

УДК 37.091.064:004.5

**В.Б. Таранчук,**  
доктор физико-математических наук, профессор,  
заведующий кафедрой компьютерных технологий и систем БГУ

## О ПРИМЕНЕНИИ WOLFRAM MATHEMATICA ПРИ СОЗДАНИИ ЭЛЕКТРОННЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ РЕСУРСОВ<sup>1</sup>

**Введение.** В середине XX в. на стыке математики и информатики возникло и интенсивно развивается фундаментальное научное направление – компьютерная алгебра, наука об эффективных алгоритмах вычислений математических объектов. Направление компьютерная алгебра представлено теорией, технологиями, программными средствами. К прикладным результатам относят разработанные алгоритмы и программное обеспечение для решения с помощью компьютера задач, в которых исходные данные и результаты имеют вид математических выражений, формул. Основным продуктом компьютерной алгебры стали программные системы компьютерной алгебры – СКА (англ. – *computer algebra system, CAS*). Круг обслуживаемых такими системами математических объектов непрерывно расширяется, активно разрабатываются алгоритмы вычисления топологических инвариантов многообразий, узлов, алгебраических кривых, когомологий различных математических объектов, арифметических инвариантов колец целых элементов в полях алгебраических чисел. Другое направление современных исследований – квантовые алгоритмы, имеющие иногда полиномиальную сложность, тогда как существующие классические алгоритмы – экспоненциальную.

Программных комплексов, выполняющих символьные вычисления, достаточно много, систематически выходят обновления и описания возможностей новых версий. С обзором СКА по состоянию на 2008 г. можно ознакомиться в книге [1], текущее состояние и основные функциональные возможности описаны в [2]. Большинство СКА не только применимы для исследования различных математических и научно-технических задач, но и содержат все составляющие языков программирования – де факто являются проблемно-ориентированными языками программирования высокого уровня. Широкое распространение в настоящее время имеют СКА: *Derive, Maxima, Axiom, Reduce, MuPAD, Mathcad.*

Особое место занимает система компьютерной математики **MATLAB**. Лидерами СКА являются **Mathematica** и **Maple** – мощные системы с собственными ядрами символьных вычислений, оснащенные интеллектуальным пользовательским интерфейсом и обладающие широкими графическими и редакторскими возможностями.

Система компьютерной алгебры **Mathematica** компании Wolfram Research является одним из наиболее мощных и широко применяемых интегрированных программных комплексов мультимедиа-технологии. Мировым сообществом **Mathematica** признана фундаментальным достижением в области компьютерного проектирования, она является одним из самых больших программных комплексов; содержит много новых алгоритмов, при ее реализации применены уникальные технические решения. В системе реализованы и доступны пользователям практически все возможности аналитических преобразований и численных расчетов, поддерживается работа с базами данных, графикой и звуком. **Mathematica** дает пользователю возможности анализировать, манипулировать, иллюстрировать графиками практически все функции чистой и прикладной математики. Система обеспечивает расчеты с любой заданной точностью; построение двух- и трехмерных графиков, их анимацию, рисование геометрических фигур; импорт, обработку, экспорт изображений, аудио и видео. **Mathematica** прошла путь от программы, используемой преимущественно для математических и технических расчетов, до инструмента, широко применяемого в различных областях ([3]). Среди специалистов она классифицируется как платформа для разработки, полностью интегрирующая вычисления в рабочий процесс от начала до конца, плавно проводя пользователя от первоначальных идей до развернутых индивидуальных и промышленных решений. Отмечаются особые возможности системы Wolfram **Mathematica** в интеграции средств информационных и коммуникационных технологий, научно-методического обеспечения образовательного процесса

<sup>1</sup> Идея написания данной статьи предложена П.Д. Кухарчиком.

и научных исследований в высших учебных заведениях.

**Формат вычисляемых документов (CDF).** Начиная с версии 8, пользователи *Mathematica* получили возможность создания интерактивных книг, отчетов, программных приложений в формате CDF ([4]). Такие документы с помощью бесплатной программы CDF Player можно свободно распространять и работать с ними, в том числе в виде веб-объектов всех популярных браузеров. Формат CDF поддерживает с использованием ползунков, меню и кнопок интерактивность в документе, возможности динамической работы с содержимым. Реакцией на команды пользователя через инструменты интерактивности являются обеспечиваемое использованием встроенной вычислительной подсистемы формирование и обновление контента.

В документах формата CDF можно размещать текст, таблицы, изображения, аудио и видео, предусмотрено использование печатной верстки и технических обозначений. Если предварительно запрограммировано, сгенерировано в *Mathematica*, можно выполнять аналитические преобразования, вычисления, импорт и экспорт данных, графическую визуализацию, поддерживаются компоновки документа с разбивкой на страницы, со структурной детализацией и режим слайд-шоу, разные способы формирования и просмотра результатов в режиме реального времени. Важно, что формат CDF делает набор математических выражений семантически точным. В дополнение к качественной верстке, пригодной для публикации, формулу можно вводить полностью набранной типографским способом и использовать для вычислений, доступно указание формата вывода результатов: математическая нотация, формат языка программирования. Оформление документа можно контролировать с использованием каскадных таблиц стилей. Документ, первоначально создан-

ный в одном стиле, можно преобразовать во множество форм: отчет, статья, учебник, презентация, инфографика или приложение. *Mathematica* предоставляет создателям документа более тысячи опций для форматирования и стилистического оформления, немедленное обновление стилей динамического и статического контента.

**Примеры иллюстраций для учебных пособий в формате CDF.** Отметим, что компанией Wolfram создан и регулярно обновляется каталог [5] свободно распространяемых в форматах NB и CDF интерактивных программных приложений-проектов. По состоянию на апрель 2014 г. в каталоге размещены и доступны посетителям сайта более 9450 демонстраций по разным разделам науки, техники, жизни (Mathematics, Computation, Physical Sciences, Life Sciences, Business & Social Systems, Engineering & Technology, Systems, Models & Methods, Our World, Creative Arts, Kids & Fun, Mathematica Functionality, Browse by US Common). Ресурсы названного каталога целесообразно применять в качестве научного, инженерного, технического материала, а также составных частей электронных учебников.

Ниже приведены иллюстрации, подготовленные в *Mathematica*, выводимые в программе CDF Player; примененные для реализации функции и опции СКА пояснены ниже. Выбраны 3 разных раздела, причем можно сказать, первые попавшиеся.

На фрагментах скриншотов (рисунок 1) в верхней части приведен код – простая конструкция, также показаны два варианта копий окна экрана с получаемыми интерактивно результатами возведения в степень выражения  $(ax + y)^n$ , когда заданы  $n = 5$ ,  $a = 1$  и  $n = 14$ ,  $a = 5,5$ . В этом примере пользователь, используя ползунки на панели манипулятора, может менять значение степени  $n$ , множитель  $a$ . В рамке, в фигурных скобках, выводятся  $n$ ,  $a$  и результат.

for\_BSPU-1.cdf

Wolfram CDF Player Find 100% Published under FreeCDF terms

```
Manipulate[{n, alpha, Expand[(alpha x + y)^n]},
  {{n, 7, "Степень n"}, 1, 15, 1},
  {{alpha, 2, "Множитель alpha"}, 1, 7, 0.5}, BaseStyle -> 18,
  LabelStyle -> Directive[Italic, 18], Alignment -> Center]
```

Степень  $n$

Множитель  $\alpha$

$$\{5, 1., 1. x^5 + 5. x^4 y + 10. x^3 y^2 + 10. x^2 y^3 + 5. x y^4 + y^5\}$$


---

Степень  $n$

Множитель  $\alpha$

$$\{14, 5.5, 2.31781 \times 10^{10} x^{14} + 5.89988 \times 10^{10} x^{13} y + 6.97258 \times 10^{10} x^{12} y^2 + 5.07097 \times 10^{10} x^{11} y^3 + 2.53548 \times 10^{10} x^{10} y^4 + 9.21994 \times 10^9 x^9 y^5 + 2.51453 \times 10^9 x^8 y^6 + 5.225 \times 10^8 x^7 y^7 + 8.3125 \times 10^7 x^6 y^8 + 1.00758 \times 10^7 x^5 y^9 + 915978. x^4 y^{10} + 60560.5 x^3 y^{11} + 2752.75 x^2 y^{12} + 77. x y^{13} + y^{14}\}$$

Рисунок 1 – Пример вывода результатов аналитических вычислений

На рисунке 2 показаны график функции  $y = x^3 - x^2 - 10x + 5$ , касательная к кривой и секущая, 3 варианта результатов. Положение контрольной точки, в которой рисуется касательная, она же – точка секущей, задается пользователем изменением позиции указателя  $x_0$  («привязка» точки к кривой обеспечивается заданием координаты), вторая точка секущей определяется положением указателя  $h$ .

Показанные на рисунках 1 и 2 примеры в программировании очень просты, подобные могут создать даже начинающие пользователи системы **Mathematica**. Иллюстрации

рисунка 3 предполагают реализацию достаточно сложных алгоритмов компьютерной графики, математических преобразований координат объектов в пространстве, формирования проекций, отсечений. Приведенные изображения получены с использованием размещенных в [5] приложений «Orthographic Projection of Parallelepipeds» (contributed by: Anastasiya Rybik, thesis adviser: Valery Taranchuk, published: May 28, 2013), «Cutoff Parallelepipeds» (contributed by: Anastasia Dvorkina, suggested by: Valery Taranchuk, published: June 6, 2013).



венно). Три варианта задания размеров основания показаны в кадрах а), б), в) – вид сцены сверху для случая, когда отсекающая плоскость ориентирована горизонтально и размещена выше параллелепипедов, то есть отсечения нет. Отсекающую плоскость можно вращать вокруг любой из линий ее текущего пересечения с координатными плоскостями  $xOz$  и  $yOz$ . На чертежах также показываются стороны многоугольника – границы отсечен-

ной части, отсеченные части параллелепипедов удаляются из вида. Три разных вида отсечения показаны фрагментами скриншотов г), д), е). В примере первоначально горизонтально ориентированная плоскость размещена на уровне 10 и рассмотрены повороты вдоль стороны в координатной плоскости  $xOz$ . Скриншот с панелью управления для варианта отсечения д) показан в нижней части иллюстрации.

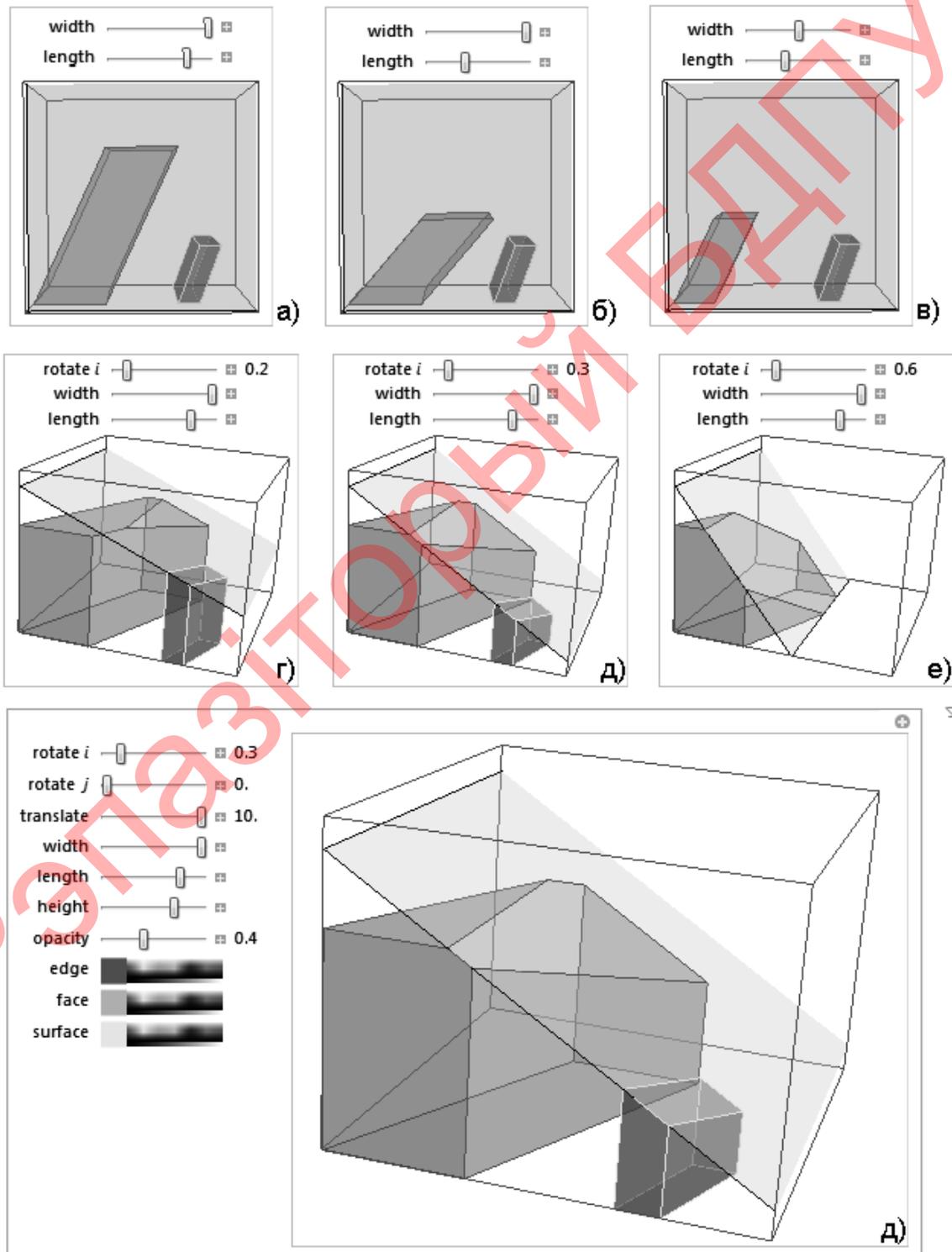


Рисунок 3 – Пример вывода результатов 3D графики

**Ключевые функции и опции исходных кодов приведенных примеров.** Наиболее часто в блокнотах *Mathematica* динамическая интерактивность, диалоговые интерактивные окна, управление параметрами входных данных для вычислений (в том числе символьных), построение и просмотр графиков реализуются с использованием функции *Manipulate*. Соответствующий модуль *Manipulate* позволяет создавать различные интерактивные средства по заданному выражению *expr* с аргументами (параметрами), причем выражение *expr* трактуется в самом общем виде и может быть списком, включающим названия, математические выражения, графические функции и т. д.

Так, в рассмотренном и иллюстрируемом (рисунок 1) задании, пользователь, используя ползунки на панели манипулятора, может менять значение степени  $n$  от 1 до 15 с шагом 1, а множитель  $\alpha$  от 1 до 7 с шагом 0,5. В рамке в фигурных скобках выводятся  $n$ ,  $\alpha$  и результат. Перечисленное обеспечивает функция *Manipulate*, у которой в качестве *expr* перечислены  $\{n, \alpha, (\alpha x + y)^n\}$  – список, включающий два идентификатора и выражение, которые подлежат выводу в окно результатов. В коде задаются:  $\{\{n, 7, \text{«Степень } n\text{»}\}, 1, 15, 1\}$ ,  $\{\{\alpha, 2, \text{«Множитель } \alpha\text{»}\}, 1, 7, 0.5\}$  – в фигурных скобках перечисляются начальное значение параметра, название (в кавычках) для вывода на панели слева от полосы бегунка, отрезок изменения и шаг. Таким образом, можно задавать стандартное, плавное, дискретное, целочисленное изменение параметров или вовсе не задавать. Для задания размера символов шрифта (18) результатов и подписей, позиционирования выводимого результата (отцентрировать) в коде используются опции *BaseStyle*, *LabelStyle*, *Alignment*; директивой *Directive* определяется стиль (курсив) названий параметров.

Пример 2 – пользователь, используя ползунки на панели манипулятора, может менять параметры анимации: значения абсциссы контрольной точки ( $x_0 = a$ ), приращение  $h$  абсциссы второй точки (секущей). Изменение  $a$  ( $h$  фиксируется) обеспечивает перемещение контрольной точки и второй точки секущей на кривой, положений линий касательной и секущей. При изменении  $h$  перерисовываются секущая и ее вторая точка (на кривой). В части программной реализации пример отличается незначительно. Ключевой является часть кода

$$\text{Plot}\{\{f[x], f[a] + (D[f[t], t]/.t \rightarrow a) \cdot (x - a), f[a] + ((f[a+h] - f[a])/h) \cdot (x - a)\}, \{x, x_{\min}, x_{\max}\} \dots$$

Здесь функция одномерной графики *Plot* применяется для формирования и вывода: – графиков функции  $f[x]$ ;

– касательной  $f[a] + (D[f[t], t]/.t \rightarrow a) \cdot (x - a)$ ;

– секущей  $f[a] + ((f[a+h] - f[a])/h) \cdot (x - a)$ .

Конструкция  $D[f[t], t]/.t \rightarrow a$  – производная функции  $f$  по переменной  $t$  с подстановкой  $t \rightarrow a$ , то есть производная в точке. Опции и директивы задания типа, толщины и цветов линий: *PlotStyle*, *AbsoluteThickness*, *Black*, *Blue*, *Red*, *Dashed*. Конструкция кода для вывода подписей и значений наклона линий, например, для касательной –  $\text{Text}\{\text{«Наклон касательной = »} \langle \rangle \text{ToString}[D[f[t], t]/.t \rightarrow a]\}$ .

Код блокнота для получения иллюстраций примера 3 (можно ознакомиться в каталоге [5]) в части обеспечения интерактивности особенностей не имеет. Используемые в блокноте функции, опции, директивы визуализации: *Graphics3D* – создание графиков из различных элементарных геометрических объектов, называемых примитивами; *ContourPlot3D* – построение контурных объемных графиков; *Opacity* – директива уровня прозрачности, директивы *EdgeForm* и *FaceForm* – указывают параметры рисования граней и лицевых поверхностей многоугольников.

**Заключение.** Перечень других учебных материалов, исходные коды блокнотов, в которых реализованы аналитические преобразования, расчеты, формирование, просмотр графиков в режимах статическом и с динамической интерактивностью доступны авторизованным посетителям сайта кафедры компьютерных технологий и систем БГУ [www.cas.fpmi.bsu.by](http://www.cas.fpmi.bsu.by).

Описанные в статье новые возможности и рекомендации применения системы Wolfram *Mathematica*, формата CDF расширяют границы создания и свободного распространения электронных интерактивных образовательных ресурсов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дьяконов, В.П. Энциклопедия компьютерной алгебры / В.П. Дьяконов. – М. : ДМК Пресс, 2009. – 1264 с.
2. Таранчук, В.Б. Основные функции систем компьютерной алгебры: пособие для студ. фак. прикладной математики и информатики / В.Б. Таранчук. – Минск: БГУ, 2013. – 59 с.
3. Mathematica. История версий [Электронный ресурс]. Режим доступа: [http://ru.wikibooks.org/wiki/Mathematica/История\\_версий](http://ru.wikibooks.org/wiki/Mathematica/История_версий).
4. Формат вычисляемых документов CDF [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://www.wolfram.com/cdf/>.
5. Wolfram Demonstrations Project [Электронный ресурс]. Режим доступа: <http://demonstrations.wolfram.com/>.

#### SUMMARY

The article describes the new ways and recommendations of using Wolfram technologies for creation and maintenance interactive electronic educational resources.

Поступила в редакцию 10.04.2014 г.