

УДК 378.016:517.983

**В.І. Матамаў,**кандыдат фізіка-матэматычных навук, дацэнт  
кафедры дыферэнцыяльных раўнанняў і сістэмнага аналізу БДУ;**Н.А. Гурыновіч,**выкладчык кафедры матэматычных і прыродазнаўчых дысцыплін  
Мінскага дзяржаўнага вышэйшага радыётэхнічнага каледжа;**В.А. Марчанка,**

магістрант ММФ БДУ

**ДА ПЫТАННЯ АБ ВЫКЛАДАННІ ТЭМЫ: «ФАЗАВЫЯ КРЫВЫЯ  
ЛІНЕЙНАЙ АДНАРОДНАЙ СІСТЭМЫ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНЫХ  
РАЎНАННЯЎ ДРУГОГА ПАРАДКУ»**

**Уводзіны.** Ва ўніверсітэцкім курсе «Дыферэнцыяльныя раўнанні» разглядаюцца аднародныя дыферэнцыяльныя раўнанні першага парадку (III сяместр). А пазней (у IV сяместры) вывучаецца тэма «Фазавыя крывыя лінейнай аднароднай сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў другога парадку». На наш погляд, гэтыя дзве тэмы можна разглядаць адначасова.

**Асноўная частка.** Разгледзім лінейную сістэму дыферэнцыяльных раўнанняў выгляду

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \alpha x + by \\ \frac{dy}{dt} = cx + \delta y, \end{cases} \quad (1)$$

дзе  $a, b, c, \delta$  – сапраўдныя лікі,  $a\delta - bc \neq 0$ . Сістэму (1) можна запісаць інакш:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

дзе матрыца  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & \delta \end{pmatrix}$ . Разам з сістэмай (1)

будзем разглядаць і дыферэнцыяльнае раўнанне (ДР)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{cx + \delta y}{ax + by} = \frac{c + \delta \frac{y}{x}}{a + b \frac{y}{x}} = f\left(\frac{y}{x}\right). \quad (2)$$

Будзем даследаваць і будаваць фазавыя крывыя (інакш фазавыя траекторыі) сістэмы (1) [1–3] у наваколлі становішча раўнавагі  $O(0, 0)$ . Пасля лінейнага пераўтварэння

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (\det S \neq 0)$$

сістэма (1.1) прымае від

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = S^{-1}AS \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Матрыцу  $S$  выбіраем так, каб  $S^{-1}AS = J$ , дзе  $J$  – жорданова нармальная форма матрыцы  $A$ . Матрыцу  $S$  можна знайсці з матрычнага раўнання  $AS = SJ$ .

Від фазавых крывых для сістэмы (1) залежыць ад каранёў характарыстычнага раўнання

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & \delta - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Магчымы наступныя выпадкі.

1. Карані  $\lambda_1, \lambda_2$  – сапраўдныя, розныя, прычым  $\lambda_1 \lambda_2 < 0$ . Тады становішча раўнавагі  $O(0, 0)$  – сядло.
2. Карані  $\lambda_1, \lambda_2$  – сапраўдныя, розныя, прычым  $\lambda_1 \lambda_2 > 0$ . Становішча раўнавагі  $O(0, 0)$  – вузел, прычым у гэтым выпадку ДР (2) мае дзве інтэгральныя «прамыя».
3. Карань  $\lambda_1$  мае кратнасць 2. Тады становішча раўнавагі  $O(0, 0)$  можа быць альбо вузлом (з адной інтэгральнай «прамой»), альбо дыкрытычным вузлом. У апошнім выпадку праз п.  $O(0, 0)$  праходзіць бясконцае мноства інтэгральных «прамых».
4. Карані  $\lambda_1, \lambda_2$  – чыста ўяўныя. Становішча раўнавагі  $O(0, 0)$  – цэнтр.
5. Карані  $\lambda_1, \lambda_2$  – камплексныя ( $\lambda_1 = p + qi, \lambda_2 = p - qi, p \neq 0$ ). Тады становішча раўнавагі  $O(0, 0)$  – фокус.

**Заўвага 1.** Дыкрытычны вузел будзе тады і толькі тады, калі сістэма мае від

$$\dot{x} = ax, \dot{y} = ay, a \neq 0.$$

**Заўвага 2.** Выпадкі, калі карані  $\lambda_1, \lambda_2$  – сапраўдныя, ахопліваюцца прыкладамі.

Разгледзім больш падрабязна выпадак, калі  $\lambda_1, \lambda_2$  – камплексныя лікі.

**Заўвага 3.** Паколькі  $a\delta - bc \neq 0$ , то раўнанне (4) не мае нулявых каранёў.

**Выпадак 4.** Карані раўнання (4) – чыста ўяўныя, гэта значыць, што  $\lambda_{1,2} = \pm qi, q \in \mathbf{R}, q \neq 0, i = \sqrt{-1}$ . Ад сістэмы (1) пераходзім да лінейнага ДР другога парадку

$$\ddot{x} - (a - \delta)\dot{x} + (a\delta - bc)x = 0. \quad (5)$$

Усе яго рашэнні ахопліваюцца формулай

$$x(t) = C_1 \cos qt + C_2 \sin qt, \quad (6)$$

дзе  $C_1, C_2$  – адвольныя пастаянныя. Паколькі  $y = \frac{1}{b}(\dot{x} - ax)$  (гл. сістэму (1)), то для другой

кампаненты будзем мець формулу

$$y(t) = \tilde{C}_1 \cos qt + \tilde{C}_2 \sin qt, \quad (7)$$

дзе  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  – лінейныя камбінацыі адвольных пастаянных  $C_1, C_2$ . З формул (6) і (7) бачым, што  $x(t)$  і  $y(t)$  – перыядычныя функцыі з адным і тым жа перыядам  $T = \frac{2\pi}{q}$ .

Дыферэнцыяльнае раўнанне (2) – адна-роднае. Яно пераходзіць само ў сябе пасля пераўтварэння  $x = kX, y = kY, k \neq 0$ . З гэтага выцякае наступнае: інтэгральная кривая адна-роднага ДУ (2) пад дзеяннем пераўтварэння  $x = kX, y = kY (k \neq 0)$  пераходзіць у інтэгральную кривую гэтага ж раўнання. Калі адна з інтэгральных крывых ДУ (2) замкнутая, то і ўсе астатнія інтэгральныя крывыя таксама замкнутыя. Няхай для сістэмы (1) пастаўлены ўмовы  $x(0) = x_0, y(0) = y_0$ , дзе  $|x_0| + |y_0| \neq 0$ . З перыядычнасці функцый  $x(t)$  і  $y(t)$  выцякае, што  $x\left(\frac{2\pi}{q}\right) = x_0, y\left(\frac{2\pi}{q}\right) = y_0$ . Гэта значыць, што фазавая кривая, якая праходзіць праз п.  $M_0(x_0, y_0)$ , замкнутая. У гэтым выпадку становішча раўнавагі  $O(0, 0)$  – цэнтр. Пакажам, што ўсе фазавыя крывыя ў гэтым выпадку – эліпсы (з агульным цэнтрам у п.  $O(0, 0)$ ). Выключаючы з раўнанняў (6) і (7) зменную  $t$ , атрымаем роўнасць:

$$\frac{(B_0 x - A_0 y)^2}{(B_0 x_0 - A_0 y_0)^2} + \frac{(y_0 x - x_0 y)^2}{(A_0 y_0 - B_0 x_0)^2} = 1, \quad (8)$$

дзе  $A_0 = \frac{ax_0 + by_0}{q}, B_0 = -\frac{q^2 x_0 + a^2 x_0 + aby_0}{bq}$ .

Відавочна, што раўнанню (8) у плоскасці  $Oxy$  адпавядае кривая другога парадку. Раней мы паказалі, што фазавая кривая, якая праходзіць праз п.  $M_0(x_0, y_0)$ , замкнутая. Вядома, што замкнутая кривая другога парадку – эліпс (у прыватнасці, акружнасць). Такім чынам, усе фазавыя крывыя ў гэтым выпадку – эліпсы з агульным цэнтрам у п.  $O(0, 0)$ . Напрамак руху пункта па фазавай крывой (пры  $t \rightarrow +\infty$ ) вызначаецца з дапамогай вектара хуткасці

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})\big|_{(1,0)} = (a; c).$$

**Выпадак 5.** Карані раўнання (4) – камплексныя ( $\lambda_{1,2} = \pm qi, q \in R, q \neq 0, p^2 = -1$ ). У гэтым

выпадку ўсе рашэнні сістэмы (1) даюцца формуламі

$$x(t) = e^{pt} (C_1 \cos qt + C_2 \sin qt); \quad (9)$$

$$y(t) = e^{pt} (\tilde{C}_1 \cos qt + \tilde{C}_2 \sin qt), \quad (10)$$

дзе  $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$  – лінейныя камбінацыі адвольных пастаянных  $C_1, C_2$ . Няхай  $p < 0$ , тады  $x \rightarrow 0$  і  $y \rightarrow 0$  пры  $t \rightarrow +\infty$  (для любых  $C_1, C_2$ ). У гэтым выпадку  $O(0, 0)$  – фокус. Фазавыя крывыя – лагарыфмічныя спіралі. Калі  $p < 0$ , то спіралі закручваюцца. А калі  $p > 0$ , то спіралі раскручваюцца.

**Прыклад 1.** Вызначыць тып становішча раўнавагі сістэмы раўнанняў  $\dot{x} = y, \dot{y} = 2x + y$  і даследаваць паводзіны фазавых крывых.

Характарыстычнае раўнанне мае выгляд:

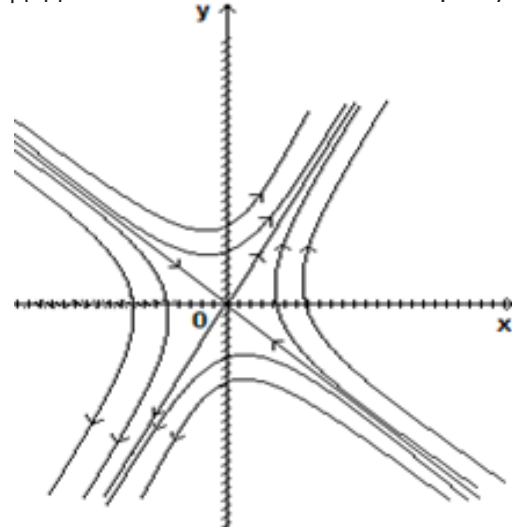
$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 (\lambda^2 - \lambda - 2 = 0).$$

Паколькі яго карані  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$  – сапраўдныя і маюць розныя знакі, то будзем мець, што  $O(0, 0)$  – сядло. Сепаратрысы сядла шукаем у выглядзе  $y = kx$ . Падставіўшы  $y = kx$  у дыферэнцыяльнае раўнанне

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y}{y}, \text{ атрымаем роўнасць } k = \frac{2 + k}{k}.$$

Адсюль  $k_1 = 2, k_2 = -1$ . Гэта значыць,  $y = 2x, y = -x$  – фазавыя «прамыя».

Напрамкі руху пунктаў па фазавым траекторыям вызначаем з дапамогай вектара хуткасці  $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y})\big|_{(1,0)} = (0; 2)$ . Фазавыя крывыя для дадзенай сістэмы паказаны на рысунку 1.



Рысунк 1

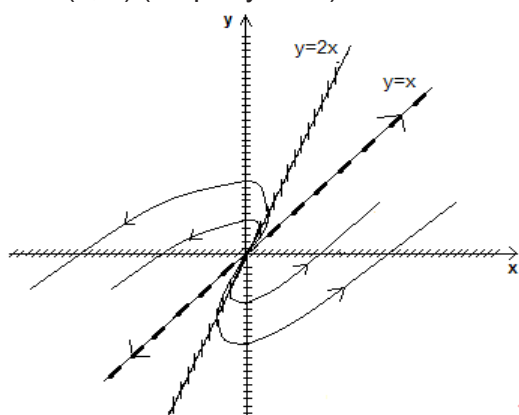
**Прыклад 2.** Вызначыць тып становішча раўнавагі і даследаваць паводзіны фазавых крывых сістэмы раўнанняў  $\dot{x} = 2x - y, \dot{y} = x$ .

Састаўляем і рашаем характарыстычнае раўнанне:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0, \lambda_{1,2} = 1.$$

Паколькі яго карань мае кратнасць два, то становішча раўнавагі  $O(0, 0)$  – выраджаны вузел. Інтэгральныя «прамыя» шукаем у выглядзе  $y = kx$  ( $x \neq 0$ ). Падстаўляючы  $y = kx$  у дыферэнцыяльнае раўнанне  $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{2x - y}$ , атрымаем роўнасць  $k = \frac{1}{2 - k}$ . Адсюль  $k = 1$ .

Значыць,  $y = x$  ( $x > 0$ );  $y = x$  ( $x < 0$ ) – прамене-выя траекторыі сістэмы. Напрамкі руху пунктаў па фазавым траекторыям можна вызначыць так: з другога раўнання сістэмы  $\dot{y} = x$  вынікае, што ў фазавай паўплоскасці  $x > 0$  ардыната фазовага пункта ўзрастае, паколькі  $\dot{y}(t) > 0$ . Такім чынам, рух пунктаў па фазавым траекторыям адбываецца (пры ўзрастанні часу) ад пункта  $O(0, 0)$  (гл. рысунак 2).



Рысунак 2

**Прыклад 3.** Даследаванне паводзін фазавых крывых сістэмы раўнанняў  $\dot{x} = x - y, \dot{y} = 2x - y$ .

Характарыстычнае раўнанне

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

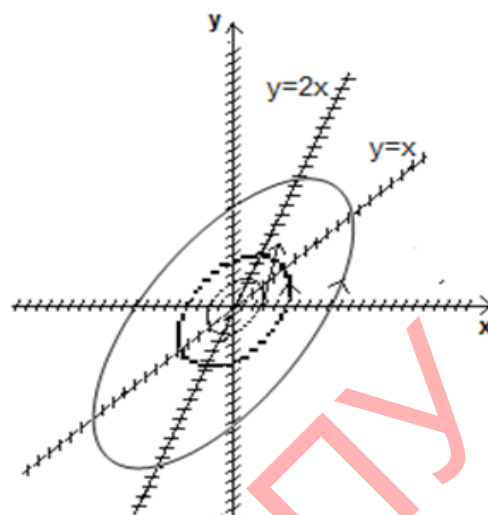
мае камплексныя карані  $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$ , прычым чыста ўяўныя. Значыць, становішча раўнавагі  $O(0, 0)$  – цэнтр. З дыферэнцыяльнага раўнання

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x - y}{x - y}$$

атрымаем, што  $y = 2x$  – 0-ізакліна, а  $y = 2x - \infty$  – ізакліна. Напрамкі руху пунктаў па фазавым траекторыям вызначаем з дапамогай вектара хуткасці

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}) \Big|_{(1,0)} = (1, 2).$$

для дадзенай сістэмы паказаны на рысунку 3.



Рысунак 3

**Прыклад 4.** Даследаваць паводзіны фазавых крывых сістэмы раўнанняў

$$\dot{x} = x - y, \dot{y} = x + y.$$

Характарыстычнае раўнанне мае выгляд:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0).$$

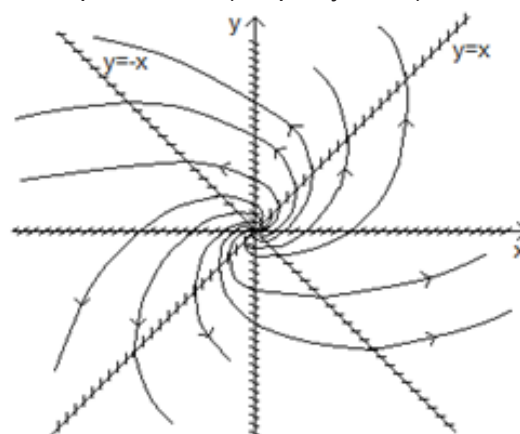
Паколькі яго карані  $\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$  – камплексныя, то атрымаем, што  $O(0, 0)$  – фокус.

З дыферэнцыяльнага раўнання  $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y}$

маем:  $y = -x$  – 0-ізакліна, а  $y = x - \infty$  – ізакліна. Напрамкі руху пунктаў па фазавых крывых вызначаны з дапамогай вектара хуткасці

$$\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}) \Big|_{(1,0)} = (1, 1).$$

Паколькі  $Re \lambda_{1,2} = 1 > 0$ , то спіралі раскручваюцца пры  $t \rightarrow +\infty$  (гл. рысунак 4).



Рысунак 4

**Прыклад 5.** Рашыць сістэму

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

і вызначыць тып становішча раўнавагі.

Характарыстычнае раўнанне

$$\begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 1 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

мае карані  $\lambda_1 = -2$ ,  $\lambda_2 = -5$ . Значыць, становішча раўнавагі  $O(0, 0)$  – вузел.

Пасля лінейнага пераўтварэння

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

атрымаем сістэму  $\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ .

Адсюль  $u = C_1 e^{-2t}$ ,  $v = C_2 e^{-5t}$ , дзе  $C_1, C_2$  – адвольныя пастаянныя. Матрыца  $S$  задавальняе матрычнаму раўнанню

$$\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

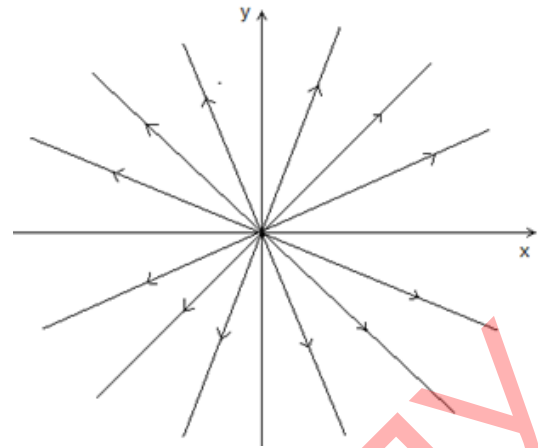
Пасля пэўных падлікаў шукаемая матрыца

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Відавочна, што  $\det S = -3 \neq 0$ . Такім чынам, агульнае рашэнне зыходнай сістэмы будзе мець від

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} \\ C_2 e^{-5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t} \\ C_1 e^{-2t} - C_2 e^{-5t} \end{pmatrix}.$$

**Заўвага 4.** Для сістэмы  $\dot{x} = 2x$ ,  $\dot{y} = 2y$  пункт  $O(0, 0)$  – дыкрытычны вузел. Фазавыя «прамыя» паказаны на рысунку 5.



Рысунк 5

**Заклучэнне.** У артыкуле разгледжаны сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў выгляду  $\dot{x} = ax + by$ ,  $\dot{y} = cx + \delta y$ , дзе  $a, b, c, \delta$  – сапраўдныя лікі, прычым  $a\delta - bc \neq 0$ . Выкарыстоўваючы метады ізоклін, пабудаваны фазавыя крывыя зыходнай сістэмы ў наваколлі становішча раўнавагі  $O(0, 0)$ . У выпадку комплексных каранёў характарыстычнага раўнання робіцца пераход ад разглядаемай сістэмы да лінейнага дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку. Падрабязна паказана, што ў выпадку чыста ўяўных каранёў характарыстычнага раўнання фазавыя крывыя зыходнай сістэмы ўяўляюць сабой эліпсы з агульным цэнтрам у п.  $O(0, 0)$ .

#### ЛІТАРАТУРА

1. Степанов, В.В. Курс дифференциальных уравнений / В.В. Степанов. – М.: ГИФМЛ. 1958. – С. 468.
2. Эльсгольц, Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л.Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969. – С. 424.
3. Мышкис, А.Д. Математика для ВТУЗов. Специальные курсы / А.Д. Мышкис. – Наука, 1971. – С. 632.

#### SUMMARY

The article describes systems of differential equations of the form  $\dot{x} = ax + by$ ,  $\dot{y} = cx + \delta y$ , where  $a, b, c, \delta$  are real numbers, with  $a\delta - bc \neq 0$ . Using the method of isoclines, phase curves of the original system near the position of equilibrium  $O(0, 0)$  are built. In the case of complex roots of the characteristic equation, transition is made from the considered system to a second-order linear differential equation. It is shown in detail that in the case of purely imaginary roots of the characteristic equation, phase curves of the original system are ellipses with a common centre in  $O(0, 0)$ .

Паступіў у рэдакцыю 24.11.2013 г.