УДК 378.016:512.622

Д.Я. Требенко,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики НПУ имени М.П. Драгоманова;
О.А. Требенко,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики НПУ имени М.П. Драгоманова

ОБ ИЗУЧЕНИИ ПОНЯТИЯ МНОГОЧЛЕНА В КУРСЕ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

Введение. Согласно современной парадигме образования обучение должно быть направлено в первую очередь на общее развитие личности, а не только на приобретение студентом определенного запаса знаний, умений и навыков. В современных условиях получить знания (найти нужную информацию) несложно: Интернет содержит много разнообразной справочной литературы, учебников и учебных пособий, статей, научных обзоров и т. п. А вот какая именно информация нужна, где ее можно найти и как ее обработать − это то, о чем во время обучения студент должен узнать, то, в чем должен ориентироваться современный выпускник университета. Согласно такому подходу оценке знаний студентов при изучении того или иного математического курса должны подлежать не только знания отдельных фактов (определений, теорем и т. д.), а общие представления о предмете изучения, основные идеи, положения курса, методы исследования.

Формирование правильных общих представлений о предмете курса невозможно без понимания студентом сути основных понятий, их глубокого, сознательного, осмысленного усвоения, ведь понятия, введенные на основе поверхностно усвоенного, неосмысленного основного понятия, становятся еще более непонятными, и, как результат, формируется система формальных знаний, которые не используются студентом в самостоятельных рассуждениях, то есть не «работают».

Для многих математических понятий можно дать далеко не одно определение, исходя из того или иного характеристического свойства. Практика показывает, что выбор определения *основного* понятия и пути построения теории на основе данного определения часто очень сильно влияет на уровень усвоения всей теории: один подход способствует сознательному усвоению и легко воспринимается, а другой, наоборот, сложный, громоздкий непонятный, «туманный». Следовательно, проблема выбора методики введения и формирования именно основных понятий курса требует пристального внимания.

Одним из основных понятий и университетского, и школьного курсов алгебры является понятие многочлена. В работах [1, с. 517; 2, с. 227] авторами был предложен подход к введению понятия многочлена от одной переменной, который, как было подтверждено экспериментально [2], является достаточно эффективным. В результате дальнейших исследований этот подход удалось усовершенствовать и обобщить на случай многочлена от многих переменных. В данной работе представлены полученные результаты.

Заметим, что вопрос этот весьма важный и не такой простой, как кажется на первый взгляд. Понятие многочлена над коммутативным кольцом с единицей является чрезвычайно глубоким и требует детального осмысления. В частности, факт этот подчеркивают абсолютно разные подходы к введению понятия многочлена от одной переменной в нескольких последовательных изданиях серии учебников по высшей алгебре для педагогических вузов Украины одного и того же коллектива авторов ([3–6]).

Проследим, как эволюционировало представление о понятии многочлена в упомянутом учебнике. В самом раннем издании [3] многочлены рассматриваются лишь над числовыми полями.

Определение [3, с. 265]. Многочленом *f(x)* над числовым полем *P* называется функция от *x*, которую можно представить в виде

$$f(x)=b_0x^{m_0}+b_1x^{m_1}+\ldots+b_{k-1}x^{m_{k-1}}+b_kx^{m_k},$$

где $m_i \in N \cup \{0\}$, $b_i \in P$, а x может принимать произвольные значения из некоторого заданного числового множества X.

В последующем издании [4] речь уже идет о многочленах над произвольной областью целостности (коммутативным кольцом без делителей нуля).

Определение [4, с. 212]. Многочленом от одной переменной над областью целостности K называется выражение вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + a_0,$$

где $n \in N \cup \{0\}$, $a_i \in K$, а $x, x^2, \ldots, x^{n-1}, x^n$ – некоторые символы.

Позже Б.И. Хацет, один из авторов [4], писал [7]: «Где-то на грани 60-х и 70-х годов возникла, наконец, коренным образом переработанная программа по алгебре для педвузов (к сожалению, она не предшествовала реформе школьного курса, а следовала за ней с большим опозданием). Это был настоящий праздник: … стало возможным последовательно проводить алгебраическое толкование многочленов (не забывая, однако, демонстрировать будущим учителям его связь с функциональным)».

В [5] определение многочлена опять новое, более строгое.

Определение [5, с. 217]. Пусть K − область целостности с единицей, x − некоторый элемент, трансцендентный над K. Кольцом многочленов от одной переменной x над K называется простое трансцендентное расширение $K[x]$; элементы этого кольца называют многочленами от x над K.

При этом под трансцендентным над K элементом подразумевается такой элемент x, для которого в K не найдется набора (отличного от нулевого) элементов $a_0, a_1, \ldots, a_n$, удовлетворяющих условию $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$.

В [6] представлен совершенно иной подход: изложение теории многочленов начинается с построения кольца $\widetilde{K}$ бесконечных последовательностей $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $a_i \in K$, в каждой из которых все члены, начиная с некоторого, равны нулю. Кольцо $\widetilde{K}$ называют кольцом многочленов от одной переменной над кольцом K, а его элементы − многочленами от одной переменной над кольцом K.

Как видим, авторы учебников [3–6] активно вели поиски подхода к введению понятия многочлена, стараясь найти более удачный.

Апробировав все предлагаемые в учебниках [3–6] подходы и не получив желаемого эффекта, авторы статьи продолжили поиски в этом направлении. Результаты исследований предлагаются ниже.

Основная часть. Чтобы глубже вникнуть в суть понятия многочлена, обратимся вначале к истории его формирования (поскольку с развитием математики как науки, с появлением новых методов исследования изменялись и подходы к пониманию этого понятия). Свойства многочленов исследовались фактически еще в древности при решении задач прикладного характера, которые математически можно выразить при помощи уравнений. Однако само понятие многочлена было выделено значительно позже. Лишь в XVI в. Ф. Виетом были заложены начала алгебраического исчисления, что позволило заменить словесные описания и рассуждения аппаратом формул и их преобразований; хотя записи были еще достаточно громоздки. Существенно упростить их удалось Р. Декарту («La géometrie», 1637), который предложил почти современную запись алгебраического уравнения. В последующих работах часто вместо уравнений встречались уже сокращенные записи вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$. Так постепенно была осознана важность исследования выражения вида $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ или даже более общего вида $\sum_{i=1}^{n} a_i x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_s^{k_s}$. Аналитическое выражение такого вида было названо многочленом.

Вначале поиск корней многочлена, исследование свойств этих корней осуществлялись преимущественно алгебраически (были найдены формулы для решения уравнений 2–4-й степеней, установлена неразрешимость в радикалах общего алгебраического уравнения степени ≥5). Но со временем стало понятно, что не все алгебраические задачи можно решить, используя лишь алгебраические методы (это ярко видно на примере основной теоремы алгебры). Оказалось, что в исследовании свойств многочленов достаточно эффективны функциональные методы и методы приближенных вычислений. Так многочлен получил функциональную трактовку.

В XX в. понятие многочлена существенно расширилось. В самых разнообразных областях математики и ее приложений стали использовать так называемое символьное исчисление многочленов (математическая логика, топология, теория информации, дискретная и компьютерная математика). В нем буквы, используемые для записи многочлена, играют роль символов, никак не связанных с конкретными значениями.

Здесь весьма уместно вспомнить слова Г. Шилова о понятии функции: «Под влиянием новых требований математики и других наук определение функции будет и дальше изменяться, и каждое последующее изменение, как и предыдущее, будет открывать новые горизонты науки и приводить к новым открытиям». Эти же слова можно сказать и о понятии многочлена.

Таким образом, мы видим, что понятие многочлена имеет несколько различных трактовок; выбор основной трактовки зависит от потребностей той или иной области математики.

Анализ учебной и учебно-методической литературы по алгебре позволил выделить 3 основных направления в толковании понятия многочлена: функциональный, формальный и современный алгебраический.

Согласно *функциональному подходу* многочлен от многих переменных над кольцом K − это функция n переменных x_1, x_2, ... , x_n, которую можно представить в виде

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=0}^{s} A_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \ldots x_n^{\alpha_{ni}},$$

где $A_i \in K$. Такую трактовку встречаем в пособиях [3, с. 265; 8, с. 11, 13; 9, с. 255]. «Функциональная» точка зрения на многочлен характерна для математического анализа и часто используется в естественных науках. Этот подход возможен в случае, если K − бесконечное (в частности, числовое) кольцо. Однако в современной алгебре многочлены рассматриваются и над конечными кольцами (более того, внимание к таким многочленам последнее время все более возрастает, что связано с активным использованием их в теории кодирования, криптографии). Для таких многочленов функциональный подход − не приемлем. Поясним причину на примере. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + x$, определенную на множестве $K = Z_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$. Данная функция приобретает значение $\bar{0}$ в каждой точке из Z_2 (поскольку $f(\bar{0}) = \bar{0}^2 + \bar{0} = \bar{0}$, $f(\bar{1}) = \bar{1}^2 + \bar{1} = \bar{0}$), значит, функция $f(x)$ является нулевой, то есть $x^2 + x = \bar{0}$, откуда $x^3 + x^2 + x = x^3$,

$$x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x = x^5 + x^2(x^2 + x) + (x^2 + x) = x^5$$

и т. д. Получаем правила действий над многочленами, отличающиеся от «обычных».

Аналогичные правила справедливы для любого конечного кольца K. Действительно, функция $f(x)$ вполне задается своими значениями для всех возможных значений аргумента. Поскольку значения функции

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0,$$

где $a_i \in K$, все являются элементами кольца K, то в случае, когда K − конечное, различных таких функций есть лишь конечное число, а значит, среди многочленов $x, x^2, x^3, \ldots$ должны быть такие, которые задают одну и ту же функцию, то есть для некоторых $k \neq l$ справедливо, что $x^k = x^l$.

Таким образом, в случае конечного поля определять многочлен как функцию некорректно и, следовательно, в курсе алгебры использовать функциональное определение многочлена в качестве основного нельзя. Безусловно, студенты обязаны знать о функциональном подходе к трактовке понятия многочлена, а также условия, при которых функциональная и алгебраическая трактовка эквивалентны; понимать и объяснять, почему при изучении свойств многочленов с числовыми коэффициентами можно применять результаты теории функции (например, теорему Больцано-Коши и др.). Но этот вопрос следует рассматривать лишь тогда, когда суть понятия будет осознана и изучены свойства многочлена над произвольными кольцами (не только бесконечными).

Формальное направление трактует многочлен от многих переменных над кольцом как формальное выражение вида

$$\sum_{i=0}^{s} A_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \ldots x_n^{\alpha_{ni}}, \qquad (1)$$

где $A_i \in K, \alpha_{ji} \in N \cup \{0\}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ − некоторые символы, буквы, «картинки» с определенными формальными правилами действий над ними. Такой подход встречаем в пособиях [10, с. 90; 11, с. 131; 12, с. 69; 13, с. 43; 14, с. 62]. Этот же подход используется в школьных учебниках по алгебре («многочлен − сумма одночленов»).

Данное определение активно используется в тех областях математики, для которых природа объектов-символов значения не имеет, а важна лишь форма записи. Но для математика очень важно понимать суть рассматриваемых объектов! Что в таком случае понимать под символами $x_1, x_2, \ldots, x_n$? Сказать, что это элементы вне кольца K, − недостаточно. (Если взять, к примеру, элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$, алгебраические над K, то теряется единственность записи многочлена в виде (1)). Если же сказать, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ − некоторые символы с некоторыми правилами действий над ними, тогда необходимо и выражения $A_i x_1^{\alpha_{1i}} x_2^{\alpha_{2i}} \ldots x_n^{\alpha_{ni}}$, и знак «+» также считать символами и договариваться об определенных правилах действий на множестве всех этих символов. При первом ознакомлении с понятием такие громоздкие записи воспринимаются студентами чрезвычайно сложно. Но не сказать об этих символах ничего, не вводить правила действий − это значит недостаточно научно изложить материал.

Современный алгебраический подход заключается в определении многочлена как элемента определенной алгебраической структуры (кольца, векторного пространства, линейной алгебры). При таком подходе рассмотрение начинается с построения этой структуры, ее элементы называют многочленами. А затем устанавливается общий вид этих элементов.

Выбор структуры зависит от места темы «Многочлены» в курсе высшей алгебры: в курсе линейной алгебры в качестве такой структуры выступает алгебра, а в курсе абстрактной алгебры − кольцо. Вместе с тем место темы «Многочлены» определяется теми конкретными свойствами многочленов, которые планируется рассматривать. Если говорить о курсе для будущих учителей математики, то в рамках темы «Многочлены» следует подробно рассмотреть и обосновать свойства делимости многочленов, свойства корней многочленов с позиций современной алгебры (как частный случай делимости в произвольном абстрактном кольце). Вследствие этого базовой структурой в курсе для учителей чаще выступает кольцо.

Встречаются следующие определения кольца многочленов от одной переменной. Кольцо многочленов от одной переменной над кольцом K − это:

1) простое трансцендентное расширение кольца K [5, с. 217; 15, с. 120; 17, с. 459];
2) кольцо бесконечных последовательностей вида $(a_0, a_1, ..., a_n, 0, 0, ...)$, где $a_i \in K$ [6, с. 163; 18, с. 209; 19, с. 36; 20, с. 149];
3) кольцо $K[x]$, владеющее 3-мя свойствами:
   1. $K[x]$ содержит K в качестве подкольца.
   2. $K[x]$ содержит элемент x, трансцендентный над K.
   3. $K[x]$ – минимальное кольцо, содержащее K и x [16, с. 235].

Кольцо многочленов $K[x_1, x_2, ..., x_n]$ от многих переменных над кольцом K определяется индуктивно как кольцо многочленов от одной переменной x_n над кольцом $K[x_1, x_2, ..., x_{n-1}]$.

При таком подходе проблемы возникают уже на этапе воспроизведения студентом определения, поскольку, чтобы сформулировать определение многочлена, студенту сначала необходимо описать процесс построения структуры, затем определить многочлен как элемент данной структуры и установить его вид. В результате, как показывает опыт, студенты формулируют то определение, к которому привыкли в школьном курсе: многочлен − это сумма одночленов (формальное определение, недостатки которого были описаны выше). Довольно громоздкое построение кольца становится совершенно бесполезной тратой времени. В результате такого подхода не формируется четкое «видение» понятия, суть его не раскрывается, изучение материала становится формальным.

Отметим также один немаловажный нюанс, который в учебниках, берущих за основу современный алгебраический подход, не находит отражения: при индуктивном построении кольца многочленов от многих переменных следует показать «равноправие» всех переменных. Этот факт используется, но не обосновывается.

Чтобы лучше раскрыть суть проблемы, рассмотрим кольцо многочленов $K[x, y]$ от переменных x и y над K. Построение этого кольца осуществляется следующим образом: к кольцу K вначале присоединяют трансцендентный над K элемент x, а потом к полученному кольцу $K[x]$ присоединяют трансцендентный над $K[x]$ элемент y. Следовательно, от x требуется трансцендентность над K, а от y − трансцендентность над $K[x]$. А если изменить последовательность присоединения элементов x и y? Присоединить вначале y. Будет ли x трансцендентным над $K[y]$?

Предлагаемый подход к введению понятий многочлена от одной и многих переменных. Заметим, что понятия многочлена от одной переменной и многочлена от многих переменных не должны изучаться одновременно (как это иногда практикуют с целью экономии времени). Многие из свойств колец многочленов от одной и многих переменных аналогичны, однако не всегда понятия теории многочленов от многих переменных являются обобщениями понятий теории многочленов от одной переменной (например, понятие стандартного вида многочлена). Кроме того, свойства многочленов от одной переменной изучать проще и записи не такие громоздкие.

Предлагаем вводить понятие многочлена от одной переменной следующим образом.

В основу определения (см. [1, с. 517]) была взята возможность единственной записи многочлена от одной переменной x над кольцом K в виде

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n. \qquad (2)$$

Для того чтобы не определять действия умножения элементов a_i кольца K на элемент x и на степени x^i и действие сложения выражений a_ix^k и a_lx^l, удобно рассматривать и элементы a_i, и элемент x как элементы одного более широкого кольца L (тогда эти операции заданы изначально). Вопрос о том, существует ли такое кольцо, пока не стоит.

Можно ли в качестве x взять произвольный элемент из L, не принадлежащий K? Нет, нельзя, поскольку характерным свойством многочлена от одной переменной является *единственность* записи его в виде (2), а эта единственность обеспечивается в том и только в том случае, когда элемент x – трансцендентный над кольцом K. Получаем следующее определение.

Определение. Пусть $\langle L;+,\cdot\rangle$ – коммутативное кольцо с единицей 1, K – подкольцо кольца L, $1 \in K$, и пусть $x \in L$ – ***трансцендентный над*** K элемент. *Многочленом от переменной x над кольцом K* называется каждый элемент $f \in L$, ***который можно*** записать в виде

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$

где $a_i \in K$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Существенность требования «x – трансцендентный над K» подчеркивают следующие утверждения.

Теорема. Пусть $f \neq 0$ – некоторый элемент кольца L. Для того чтобы разложение f по степеням элемента x над K было единственным, необходимо и достаточно, чтобы x был трансцендентным над K.

Следствие. Для произвольного многочлена $f \in L$, $f \neq 0$, от переменной x над K разложение по степеням элемента x существует и единственно.

Далее рассмотрим подмножество множества L, элементами которого являются многочлены от переменной x над K. Это подмножество является подкольцом кольца L.

Теорема. Пусть K – подкольцо с единицей коммутативного кольца $\langle L;+,\cdot\rangle$, x – элемент из L, трансцендентный над K. Тогда:
1) множество $K[x]$ всех многочленов от переменной x над кольцом K образует кольцо;
2) кольцо $K[x]$ является минимальным подкольцом кольца L, содержащим как кольцо K, так и элемент x.

Наконец подходим к вопросу: «Для произвольного ли кольца K вообще существует такой объект изучения, как многочлен от одной переменной над K? (или, что равносильно, всегда ли существует трансцендентный над K элемент?)». Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема. Кольцо многочленов от одной переменной существует над произвольным коммутативным кольцом с единицей K.

Для доказательства строим ***модель*** кольца многочленов. Для этого каждому многочлену

$$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

ставим в соответствие бесконечную последовательность его коэффициентов

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots).$$

На множестве L' этих последовательностей задаем операции сложения $\oplus$ и умножения $\odot$ (которые соответствуют операциям в кольце $K[x]$), и показываем, что $\langle L';\oplus,\odot\rangle$ – кольцо, являющееся кольцом многочленов над множеством $K_1 = \{(a_0,0,0,\ldots) \mid a_0 \in K\}$ (соответствующим кольцу K).

Необходимость введения последовательностей для задания модели многочлена при таком подходе вполне понятна студентам, она естественна (ведь единственность записи в виде (1) позволяет изучать свойства по заданному набору коэффициентов). А вот введение последовательностей без предварительного определения понятия многочлена, как это сделано, например, в [6, с. 160–163], вызывает у студентов недоумение и вопрос «Зачем это вообще нужно рассматривать»?

Остается обсудить вопрос о единственности кольца многочленов от одной переменной. Формулируем более общее утверждение (оно будет использоваться в дальнейшем).

Теорема. Пусть K и K_1 – коммутативные кольца с единицей, $K[x]$ – кольцо многочленов от переменной x над K, $K_1[y]$ – кольцо многочленов от переменной y над K_1. Тогда если $K \overset{\varphi}{\cong} K_1$, то $K[x] \overset{\psi}{\cong} K_1[y]$, причем $\psi(a) = \varphi(a)$ для всех $a \in K$, $\psi(x) = y$ (то есть изоморфизм Ψ является продолжением изоморфизма φ).

Следствие. С точностью до изоморфизма кольцо многочленов от одной переменной над произвольным коммутативным кольцом K с единицей единственно.

Понятие многочлена от многих переменных вводится следующим способом. Чтобы обеспечить единственность записи многочлена в виде

$$f = \sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_n \\ 0 \le k_i \le m_i}} a_{k_1k_2\ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n},$$

необходимо и достаточно требовать, чтобы система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$ была алгебраически независима над кольцом K. Под алгебраически независимой (АНЗ) над K системой элементов мы понимаем такую систему элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, что равенство

$$\sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \ldots \sum_{k_n=0}^{m_n} a_{k_1k_2\ldots k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n} = 0, \text{ где } a_{k_1k_2\ldots k_n} \in K,$$

возможно тогда и только тогда, когда $a_{k_1k_2\ldots k_n} = 0$ для всех наборов показателей $(k_1k_2\ldots k_n)$.

Использование понятия алгебраически независимой над кольцом системы элементов для определения многочлена от многих переменных предлагается впервые. Это позволяет ввести понятия многочлена от одной и многих переменных совершенно аналогично (таблица).

Таблица – Понятия многочлена

Кольцо многочленов от одной переменной	Кольцо многочленов от многих переменных
Пусть $\langle L;+,\cdot\rangle$ – коммутативное кольцо с единицей 1, K – подкольцо кольца L, $1 \in K$, и пусть $x \in L$ – ***трансцендентный над*** K элемент. *Многочленом от переменной x над кольцом K* называется каждый элемент $f \in L$, ***который можно*** записать в виде $$f = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n,$$ где $a_i \in K$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$, $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.	Пусть $\langle L;+,\cdot\rangle$ – коммутативное кольцо с единицей 1, K – подкольцо кольца L, $1 \in K$, и пусть система элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in L$ – ***АНЗ над*** K. Многочленом от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над кольцом K называется каждый элемент $f \in L$, ***который можно*** записать в виде $$f = \sum_{\substack{k_1,k_2,\ldots,k_n\\ 0\le k_i\le m_i}} a_{k_1k_2\ldots k_n} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n},$$ где $a_{k_1k_2\ldots k_n} \in K$, $m_i \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$.
Для произвольного многочлена $f \in L$, $f \neq 0$ от переменной x над K разложение по степеням элемента x существует и единственно.	Каждый многочлен $f \in L$, $f \neq 0$ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над K можно, причем единственным образом, записать в виде $$f = \sum_{(k_1,k_2,\ldots,k_n)\in M} a_{k_1k_2\ldots k_n} x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_n^{k_n},$$ где $a_{k_1k_2\ldots k_n} \in K$, M – конечно, так, что f не будет иметь подобных членов и членов с равными 0 коэффициентами.
Теорема. Пусть K – подкольцо с единицей коммутативного кольца $\langle L;+,\cdot\rangle$, x – элемент из L, трансцендентный над K. Тогда: 1) множество $K[x]$ всех многочленов от переменной x над кольцом K образует кольцо; 2) кольцо $K[x]$ является минимальным подкольцом кольца L, содержащим как кольцо K, так и элемент x.	**Теорема.** Пусть K – подкольцо с единицей коммутативного кольца $\langle L;+,\cdot\rangle$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – система элементов из L, АНЗ над K. Тогда: 1) множество $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ всех многочленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над кольцом K образует кольцо; 2) кольцо $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ является минимальным подкольцом кольца L, содержащим как кольцо K, так и элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$.
Теорема. Кольцо многочленов от одной переменной существует над произвольным коммутативным кольцом с единицей K.	**Теорема.** Кольцо многочленов от многих переменных существует над произвольным коммутативним кольцом K с единицей.
Теорема. Пусть K и K_1 – коммутативные кольца с единицей, $K[x]$ – кольцо многочленов от переменной x над K, $K_1[y]$ – кольцо многочленов от переменной y над K_1. Тогда если $K \overset{\varphi}{\cong} K_1$, то $K[x] \overset{\psi}{\cong} K_1[y]$. **Следствие.** С точностью до изоморфизма кольцо многочленов от одной переменной над произвольным коммутативным кольцом K с единицей – единственно.	**Теорема.** Пусть K и K_1 – коммутативные кольца с единицей, $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ – кольцо многочленов от переменных $x_1, x_2, \ldots,$ x_n над K, $K_1[y_1, y_2, \ldots, y_n]$ – кольцо многочленов от переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ над K_1. Тогда если $K \overset{\varphi}{\cong} K_1$, то $$K[x_1,x_2,\ldots,x_n] \overset{\psi}{\cong} K_1[y_1,y_2,\ldots,y_n].$$ **Следствие.** С точностью до изоморфизма кольцо многочленов от многих переменных над произвольным коммутативным кольцом K с единицей – единственно.

Предлагаемый подход к введению понятия многочлена от многих переменных, как показывает практика, воспринимается легче, поскольку обобщает известный студенту уже осмысленный материал, и, что очень важно, позволяет избежать неточностей, связанных с необходимостью доказательства «равноправия» переменных (в таком случае все переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ уже по определению абсолютно «равноправны»). А показать, что на кольцо многочленов от n переменных можно смотреть как на кольцо многочленов от одной переменной над кольцом многочленов от n – 1 переменной (что используется для изучения свойств данного кольца), совершенно несложно.

Пусть $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ – кольцо многочленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над кольцом K.

Предложение. Множество
$$K^{\langle i\rangle} = K[x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n]$$
всех элементов f кольца $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ вида
$$f = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_{i-1},k_{i+1},\ldots,k_n\\ 0\le k_j\le m_j}} a_{k_1\ldots k_{i-1}0k_{i+1}\ldots k_n} x_1^{k_1}\ldots x_{i-1}^{k_{i-1}}x_{i+1}^{k_{i+1}}\ldots x_n^{k_n}$$
является подкольцом кольца $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Предложение. Элемент x_i является трансцендентным над кольцом $K^{\langle i\rangle}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема. Кольцо $K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ является кольцом многочленов от одной переменной x_i над $K^{\langle i\rangle}$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема. Кольцо $K^{\langle i\rangle}$ является кольцом многочленов от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots,$ x_n над K (для всех $i = 1, 2, \ldots, n$).

Отметим, что описанный подход вполне доступен студентам педагогического университета. Соответственно предложенной авторами последовательности построения курса «Алгебра и теория чисел» (см. [21]), рассмотрению теории многочленов предшествует (согласно программе) достаточно детальное изучение абстрактной теории колец, поэтому большинство предлагаемых в настоящей статье теорем для студентов являются обычными стандартными задачами.

Заметим также, что такое достаточно детальное исследование сущности понятия многочлена действительно необходимо. Время, дополнительно затраченное на освещение нюансов, рассмотрение достаточного количества иллюстративных и конкретизирующих примеров, разбор структуры определения, окупается потом за счет более легкого и результативного усвоения свойств данного понятия. И наоборот, спешка при введении понятия многочлена, констатация формального определения без выяснения сущности «символов» x_1, x_2, ... , x_n, ненадлежащее, описательное обоснование свойств (например, «бегло» намеченный ход доказательства) не способствуют формированию четкого представления о сущности понятия многочлена и в результате приводят к трудностям при изучении последующих вопросов, к формальному усвоения всей теории.

Выводы. Предложенный в работе подход к введению понятия многочлена позволяет, как показывает практика, сформировать четкое представление студентов об этом понятии, является строго научным (для всех предложений получены строгие доказательства) и одновременно не громоздким, доступным.

Литература

1. *Требенко, Д.Я.* Введення поняття многочлена в університетському курсі «Алгебра і теорія чисел» / Д.Я. Требенко, О.О. Требенко // Вища освіта України. – Додаток 3. – Т. III (10) – 2008 р. – Тематичний випуск «Вища освіта України у контексті інтеграції до європейського освітнього простору». – С. 515–522.
2. *Требенко, Д.Я.* Методика введення поняття многочлена над комутативним кільцем з одиницею / Д.Я. Требенко, О.О. Требенко // Науковий часопис Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова. Серія № 5. Педагогічні науки: реалії та перспективи. – Вип. 17: зб. наук. праць. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. – С. 226–234.
3. *Костарчук, В.М.* Курс вищої алгебри, вид. 3 / В.М. Костарчук, Б.І. Хацет. – К.: Вища школа, 1969. – 540 с.
4. *Завало, С.Т.* Алгебра і теорія чисел: в 2 ч. / С.Т. Завало, В.М. Костарчук, Б.І. Хацет. – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1976. – Ч.2. – 384 с.
5. *Завало, С.Т.* Алгебра и теория чисел: в 2 ч. / С.Т. Завало, В.Н. Костарчук, Б.И. Хацет. – К.: Вища шк. Головне вид-во, 1980. – Ч. 2. – 470 с.
6. *Завало, С.Т.* Курс алгебри / С.Т. Завало. – К.: Вища шк., 1985. – 500 с.
7. *Хацет, Б.І.* Віктор Миколайович Костарчук у моєму житті / Б.І. Хацет // У світі математики. – 2003. – Т. 9. – Вип. 1. – С. 72–80.
8. *Бохер, М.* Введение в высшую алгебру / М. Бохер. – М.; Л.: Госуд. техн.-теорет. изд-во, 1933. – 291 с.
9. *Ляпин Е.С.* Алгебра и теория чисел: в 2 ч. / Е.С. Ляпин, А.Е. Евсеев. – М.: Просвещение, 1978. – Ч. 2.– 448 с.
10. *Винберг, Э.Б.* Курс алгебры / Э.Б. Винберг. – М.: Изд-во «Факториал Пресс», 2002. – 544 с.
11. *Курош, А.Г.* Курс высшей алгебры / Э.Б. Винберг. – М.: Наука, 1971. – 432 с.
12. *Фаддеев, Д.К.* Лекции по алгебре / Д.К. Фаддеев. – М.: Наука, 1984. – 416 с.
13. *Окунев, Л.Я.* Высшая алгебра. 4-е изд. / Л.Я. Окунев. – М.: Гос. изд-во техн.-теорет. литературы, 1949. – 432 с.
14. *Ван дер Варден, Б.Л.* Алгебра / Б.Л. Ван дер Варден. – М.: Наука, 1979. – 624 с.
15. *Jacobson, N.* Basic Algebra I. 2nd ed. / N. Jacobson. – New York, 1985. – 499 p.
16. *Проскуряков, И.В.* Числа и многочлены / И.В. Проскуряков. – М.: Просвещение, 1949. – 283 с.
17. *Куликов, Л.Я.* Алгебра и теория чисел / Л.Я. Куликов. М.: Высш. шк., 1979. – 560 с.
18. *Кострикин, А.И.* Введение в алгебру / А.И. Кострикин. – М.: Наука, 1977. – 496 с.
19. Allenby RBJT Rings, Fields and Groups. An introduction to Abstract Algebra. – London: Edward Arnold, 1883. – 294 p.
20. *Hungerford, Th.W.* Graduate Texts in Mathematics. Algebra / Th.W. Hungerford. – Springer-Verlag, New York, 1974. – 502 p.
21. *Требенко, Д.Я.* Особливості вивчення курсу «Алгебра і теорія чисел» в умовах кредитно-модульної системи / Д.Я. Требенко, О.О. Требенко // Проблеми фізико-математичної і технічної освіти і науки України в контексті Євроінтеграції (Вища освіта 2006): матеріали наук.-метод. конф. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2007. – С. 324–331.

Summary

Existing approaches to the introduction of the concepts of a polynomial in one or several variables over a commutative ring with identity in the Higher Algebra Course are analyzed and a new approach is proposed. It is the first time ever that to define a polynomial in several variables a concept of algebraically independent system of elements is used. This allows introducing the concepts of polynomials in one and several variables in complete analogue, emphasizes the characteristic properties of the concepts, reveals their essence and simplifies greatly the material presentation.

Поступила в редакцию 21.11.2013 г.