МЕТОДЫКА ВЫКЛАДАННЯ

МЕТОДЫКА ВЫКЛАДАННЯ МАТЭМАТЫКІ

УДК 378.016:517

Н.В. Бровка,
доктор педагогических наук,
профессор кафедры теории функций БГУ

О МЕТОДИКЕ ОБУЧЕНИЯ СТУДЕНТОВ МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРАЦИИ ТЕОРИИ И ПРАКТИКИ

В условиях реорганизации и перестройки процесса обучения математике в вузе одним из продуктивных путей реализации компетентностного подхода является методика интеграции теории и практики обучения студентов математике. Интеграция теории и практики может стать средством повышения качества математической подготовки студентов, если теорию и практику обучения представлять как логически-взаимосвязанные формы, которые существуют одна в другой, одна подле другой, но никак не одна после другой. Мы опираемся на следующее определение: интеграция теории и практики обучения – это целенаправленное, систематическое объединение в целое, согласование, соотнесение и упорядочение теоретических положений и способов практической деятельности в обучении студентов математике [1].

Деятельность преподавателя в процессе обучения на основе интеграции теории и практики предполагает наличие обратной связи и строится на гибком применении методов преподавания и обучения. Варьирование методов осуществляется путем применения и сочетания определенных отобранных приемов обучения. Как известно, приемы представляют собой отдельные элементы, из которых складываются методы обучения. Перечислим некоторые методические приемы, которые используются нами в практике обучения студентов математическому анализу для продуктивного формирования академических и профессиональных компетенций студентов на основе интеграции теории и практики обучения. Математический анализ выбран из дисциплин курса высшей школы в связи с тем, что, во-первых, этот курс является фундаментом изучения высшей математики в целом, во-вторых, он обладает такими характерными особенностями математической науки, как фундаментальность, качественный характер исследования математических объектов, опора на символьный математический язык; и в-третьих, он связан существенными преемственными связями со школьным курсом алгебры и начал анализа.

Интеграция теории и практики в процессе обучения студентов математическому анализу в методике обучения этому курсу предусматривает:

- мотивацию введения изучаемых понятий посредством рассмотрения их использования в смежных математических дисциплинах и прикладных задачах;
- элементы эвристического и проблемного обучения, а также включение в содержание обучения «парадоксальных» математических и исторических фактов, выполняющих функцию аттракторов в процессе изучения математики;
- использование приемов смысловых опор и алгоритмизации при обучении определениям и способам исследования математических объектов.

Указанные приемы позволяют обеспечить следование принципам преемственности, систематичности, а также требованию сочетания научной строгости и доступности изложения материала. Уточним, в чем состоят некоторые из упомянутых приемов.

Мотивация введения изучаемых математических понятий путем установления их внутри-, междисциплинарных и трансдисциплинарных связей, а также рассмотрения их прикладных аспектов согласуется с концепцией бинарности, согласно которой каждый учебный предмет в высшей школе имеет двустороннюю значимость – внутрисодержательную и прикладную [2]. Прикладная значимость понимается здесь в широком смысле: и как рассмотрение приложений математических объектов к решению задач естествознания, и как реализация взаимосвязи академических и профессиональных компетенций в процессе подготовки будущих математиков. С развитием наук взаимосвязь теории и практики в математике перестает быть непосредственной. Математические исследования и их результаты отделены от решаемых практических задач несколькими ступенями абстрагирования. Это необходимо учитывать в процессе преподавания. Отличие математики от других наук состоит, возможно, лишь в том, что в математике с ее исходными абстрактными понятиями и «абстракциями над абстракциями» бывает сложно уловить исходные процессы или явления, которые стали источником для теоретических построений.

Относительно прикладных аспектов следует отметить, что на механико-математическом факультете Белорусского государственного университета проводится студенческая научно-исследовательская работа, связанная с математическим моделированием и прогнозированием поведения механических и биомеханических систем. В качестве примера актуальных направлений исследований БГУ, которые получили поддержку Государственного комитета Республики Беларусь по науке и технологиям, можно выделить:

– разработки аналитических линейно- и вязкоупругих моделей периодонтальной связки (между корнем зуба и костной тканью зубной альвеолы);
– разработки математической модели ортодонтического аппарата, применяемого для расширения верхней челюсти у пациентов с перекрестным прикусом;
– методику прогнозирования патологических переломов в длинных трубчатых костях после проведения хирургических операций по удалению опухолеподобных поражений [3–4].

К историческим фактам, которые могут способствовать мотивации изучения понятия предела в курсе анализа, можно отнести апории Зенона об Ахиллесе и черепахе; при изучении множества действительных чисел полезно привести факты из истории развития взглядов на отрицательные числа, при изучении определенных интегралов – о методе исчерпываний Евдокса, принципе Кавальери, а также о втором законе Кеплера, нарушение которого в поведении Урана явилось толчком для математического обоснования открытия планеты Нептун. Большой интерес вызывают факты, что площадь или объем не всякого множества можно измерить, что для бесконечного множества его часть может содержать столько же элементов, сколько все множество, что в отрезке длины единица и в квадрате площади единичной площади содержится одинаковое «количество» точек и др.

Приведем пример внутридисциплинарных связей в курсе математического анализа. Одной из первых тем курса является тема «Действительные числа», способы введения которых различны. Это может быть либо аксиоматический подход, либо изложение теории сечений Р. Дедекинда, либо теория десятичных дробей (по Вейерштрассу), либо введение чисел как классов эквивалентных последовательностей Коши (теория Кантора). Последний подход строится на изучении таких алгебраических объектов, как бинарные отношения, а точнее, отношение эквивалентности и отношение порядка. В свою очередь, эти отношения рассматриваются на таких базовых определяющих понятиях теории множеств, как понятие множества и взаимно-однозначного соответствия. Какой бы способ введения действительных чисел ни был выбран, целесообразно на лекции по этой теме сделать обзор возможных подходов к ее изучению. Самое большое удивление у вчерашних школьников вызывает тезис о том, что способ изложения этой темы, который дается в средней школе, не является математически строго обоснованным. Эта «вольная» трактовка аксиоматического подхода, при котором и единица, и ноль могут рассматриваться как равноправные элементы, нейтральные относительно бинарных операций умножения и сложения соответственно. Поэтому тот факт, что один нейтральный элемент больше другого, то есть $1>0$, требует доказательства. Эта мысль всегда вызывает удивление и интерес. Почти всегда находятся студенты, желающие изучить строго аксиоматический подход и сделать сообщение на семинаре по учебно-исследовательской работе (доказательство этого факта на основе аксиоматического подхода приведено в учебнике В.А. Зорича [5]). Независимо от того, какой способ изложения темы «Действительные числа» выбран преподавателем, семь краеугольных теорем математического анализа раздела «Сходимость на множестве действительных чисел» изучаются обязательно, поскольку существенно важны для дальнейшего изучения не только курса математического анализа. Это следующие теоремы:

– критерий Коши сходимости последовательности;
– лемма о вложенных отрезках;

- теорема Больцано-Вейерштрасса;
- теорема о возможности выбора сходящейся последовательности из любой ограниченной;
- теорема о верхней и нижней гранях;
- теорема о сходимости монотонной последовательности;
- лемма Гейне-Бореля о покрытиях.

При различных подходах к изучению темы «Действительные числа» различается последовательность изучения приведенных выше утверждений, несколько варьируются способы доказательства. Принципиально важным является факт, на который следует обратить внимание студентов, обучающихся на математических факультетах, – равносильность этих утверждений и эквивалентность их полноте множества действительных чисел как метрического пространства. Установление факта равносильности этих утверждений позволяет разрозненные на первый взгляд теоретические положения связать между собой единой идеей. Тем самым формируется панорамное виденье математики на основе актуализации взаимосвязи математического анализа, элементов топологии и функционального анализа.

Известно, что построение отрицаний в математических утверждениях, записанных символьным языком математики, основано на правиле логики предикатов. Состоит оно в том, что при построении отрицаний квантор общности – $\forall$ (любой, всякий, для любого) заменяется квантором существования – $\exists$ (существует, найдется хотя бы один) и наоборот. Кроме того, соответственно изменяются на противоположные или обратные и другие математические отношения и связки (знаки следования, неравенства и т. д.). Как свидетельствует практика обучения студентов, часто трудности возникают при построении символьных формулировок противоположных (бинарных) понятий ограниченный – неограниченный, монотонный – немонотонный, непрерывный – разрывный и др. Прием бинарных оппозиций состоит в рассмотрении в парах не только свойств математических объектов, являющихся прямым отрицанием друг друга. Практика обучения показывает, что важно предусмотреть также упражнения на исследование того, являются ли бинарными оппозициями, то есть взаимно-исключающими друг друга, такие свойства, как, например:

- ограниченность и сходимость для последовательности;
- непрерывность – дифференцируемость, непрерывность – интегрируемость, непрерывность и монотонность для функции;
- неравномерная сходимость и дифференцируемость для суммы функционального ряда и др.

Взаимосвязи этих свойств содержатся в формулировках соответствующих теорем курса, однако их усвоение студентами носит часто формальный характер, поскольку целенаправленно внимание подобным вопросам на практических занятиях не уделяется. Однако в теоретической части курса теоремы, касающиеся сходимости, непрерывности и т. д. различных математических объектов (функциональных рядов, несобственных интегралов и др.), затрагивают именно эти свойства и периодическое, распределенное во времени повторение связей между этими качествами способствует осмысленному запоминанию материала.

Усвоение курса математического анализа предполагает не только формирование умений вычислять пределы, производные и интегралы, но и осуществлять исследование математических объектов на наличие (или отсутствие) некоторых свойств. Речь идет о таких свойствах, как непрерывность, дифференцируемость, равномерная сходимость (функций, функциональных рядов, интегралов) и др. Программа курса предусматривает обучение студентов такому исследованию в соответствии с определением, некоторым признаком или критерием. Несмотря на то, что в определении или признаке соответствующие необходимые или достаточные условия всегда сформулированы достаточно четко, проверка их на практике вызывает у студентов определенные затруднения.

Практика обучения свидетельствует о том, что усвоение материала является более успешным, если применять прием алгоритмизации, например, при исследовании функциональных рядов на равномерную сходимость по признакам Абеля или Дирихле или критерию. Как правило, даже выучив формулировку этого признака наизусть, студенты не связывают перечисляемые требования с практическими действиями, которые необходимо совершить для исследования в конкретном примере. Проиллюстрируем это на примере критерия равномерной сходимости функциональных рядов, который называют еще «супремальным», чтобы отличать его от критерия Коши.

Сформулируем критерий равномерной сходимости функциональной последовательности: функциональная последовательность $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится на множестве

$X \subset R$ к функции $f(x)$ тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in X}\left|f_n(x)-f(x)\right|=0.$$

Ориентировочная основа действий в соответствии с этим критерием может быть представлена в виде алгоритма, состоящего из следующих шагов:

1) найти предельную функцию последовательности $\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$:
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x);$$
2) выписать выражение $f_n(x) - f(x)$;
3) найти верхнюю грань значений его модуля:
$$\sup_{x\in X}\left|f_n(x)-f(x)\right|.$$
Для этого можно применить обычную схему нахождения стационарных точек функции, то есть
   а) вычислить производную выражения $f_n(x) - f(x)$;
   б) найти нули производной, то есть решить уравнение $\left(f_n(x)-f(x)\right)'=0$;
4) вычислить значения выражения $f_n(x) - f(x)$ в стационарных точках и на границе множества $X \subset R$. Выбрать наибольшее из найденных значений, которое и будет
$$\sup_{x\in X}\left|f_n(x)-f(x)\right|$$
(как правило, оно представляет собой выражение, зависящее от n);
5) перейти к пределу при $n\to\infty$ в полученном на предыдущем шаге выражении, тем самым вычислив $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in X}\left|f_n(x)-f(x)\right|$;
6) если полученный предел равен нулю, последовательность
$$\left(f_n(x)\right)_{n=1}^{\infty}$$
сходится к функции $f(x)$ равномерно на $X \subset R$. В противном случае сходимость будет неравномерной.

Как видно из приведенного примера, выполнение данного задания предполагает формирование интегративного умения исследовать функциональную последовательность на равномерную сходимость. Интегративный характер задания заключается в том, что его выполнение требует умений разложить сложную задачу на составляющие, систематизировать их и выполнить соответствующие действия. Эти действия включают владение навыками вычислять пределы, находить производные, исследовать функцию на экстремум. Практика свидетельствует, что наибольшие трудности вызывают третий и четвертый шаги, которые связаны с исследованием свойств функционального выражения. Чтобы выполнить задания успешно, необходимо актуализировать знания и умения по исследованию функций, которые были приобретены частично еще в школе, затем на первом курсе вуза при изучении математического анализа.

Такой подход позволяет упорядочить способы деятельности, способствуя формированию взаимосвязи академических и профессиональных компетенций студентов математических факультетов. Это отвечает целям современного математического образования, состоящим не только в том, чтобы студент овладел предметным знанием, аппаратом математических действий, методов и приемов, но также освоил основы творческой деятельности, методологии научного поиска и был способен применять их в дальнейшей профессиональной деятельности.

Литература

1. *Бровка, Н.В.* Интеграция теории и практики обучения математике как средство повышения качества подготовки студентов / Н.В. Бровка. – Минск: БГУ, 2009. – 243 с.
2. *Архангельский, С.И.* Учебный процесс в высшей школе, его закономерные основы и методы / С.И. Архангельский. – М.: Высш. шк., 1980. – 367 с.
3. Программный модуль «Orthodontic Appliance Modeler» CAD пакета CATIA V5 : с. о регистрации компьютерной программы / С.А. Наумович, А.Н. Доста, С.М. Босяков, К.С. Юркевич; Национальный центр интеллектуальной собственности. – № 30. – 2008.
4. Программа расчета прочностных характеристик длинных трубчатых костей человека: с. о регистрации компьютерной программы / И.Э. Шпилевский, С.М. Босяков, К.С. Юркевич, А.В. Сененко; Национальный центр интеллектуальной собственности. – № 502. – 2013.
5. *Зорич, В.А.* Математический анализ: учеб. для ун-тов: в 2 ч. / В.А. Зорич. – М.: Наука, 1981. – Ч. 1. –543 с.

Summary

The article describes some methods used in teaching of Mathematical analysis on the basis of integration of the theory and practice of training. They include the use of interdisciplinary connections and the algorythm description of research tasks' solving. These methods are fundamental for studying of Mathematical analysis and other disciplines of mathematical cycle. The interrelation of theoretical positions and practical implementation promotes effective mastering of the subject.

Поступила в редакцию 18.04.2014 г.