{,}33c_0c_1^3+\\
&+4{,}8c_0^3c_1+2c_0^4+1{,}14c_1^4+8{,}24c_0^3+6{,}81;
\end{aligned}
\tag{13}
$$

при $y=h=const$

$$\int_{a-\delta}^{a+\delta}\left(\left(\frac{x}{x^2+h^2}+c_0+c_1x\right)^2+\left(-\frac{h}{x^2+h^2}+c_1h\right)^2\right)^2dx=$$

$$\begin{aligned}&=0,45c_0^2+0,25c_0-0,38c_1-0,06c_0c_1-\\&-0,16c_0^2c_1-0,07c_0c_1^2+0,69c_1^2+0,32c_0^3-\\&-0,6c_1^3+0,7c_0^2c_1^2+0,5c_0c_1^3+0,4c_0^3c_1+\\&+0,2c_0^4+0,31c_1^4+0,13;\end{aligned}\qquad(14)$$

при $x=a-\delta=const$

$$\int_{-h}^{h}\left(\left(\frac{a-\delta}{(a-\delta)^2+y^2}+c_0+c_1(a-\delta)\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(-\frac{y}{(a-\delta)^2+y^2}+c_1y\right)^2\right)^2dy=\qquad(15)$$

$$\begin{aligned}&=27,25c_0^2+38,38c_0+6,89c_1+15,04c_0c_1+7,24c_0^2c_1+\\&+2,89c_0c_1^2+6,59c_1^2-1,39c_1^3+3,25c_0^2c_1^2+1,58c_0c_1^3+\\&+3,2c_0^3c_1+2c_0^4+0,66c_1^4+23,97+9,5c_0^3.\end{aligned}$$

В результате суммирования (12), (13), (14), (15) получаем:

$$\begin{aligned}&\varphi(c_0,c_1)=44,83c_0^2+55,24c_0+12,008c_1+\\&+30,22c_0c_1+18,7c_0^2c_1+9,8c_0c_1^2+14,32c_1^2+\\&+18,4c_0^3-2,37c_1^3+10,3c_0^2c_1^2+5,9c_0c_1^3+\\&+8,8c_0^3c_1+4,4c_0^4+2,4c_1^4+31,06.\end{aligned}\qquad(16)$$

Минимизируем получившееся выражение (16) по параметрам c_0 и c_1. Для этого находим частные производные:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial c_0}=89,66c_0+55,24+30,22c_1+\\&+37,40c_0c_1+9,82c_1^2+55,20c_0^2+20,63c_0c_1^2+\\&+5,91c_1^3+26,4c_1c_0^2+17,6c_0^3;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}=12+30,22c_0+18,7c_0^2+19,64c_0c_1+\\&+28,63c_1-7,1c_1^2+20,63c_0^2c_1+17,74c_0c_1^2+\\&+8,8c_0^3+9,73c_1^3.\end{aligned}$$

Далее, пусть

$$f_1(c_0,c_1)=\frac{\partial\varphi}{\partial c_0}=0,\quad f_2(c_0,c_1)=\frac{\partial\varphi}{\partial c_1}=0.\qquad(17)$$

Решение системы (17) находим с помощью метода Ньютона–Канторовича. Для этого необходимо обратить матрицу:

$$M=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial c_0} & \frac{\partial f_1}{\partial c_1}\\ \frac{\partial f_2}{\partial c_0} & \frac{\partial f_2}{\partial c_1}\end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial c_0}=89,66+37,40c_1+110,41c_0+20,63c_1^2+\\&+52,8c_0c_1+52,8c_0^2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_1}{\partial c_1}=26,4c_0^2+41,26c_0c_1+37,40c_0+\\&+19,64c_1+17,74c_1^2+30,22;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_2}{\partial c_0}=26,4c_0^2+41,26c_0c_1+37,40c_0+\\&+19,64c_1+17,74c_1^2+30,22;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial f_2}{\partial c_1}=20,63c_0^2-14,21c_1+29,2c_1^2+\\&+19,64c_0+35,49c_0c_1+28,63\end{aligned}$$

и записать расчетные формулы для итерационного процесса:

$$\begin{pmatrix}c_0(k+1)\\c_1(k+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_0(k)\\c_1(k)\end{pmatrix}-M^{-1}\begin{pmatrix}f_1(c_0(k),c_1(k))\\f_2(c_0(k),c_1(k))\end{pmatrix}$$

$(k=1,2...)$.

Так, считая десять шагов итераций при значениях c_0 = –1,6548 и c_1 = 1,2185, взятых из случая p = 2, получаем необходимый результат решения (16) в виде таблицы:

Таблица

№ итерации	c_0	c_1
1	–1,76171	1,204723
2	–1,760804	1,207339
3	–1,760826	1,206880
4	–1,760825	1,206955
5	–1,760825	1,206943
6	–1,760825	1,206945
7	–1,760825	1,206945
8	–1,760825	1,206945
9	–1,760825	1,206945
10	–1,760825	1,206945

Далее рассмотрим метод построения экстремального полинома в пространствах L_p, основанный на исключении неизвестных при помощи результанта. Отметим, что формально понятие результанта двух полиномов $f(x)$ и $g(x)$ можно определить как полиномиальную функцию коэффициентов $f(x)$ и $g(x)$, обращение которой в нуль является условием необходимым и достаточным для существования общего корня указанных полиномов [4, с. 4].

Запишем подробно каждый шаг предложенного метода построения экстремального полинома, используя данные рассмотренного выше примера. Итак, пусть $a = 0,5$; $\delta = 0,1$; $h = 1$, тогда, в силу (8), (9), $c_0 = -1,6548$; $c_1 = 1,2185$. Предположим также, что степень подынтегрального выражения $|P(z)|^4$. После получившегося выражения (16) запишем следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_0} = 89,66c_0 + 55,24 + 30,22c_1 + \\ +37,40c_0c_1 + 9,82c_1^2 + 55,20c_0^2 + 20,63c_0c_1^2 + \\ +5,91c_1^3 + 26,4c_1c_0^2 + 17,6c_0^3, \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial c_1} = 12 + 30,22c_0 + 18,7c_0^2 + 19,64c_0c_1 + \\ +28,63c_1 - 7,1c_1^2 + 20,63c_0^2c_1 + 17,74c_0c_1^2 + \\ +8,8c_0^3 + 9,73c_1^3. \end{cases} \qquad (18)$$

Обозначив в полученной системе

$$\frac{\partial\varphi}{\partial c_0} = f_0(c_0, c_1), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial c_1} = f_1(c_0, c_1),$$

получим

$$\begin{cases} f_0(c_0, c_1) = 0, \\ f_1(c_0, c_1) = 0. \end{cases} \qquad (19)$$

Далее запишем результант от двух полиномов $f_0(c_0, c_1)$ и $f_1(c_0, c_1)$ по переменной c_1. Получим функцию результанта $R(f_0, f_1, c_1)$ от одной переменной c_0:

$$\begin{aligned} F(c_0) = {} & -3,97\cdot10^8 c_0 - 6,23\cdot10^8 c_0^3 - 6,41\cdot10^8 c_0^2 - \\ & -4,02\cdot10^8 c_0^4 - 1,79\cdot10^8 c_0^5 - 5,52\cdot10^7 c_0^6 - \\ & -1,13\cdot10^8 - 1,14\cdot10^7 c_0^7 - 1,44\cdot10^6 c_0^8 - \\ & -85243,05c_0^9. \end{aligned} \qquad (20)$$

Приравняем получившуюся функцию $F(c_0)$ к нулю. Получаем одно возможное действительное решение относительно c_0:

$$c_0 = -1,7613. \qquad (21)$$

Подставляя (21) поочередно в каждое уравнение системы (19), получаем единственное возможное решение относительно c_1:

$$c_1 = 1,2069. \qquad (22)$$

В результате получаем значения (21) и (22) для коэффициентов c_0 и c_1 соответственно. Легко убедиться в том, что значения, полученные и в первом, и во втором методе для c_0 и c_1, совпадают. Необходимо отметить, что данный метод не требует построения итерационного процесса для нахождения коэффициентов полинома, и, как следствие, нет необходимости следить за сходимостью процесса.

Заключение. В результате процесса минимизации функции $\oint |P(z)|^p d|z|$ по параметрам получены формулы для c_0 и c_1, когда областью локализации спектра является прямоугольник комплексной плоскости. Также в работе рассмотрен предлагаемый авторами статьи пример алгоритма минимизации функции $\oint |P(z)|^p d|z|$ по параметрам (в случае, когда $p = 4$). Решение, полученное с помощью метода Ньютона–Канторовича, представлено в виде таблицы. Проведено сравнение методов нахождения коэффициентов экстремального полинома по Ньютону–Канторовичу с методом, основанным на исключении неизвестных при помощи результанта.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красносельский, М.А.* Приближенное решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – М.: Наука,1966. – 332 с.
2. *Трубников, Ю.В.* О приближенных и точных полиномах типа Чебышева в комплексной области / Ю.В. Трубников // Таврический Вестник информатики и математики. Математика. – 2003. – № 2. – С. 45–56.
3. *Трубников, Ю.В.* Построение экстремальных полиномов для функции 1/z / Ю.В. Трубников, В.В. Силивончик // Веснік Віцебскага дзяржаўнага універсітэта. – 2003. – № 3. – С. 105–111.
4. *Калинина, Е.А.* Теория исключения: учеб. пособие / Е.А. Калинина, А.Ю. Утешев. – СПб.: Изд-во НИИ химии СПбГУ, 2002. – 72 с.

SUMMARY

In the article is finding the extreme type of Chebyshev polynomials defined in the plane complex. The domains of the polynomiall, we consider a rectangle in the plane complex. The method of approximate construction of Chebyshev polynomials of the type (extreme polynomials) is based on the well known effect of aspiration rate of the polynomial in L_p to the norm in L_∞ (Chebyshev norm) when $p \to \infty$.

Поступила в редакцию 17.10.2013 г.