# III. ЭЛЕКТРИЧЕСТВО

## 10. Электростатика

### 10.1. Электризация тел. Электрический заряд. Закон Кулона

**Электризация тел. Электрический заряд.** Согласно современной физической картине мира взаимодействия в макро- и микромире подразделены на четыре фундаментальных типа: *гравитационное*, *электромагнитное*, *сильное ядерное* и *слабое ядерное*. Если третий и четвертый тип присущ миру атомов и элементарных частиц, а первый – объектам Вселенной, обладающим колоссальными массами, то процессы в окружающем нас макромире представляют собой проявление электромагнитного взаимодействия.

Проявление электромагнитного взаимодействия между телами, которое заключалось в их взаимном притяжении или отталкивании, описывалось еще в Древней Элладе. Было замечено, что если потереть кусочки янтаря о шелк, то к янтарю начинают притягиваться пылинки. Мы же можем наблюдать, как сухие волосы «прилипают» при расчесывании к пластмассовой расческе, подобное же «прилипание» происходит и для некоторых типов тканей при ношении одежды из них, для устранения чего имеются специальные средства под загадочным для непосвященного названием «Антистатик». Отметим также, что в состав этих тканей входят синтетические нити. Однако для аналогичных предметов из других материалов проявление подобных реакций отсутствует.

При изучении такого рода взаимодействий было отмечено, что предметы из различных материалов, будучи «намагниченными» путем трения о шелк или шерсть, ведут себя двояким образом при действии друг на друга: они либо притягиваются, либо отталкиваются, поскольку на них «появляются» электрические заряды двух «сортов». Такие приобретенные свойства объектов стали связывать с появлением у них электрического заряда, а сам процесс приобретения телом заряда назвали *электризацией*. Исторически сложилось так, что зарядом «положительного сорта» принято считать тот, который проявляется на стекле после того, как оно было потерто о шелк. На эбонитовой же палочке, потертой о шерсть, проявляется заряд «отрицательного сорта». В свою очередь, и шелк, и шерсть после взаимодействия получают отрицательный и положительный заряды.

Отметим далее, что электрический заряд мог «появиться» у предметов не только после того, как они были потерты о шелк или шерсть, но и после того, как они были приведены в контакт с телами, уже заряженными ранее указанными выше способами. Т. е. электрический заряд «перетекал» с заряженных тел на незаряженные; последние мы можем наделить термином «электрически нейтральные» – не участвующие в электромагнитном взаимодействии.

Дальнейшие эксперименты продемонстрировали, что в природе не существует заряда, меньшего, чем тот, которым обладает элементарная частица электрон, которой приписали отрицательный знак заряда. Заряд такой же минимальной величины, однако «положительного» сорта был обнаружен у другой частицы – протона. И электроны, и протоны входят в состав атомов – мельчайших частиц вещества, которым присущи его свойства. Существенным является то, что несмотря на превышение массы протона над массой электрона в 1836 раз количество тех и других у атомов различных веществ всегда равное. Таким образом, атом является в целом нейтральным – эксперименты продемонстрировали, что протоны входят в состав атомного ядра, а электроны формируют электронную оболочку. Нейтральность атомов обусловливает и нейтральность объектов макромира. Электризация же есть перераспределение электрических зарядов между взаимодействующими телами. В твердых телах осуществляется переход электронов от одних тел к другим при сближении их на достаточное для этого перехода расстояние ($\sim 0{,}1$ нм), а «натирание» играет вспомогательную роль, способствующую такому сближению.

Направление же такого перехода определяется внутренними свойствами этих тел: то из них, от которого электроны «ушли», приобрело *положительный заряд* (количество протонов превышает количество электронов); получившее же избыточные электроны заряжается в свою очередь *отрицательным зарядом* (в этом случае перевешивает «электронная» чаша). Количественная же характеристика величины такого заряда определяется числом приобретенных или потерянных электронов. Полный заряд всегда оказывается кратным заряду электрона. Обозначив абсолютную величину элементарного заряда символом $|e|$, можно записать заряд электрона как $-|e|$, а заряд протона – как $+|e|$. Для обозначения величины электрического заряда в литературе устоявшимися являются латинские символы $q_i$ и $Q_i$, где индекс *i* обозначает номер заряда (например, $q_1 = -\,2|e|$ или $Q_0 = 3|e|$ и т. д.). В некоторых источниках символ *e* используется для обозначения заряда электрона.

Для измерения величины заряда тел используется измерительный прибор – электрометр (рис. 150). Соприкосновение заряженного тела с металлическим стержнем электрометра приводит к переходу на него с тела части имеющегося там заряда. С противоположного конца на стержне закреплена ось со стрелкой, которая может свободно вращаться вокруг оси. Поскольку все детали металлические и находятся между собой в контакте, то основная часть полученного стержнем заряда распределяется между ним и стрелкой. Вследствие того что эти заряды одного знака, стрелка, отталкиваясь от стержня, поворачивается на некоторый угол, который, в свою очередь, зависит от количества полученного стержнем заряда. Противоположный конец стрелки, двигаясь вдоль имеющейся шкалы, показывает величину угла.

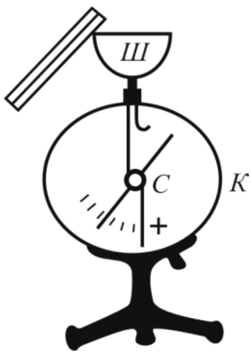

Рис. 150

Одним из основных свойств электрического заряда является его *аддитивность*: полный электрический заряд тела есть алгебраическая (т. е. взятая с учетом знаков) сумма зарядов всех составляющих его частей. С использованием введенной выше символики это свойство запишется в виде следующего выражения:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_n = \sum_{i=1}^{n} Q_i \ .$$

Электрический заряд обладает также свойством *инвариантности*, как то: при переходе из одной системы координат в другую численное значение заряда тела остается неизменным.

Поскольку все объекты в окружающем нас мире электрически нейтральны, то это означает равенство имеющихся у них положительных и отрицательных зарядов. Это приводит нас к фундаментальному *закону сохранения электрического заряда*: алгебраическая сумма зарядов, входящих в изолированную систему тел, остается неизменной при любом перераспределении зарядов внутри этой системы. Математически для системы из $n$ зарядов этот закон записывается с помощью следующего выражения:

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots + Q_n = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \mathrm{const}\ .$$

Как было отмечено выше, результатом процесса электризации является нарушение электрической нейтральности тела – исчезает паритет между зарядами разных знаков. Однако если у отрицательно заряженного тела «отнять» излишек электронов в таком количестве, чтобы число положительных и отрицательных зарядов уравнялось между собой, то тело вновь станет электрически нейтральным. Этот процесс называется *нейтрализацией*.

Для описания электрического взаимодействия между телами необходимо первоначально рассмотреть упрощенную модель. Поскольку она будет построена в макромире, то хотелось бы абстрагироваться от форм и размеров. Введем понятие *точечного электрического заряда*, под которым будем понимать следующее: весь имеющийся заряд сосредоточен в некоторой точке пространства, которая может быть локализована в выбранной системе координат. Это понятие является абстрактным. Непосредственно в опытах в качестве точечных зарядов могут быть использованы заряженные шары, однако в этом случае *под* *расстоянием между точечными зарядами следует понимать расстояние между центрами шаров*.

**Закон Кулона.** Рассмотрим опыт по изучению электрического взаимодействия между изначально покоящимися заряженными шариками, который был проведен в 1875 г. французским военным инженером Ш.О. Кулоном. Отметим, что впервые подобный опыт был поставлен лордом Кавендишем в своей лаборатории, однако полученные результаты были обнаружены в его архивах уже после того, как Кулон установил зависимость силы взаимодействия между телами от величины имеющегося у них электрического заряда.

Схема опыта Кулона изображена на рис. 151. На тонкой металлической нити подвешено легкое изолирующее коромысло, имеющее на одном конце шарик, а на другом – противовес. Верхний конец нити закреплен на вращающейся головке прибора, которая позволяет очень точно отсчитывать угол закручивания нити. Внутрь прибора помещен второй шарик, точно такой же, как и первый. Вся установка помещена в стеклянный цилиндр. Для установления зависимости силы взаимодействия от расстояния между шариками им сообщают электрический заряд произвольной величины, касаясь их третьим заряженным шариком, закрепленным на изолирующей рукоятке. Получив одноименный заряд, два шарика расходятся на некоторое расстоянии друг от друга. Вращая головку прибора, закручивают нить подвеса, замеряя при этом расстояния между шариками при разных усилиях закручивания нити. Так как угол закручивания нити пропорционален моменту крутящей силы, то и изменение угла закручивания нити пропорционально изменению момента силы. Таким образом, можно рассчитать изменение силы взаимодействия в зависимости от изменения расстояния. В результате проведенных опытов Кулон установил, что силы взаимодействия между двумя заряженными шариками направлены вдоль прямой, соединяющей их

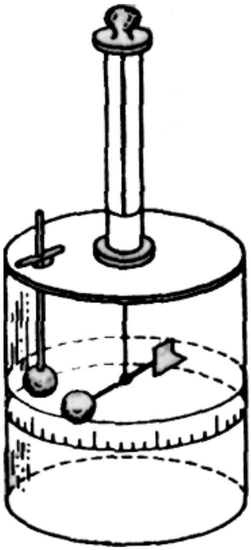

Рис. 151

центры, и обратно пропорциональны квадрату расстояния между ними:

$$F \sim \frac{1}{r^2}. \qquad (10.1)$$

Латинскими символами $F$ и $r$ обозначены, соответственно, сила и расстояние. Установление зависимости силы взаимодействия между заряженными шариками осложнялось тем, что во времена Кулона не существовало единиц для измерения электрического заряда. Однако если выбрать третий незаряженный шарик идентичным первым двум, то в случае касания им одного из заряженных шариков, находящихся в стеклянном цилиндре, заряд последнего разделится ровно пополам, а сила взаимодействия между первым и вторым шарами уменьшится в два раза. Повторяя этот прием несколько раз, Кулон установил, что сила прямо пропорциональна величинам зарядов шариков. Содержание *закона Кулона* можно сформулировать следующим образом: *сила взаимодействия двух точечных зарядов в вакууме направлена вдоль прямой, соединяющей заряды, пропорциональна их величинам и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними*:

$$F = k\frac{q_1 q_2}{r^2}, \qquad (10.2)$$

где $q_1$, $q_2$ – величины взаимодействующих зарядов, $k$ – коэффициент пропорциональности, который зависит от выбора системы единиц. В системе СИ электрический заряд измеряется в *кулонах (Кл)*, однако эта единица не является основной. 1 кулон – это заряд, который переносится через поперечное сечение проводника за 1 секунду при силе постоянного тока в проводнике, равной 1 *амперу*. Единица же измерения силы тока «ампер» является основной, а вводится она посредством взаимодействия токов.

Коэффициент $k$ численно равен силе взаимодействия между двумя точечными зарядами величиной в 1 кулон, которые расположены на расстоянии 1 метр друг от друга в вакууме:

$$k = 9 \cdot 10^9 \ \text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2. \qquad (10.3)$$

В других системах единиц этот коэффициент принимает другие численные значения. В системе СИ он выражается через другие постоянные следующим образом:

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \tag{10.4}$$

где $\varepsilon_0$ – электрическая постоянная с численным значением

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\text{Кл}^2/(\text{Н} \cdot \text{м}^2) = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\,\text{Ф/м},$$

а $\pi$ – число «пи».

Поскольку сила – величина векторная, то из необходимости соблюдения размерности следует придать правой части выражения (10.2) размерность векторной величины. В произвольно выбранной декартовой системе координат положение каждого из точечных зарядов $q_1$ и $q_2$ задается радиус-векторами $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ соответственно. Зададим вектор относительного положения зарядов относительно друг друга:

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1.$$

Тогда сила, с которой заряд $q_1$ действует на заряд $q_2$, запишется в виде следующего выражения:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\vec{r}_{12}^{\,2}}\frac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}.$$

В свою очередь, выражение для силы, с которой заряд $q_2$ действует на заряд $q_1$, есть

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\vec{r}_{21}^{\,2}}\frac{\vec{r}_{21}}{|\vec{r}_{21}|}.$$

Поскольку $\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = -\vec{r}_{12}$, то и $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, что находится в полном соответствии с третьим законом Ньютона. Отметим, что отношение $\dfrac{\vec{r}_{12}}{|\vec{r}_{12}|}$ есть единичный вектор в заданном направлении. Численные значения для зарядов следует подставлять в эти формулы с учетом их знаков, что определит направление действующих между ними сил.

Если поместить один из зарядов (для определенности выберем $q_1$) в начало системы координат, то координаты второго ($q_2$) можно задать радиус-вектором $\vec{r}$; тогда сила, с которой заряд $q_1$ действует на заряд $q_2$, задается выражением

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{\vec{r}^{\,2}}\frac{\vec{r}}{|\vec{r}\,|}.$$

Выражение для силы, с которой заряд $q_2$ действует на заряд $q_1$, отличается от записанного выше только наличием знака «минус».

Если ставится задача о вычислении силы, действующей на некоторый заряд со стороны *n* других зарядов, то следует записать *n* выражений для сил, перебрав соответствующие пары зарядов (т. е. 1-й и 2-й, 1-й и 3-й, …, 1-й и *n*-й), а затем воспользоваться правилами векторной алгебры.

В случае, когда заряженные тела не есть шары и нельзя рассматривать их как точечные заряды, то поступают следующим образом: мысленно разбивают эти тела на «кусочки», каждый из которых можно рассматривать как точечный заряд; рассчитывают силы взаимодействия с помощью закона Кулона, а затем выполняют суммирование. В таком подходе используется аппарат математического анализа.

Для макроскопических тел, заряд у которых распределен равномерно, вводят следующие характеристики.

Если после электризации заряд *Q* на теле распределяется по всему объему тела *V*, то величина

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV} \qquad (10.5)$$

называется *объемной плотностью заряда*. Здесь $\Delta Q$ – заряд, содержащийся в малом элементе объема $\Delta V$.

Распределение заряда по поверхности характеризуют *поверхностной плотностью заряда* $\sigma$:

$$\sigma = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{dQ}{dS}, \qquad (10.6)$$

где $\Delta Q$ – заряд, распределенный по малому элементу поверхности $\Delta S$.

При распределении заряда по тонкой нити пользуются *линейной плотностью заряда* $\tau$:

$$\tau = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{dQ}{dl}, \qquad (10.7)$$

где $\Delta Q$ – заряд, приходящийся на элемент длины $\Delta l$.

Если заряд распределен по телу равномерно (например, шар, сфера, плоская поверхность, прямая нить и др.), то объемную, поверхностную и линейную плотности распределения заряда можно соответственно найти по формулам:

$$\rho = \frac{Q}{V};\ \sigma = \frac{Q}{V};\ \tau = \frac{Q}{l}.$$

## 10.2. Электрическое поле. Напряженность электрического поля. Напряженность поля точечного заряда. Принцип суперпозиции электростатических полей

**Электрическое поле.** Закон Кулона позволяет найти количественные характеристики для сил взаимодействия электрических зарядов, однако не дает ответа на вопрос о самом процессе.

Исторически сложилось так, что для объяснения электрического взаимодействия параллельно существовали две теории. По одной из них предполагалось, что взаимодействие между электрическими зарядами передается мгновенно и через пустоту. Эта точка зрения получила название *теории дальнодействия*. При таком толковании взаимодействия в окружающем пространстве никаких изменений не происходит.

Согласно другой теории любое взаимодействие между электрическими зарядами передаются в пространстве посредством некоторой среды, причем передается оно через все точки пространства и распространяется с конечной скоростью. Такой подход получил название *теории близкодействия*.

Экспериментальное подтверждение на всех этапах развития современной физики получил подход, соответствующий теории близкодействия, а именно, полевая трактовка всех установленных типов взаимодействия. Согласно ему, применительно к электрическим взаимодействиям, каждое заряженное тело порождает вокруг себя *электрическое поле*, которое, в свою очередь, действует на другие заряженные тела. Электрическое поле материально и имеет силовые характеристики, которые могут быть измерены физическими приборами. Электрический же заряд является *источником электрического поля*, которое формально простирается от точки локализации заряда (если мы говорим о заряде точечном) до бесконечности. Физически же границы распространения поля определяются чувствительностью измерительных приборов, которые позволяют измерять силовые характеристики поля.

Электрическое поле, созданное неподвижным зарядом, а равно и системой неподвижных зарядов, называют *электростатическим полем*. Раздел физики, изучающий процессы в таких полях, называется *электростатикой*. В дальнейшем изложении, если не будет оговорено особо, при использовании термина «электрическое поле» будет подразумеваться именно поле электростатическое.

**Напряженность электрического поля.** Для описания поля необходима его *силовая характеристика*. Она вводится благодаря следующему экспериментальному факту. Пусть поле создается точечным зарядом $q_0$. Поместив другой точечный положительный заряд $q_1$, который назовем *пробным зарядом*, на некотором расстоянии *r* от заряда $q_0$ (в точку наблюдения), а затем измерим силу $F_1$, с которой источник поля действует на пробный заряд. Затем возьмем пробный заряд величины $q_2$ и, поместив его в ту же точку пространства, где находился $q_1$, измерим силу $F_2$, действующую на него со стороны источника. Затем, заменив его зарядом $q_3$, измерим силу $F_3$ и т. д. Вычислив отношение измеренных сил к величинам соответствующих зарядов, получим в результате, что эти отношения численно равны между собой. Если повторить подобный эксперимент для другой точки наблюдения, находящейся на другом расстоянии от источника, то полученные значения отношений будут вновь равны между собой.

Этот экспериментальный результат позволяет ввести силовую характеристику электрического поля в точке как *отношение силы,* *с которой поле действует на заряд, помещенный в данную точку поля, к величине этого заряда*:

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \cdots \frac{\vec{F}_n}{q_n} = \vec{E}\ . \qquad (10.8)$$

Величина, обозначенная символом $\vec{E}$, называется *напряженностью электрического поля*

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}. \qquad (10.9)$$

Записав выражения для рассмотренных сил посредством закона Кулона, а затем подставив их в формулу (10.8), получим следующий важный результат:

$$\begin{aligned} &\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = ... = \frac{\vec{F}_n}{q_n} = \frac{1}{q_1} k \frac{q_0 q_1}{r^3} \vec{r} = \frac{1}{q_2} k \frac{q_0 q_2}{r^3} \vec{r} = ... = \\ &= \frac{1}{q_n} k \frac{q_0 q_n}{r^3} \vec{r} = k \frac{q_0}{r^3} \vec{r} = \vec{E}. \end{aligned} \qquad (10.10)$$

Напряженность электрического поля не зависит от значения пробного заряда, а значение напряженности поля в точке определяется расстоянием от этой точки до источника и не зависит от направления, в котором это расстояние отсчитывается. Поле с такой силовой характеристикой называется *центральным*. Поскольку источником рассмотренного выше поля являлся точечный заряд, то создаваемое им поле будет центральным, а соответствующее выражение напряженности запишется в виде:

$$\vec{E} = k \frac{q_0}{r^3} \vec{r}. \qquad (10.11)$$

Направление вектора $\vec{E}$ совпадает с направлением вектора силы, действующей на положительный пробный заряд, помещенный в данную точку поля.

С точки зрения векторного анализа, напряженность есть характеристика векторного поля, т. е. в декартовом базисе вектор $\vec{E}$ может быть разложен вдоль осей:

$$\vec{E} = \vec{i}E_x + \vec{j}E_y + \vec{k}E_z\ , \qquad (10.12)$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ есть общепринятое обозначение для базисных векторов, а $E_x$, $E_y$, $E_z$ – компоненты вектора напряженности вдоль соответствующих нижним индексам осей. В свою очередь, каждая из компонент является функцией трех координат:

$$E_x \equiv E_x(x, y, z),\ E_y \equiv E_y(x, y, z),\ E_z \equiv E_z(x, y, z).$$

Если в любой точке поля вектор $\vec{E}$ имеет одинаковые направление и абсолютные значения, то такое поле называют *однородным*.

Единицей измерения напряженности электрического поля является вольт на метр:

$$[E] = \frac{1\,\text{Н}}{1\,\text{Кл}} = \frac{1\,\text{Дж/м}}{1\,\text{Дж/В}} = 1\,\text{В/м}.$$

1 В/м – это напряженность электрического поля, в котором на заряд величиной в 1 Кл действует сила в 1 Н.

**Напряженность поля точечного заряда. Принцип суперпозиции электростатических полей.** Из формулы (10.11) следует, что абсолютное значение напряженности обратно пропорционально квадрату расстояния:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}. \qquad (10.13)$$

За направление вектора напряженности электрического поля принимается направление силы, действующей на положительный пробный заряд, помещенный в это поле. Так, для поля, источником которого является точечный положительный заряд, векторы напряженности в различных точках пространства направлены «от заряда» вдоль лучей, которые имеют начало в источнике и направлены в бесконечность. Если же источником поля является отрицательный точечный заряд, то векторы напряженности такого поля направлены «к заряду» вдоль упомянутых выше лучей (рис. 152).

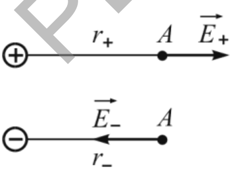

Рис. 152

Электрическое поле может создаваться как одним, так и совокупностью точечных зарядов. В случае, когда таких зарядов *n*, его напряженность равна векторной сумме напряженностей полей, которые создавал бы каждый из этих зарядов в отсутствие остальных:

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i \ . \qquad (10.14)$$

Выражение (10.14) носит название *принципа суперпозиции (независимости) электрических полей*. Равенство (10.14) совсем не очевидно и является обобщением огромного числа экспериментальных данных. Оно никак не доказывается и, возможно, нарушается на расстояниях порядка размера атомных ядер ($10^{-15}$ м) и в очень сильных электрических полях. Принцип суперпозиции позволяет вычислить напряженность поля для любой системы зарядов, как точечных, так и распределенных в пространстве. В последнем случае применяется подход, связанный с мысленным разбиением заряда на такие элементарные части, каждая из которых суть точечный заряд. Затем вычисляются элементарные напряженности поля в интересующей нас точке пространства, которые создаются отдельно взятыми точечными зарядами. Для получения окончательного ответа следует воспользоваться принципом суперпозиции и выполнить суммирование этих элементарных напряженностей по правилам векторной алгебры.

## 10.3. Напряженность поля электрического диполя. Диполь во внешнем электрическом поле

**Напряженность поля электрического диполя.** *Электрическим диполем* называют систему двух одинаковых по величине и противоположных по знаку точечных зарядов, которые обозначим $+q$ и $-q$. Если расстояние $l$ между зарядами значительно меньше расстояния $r$ от этих зарядов до точки в пространстве, в которой нас интересует состояние поля, создаваемое этими зарядами, то диполь называется *точечным*. Прямая, проходящая через оба заряда, называется *осью диполя* (рис. 153).

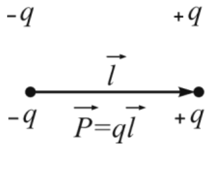

Рис. 153

Вектор $\vec{l}$, направленный от отрицательного заряда к положительному, называется *плечом*

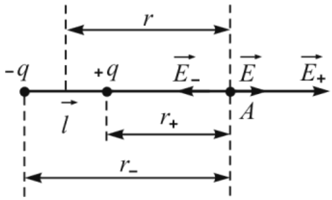


Рис. 154

*диполя*. Вектор $\vec{P} = q\vec{l}$ называется *электрическим моментом диполя* или *дипольным моментом*. Направление вектора $\vec{P}$ совпадает с направлением вектора $\vec{l}$ (рис. 153).

Для получения выражения, позволяющего рассчитать напряженность поля точечного диполя в любой точке пространства, рассмотрим два частных случая. Пусть точка наблюдения лежит на оси диполя и находится на расстоянии *r* от ее центра.

Результирующее поле согласно принципу суперпозиции: $\vec{E} = \vec{E}_- + \vec{E}_+$, где $\vec{E}_-$, $\vec{E}_+$ – напряженности полей, создаваемые, соответственно, отрицательным и положительным зарядами.

Поскольку векторы $\vec{E}_-$ и $\vec{E}_+$ направлены вдоль оси диполя, их векторную сумму можно заменить алгебраической:

$$E = E_+ - E_- = k\frac{q}{r_+^2} - k\frac{q}{r_-^2}.$$

Из рис. 154 видно,что

$$r_+ = r - \frac{l}{2},\ r_- = r + \frac{l}{2},$$

тогда

$$E = kq\left\{\frac{1}{r_+^2} - \frac{1}{r_-^2}\right\} = kq\left\{\frac{1}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}\right\} =$$

$$= rq\frac{r^2 + rl + \frac{l^2}{4} - r^2 + rl - \frac{l^2}{4}}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = kq\frac{2rl}{\left(r^2 - \frac{l^2}{4}\right)^2} = kq\frac{2rl}{r^4\left(1 - \frac{l^2}{4r^2}\right)^2}.$$

Так как согласно определению точечного диполя $r \gg l$, то $\dfrac{l^2}{4r^2} \approx 0$ и

$$E = 2kq\frac{l}{r^3} = 2k\frac{P}{r^3}. \qquad (10.15)$$

Рассмотрим далее случай, когда точка наблюдения находится на перпендикуляре, восстановленном к середине плеча диполя (рис. 155).

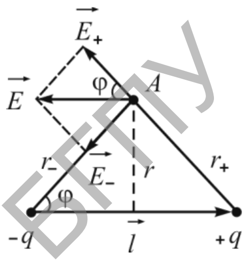

Рис. 155

Как и в рассмотренном выше случае, напряженность поля в точке *A* есть $\vec{E} = \vec{E}_- + \vec{E}_+$.

Поскольку расстояния $r_+$ и $r_-$ точки *A* от обоих зарядов равны между собой, то

$$E_+ = E_- = k\frac{q}{r_+^2} = k\frac{q}{r_-^2}.$$

Как видно из рис. 155, модуль результирующего вектора напряженности равен:

$$E = E_+\cos\varphi + E_-\cos\varphi = 2k\frac{q}{r_+^2}\cos\varphi.$$

Так как

$$r_+^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2 + r^2 \text{ и } \cos\varphi = \frac{l}{2r_+} = \frac{l}{2\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}}},$$

а $r \gg l$, то окончательный результат запишется в следующем виде:

$$E = k\frac{ql}{r^3} = k\frac{P}{r^3}. \qquad (10.16)$$

Определение напряженности в произвольной точке поля (рис. 156) сводится к рассмотренным выше частным случаям.

Опустим из заряда $+q$ перпендикуляр *CD* на линию наблюдения *AB* и поместим в точке *D* два заряда $+q$ и $-q$. Это не

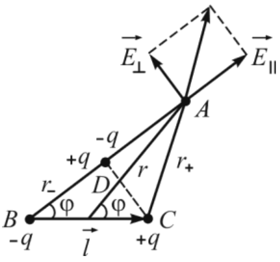


Рис. 156

изменит поля. Но полученную систему из четырех зарядов можно рассматривать как два диполя с дипольными моментами $P_1$ и $P_2$. Вообще, при вычислении напряженности поля или сил, действующих на диполь, последний всегда можно заменить системой любого числа диполей, векторная сумма моментов которых равна моменту рассматриваемого диполя. Из треугольника $BCD$ следует: $P_1 = P\cos\varphi$, $P_2 = P\sin\varphi$. Тогда напряженность поля в точке $A$, создаваемого диполем с моментом $P_1$, есть

$$E_1 = 2k\frac{P_1}{r^3} = 2k\frac{P\cos\varphi}{r^3},$$

а диполем с моментом $P_2$ –

$$E_2 = k\frac{P_2}{r^3} = k\frac{P\sin\varphi}{r^3}.$$

Суммарная напряженность поля в точке $A$ рассчитывается согласно принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, или

$$\begin{aligned} E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2} = \sqrt{4k^2\frac{P^2\cos^2\varphi}{r^6} + k^2\frac{P^2\sin^2}{r^6}} = \\ = \frac{kP}{r^3}\sqrt{3\cos^2\varphi + 1} \end{aligned}. \qquad (10.17)$$

Легко заметить, что при $\varphi = 0$ из выражения (10.17) получается формула (10.15), а при $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ – формула (10.16).

Таким образом, напряженность электрического поля диполя прямо пропорциональна величине дипольного момента и обратно пропорциональна кубу расстояния от диполя.

**Диполь во внешнем электрическом поле.** В однородном электрическом поле вектор напряженности имеет одно и то же направление в любой точке (рис. 157), и на диполь будут действовать силы $F_+$ и $F_-$.

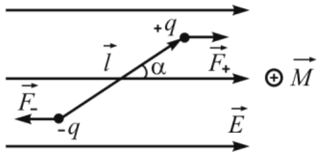


Рис. 157

Очевидно, что эти силы равны по модулю ($F_+ = F_- = qE$) и противоположны по направлению. Плечо для каждой из сил относительно осей, проходящих через заряды диполя, равно $l\sin\alpha$. Модуль момента этой пары сил равен произведению силы и плеча $M = qEl\sin\alpha = \; = PE\sin\alpha$. Поскольку момент силы есть аксиальный вектор, выразим его, используя векторное произведение:

$$\vec{M} = \vec{P}\times\vec{E}\,. \qquad (10.18)$$

Однородное электрическое поле стремится повернуть диполь таким образом, чтобы векторы $\vec{P}$ и $\vec{E}$ стали параллельными. При повороте диполя на бесконечно малый угол $d\alpha$ поле выполняет работу $dA = M\,d\alpha = PE\sin\alpha\cdot d\alpha$. Абсолютная величина элементарной работы равна элементарному изменению потенциальной энергии диполя $dW$:

$$dW = PE\sin\alpha\cdot d\alpha\,.$$

При повороте на конечный угол $\alpha$ энергия диполя изменится на величину

$$W = \int PE\sin\alpha\cdot d\alpha = -PE\cos\alpha + C\,.$$

При $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ потенциальная энергия равна нулю, следовательно, и постоянная интегрирования $C = 0$. Тогда выражение примет окончательный вид:

$$W = -PE\cos\alpha\,. \qquad (10.19)$$

Существуют два положения равновесия диполя в однородном электростатическом поле, которые связаны параллельностью и антипараллельностью векторов $\vec{P}$ и $\vec{E}$. В случае параллельности $\alpha = 0$ и $\cos 0^\circ = 1$, потенциальная энергия отрицательна. В другом случае – $\cos 180^\circ = -1$ и потенциальная энергия положительна.

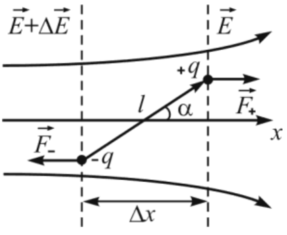


Рис. 158

Состояние устойчивого равновесия соответствует минимуму потенциальной энергии системы, т. е. при выведении системы из равновесия возникает момент сил, который стремится вернуть ее в исходное состояние. Как видно из рисунка, этому состоянию соответствует условие $\alpha = 0$.

Рассмотрим теперь поведение диполя в неоднородном электростатическом поле (рис. 158).

В таком поле диполь будет поворачиваться до устойчивого состояния. Однако поскольку сила, действующая на отрицательный заряд, больше, чем сила, действующая на положительный заряд ($F_- > F_+$), то диполь будет втягиваться в поле в направлении сгущения силовых линий.

Равнодействующая этих сил равна

$$f = F_- - F_+ = q(E + \Delta E) - qE = q\Delta E .$$

Умножим и разделим полученное выражение на $\Delta x$. Получим:

$$f = q\frac{\Delta E}{\Delta x}\Delta x = q\frac{\Delta E}{\Delta x} l\cos\alpha = p\frac{\Delta E}{\Delta x}\cos\alpha ;$$

для бесконечно малых приращений оно перепишется как

$$f = p\frac{dE}{dx}\cos\alpha .$$

## 10.4. Силовые линии электрического поля. Поток вектора напряженности. Теорема Гаусса. Применение теоремы Гаусса

**Силовые линии электрического поля.** Характеристики электрического поля можно моделировать следующим образом. Формально для его описания следует указать для каждой точки пространства абсолютную величину и направление вектора напряженности. Однако практически для наглядного изображения электрических полей используют *силовые линии электрического поля*, или *линии напряженности электрического поля*. Под силовой линией следует понимать воображаемую линию, в любой точке поля касательная к которой совпадает с направлением вектора напряженности в той же точке (рис. 159).

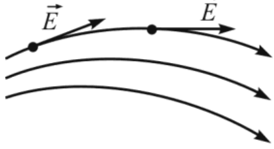

Рис. 159

Силовой линии приписывают направление, отмечая его на рисунках стрелкой. Силовые линии проводят так густо, чтобы их число, пронизывающее элементарную площадку, расположенную перпендикулярно к ним, соответствовало величине вектора напряженности в месте расположения площадки (чем больше значение напряженности поля, тем гуще наносятся силовые линии).

На рис. 160 изображены силовые линии поля, создаваемого точечным зарядом. Линии представляют собой совокупность радиальных прямых. Поскольку их направление совпадает с направлением вектора напряженности, то у положительного заряда они начинаются на заряде и заканчиваются в бесконечности. Для отрицательного же заряда – наоборот: начинаются в бесконечности, а заканчиваются на заряде.

На рис. 161 изображены силовые линии поля диполя. Они «выходят» из положительного заряда и «входят» в отрицательный заряд.

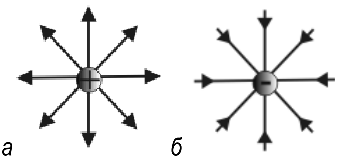

Рис. 160

Рис. 160 демонстрирует, что напряженность поля уменьшается по мере удаления от заряда. Если окружить заряд воображаемой сферой, центр которой совпадает с точечным зарядом, то на любом расстоянии от центра число силовых линий, пронизывающих сферу, является величиной постоянной:

$$N = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \times 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Силовые линии начинаются и заканчиваются только на электрических зарядах; они нигде не касаются друг друга и не пересекаются. В противном случае это означало бы, что в одной точке поля

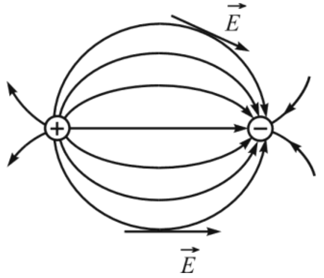

Рис. 161

вектор напряженности поля мог бы иметь несколько направлений одновременно, а это, в свою очередь, соответствовало бы неоднозначности толковании силовой характеристики.

**Поток вектора напряженности.** Введем понятие *потока вектора напряженности электрического поля*, которое является одним из основных в векторном анализе. Если число силовых линий, пронизывающих единичную площадку, размещенную перпендикулярно им, равно модулю вектора $\vec{E}$, то можно говорить о понятии потока вектора напряженности электрического поля.

Рассмотрим площадку $S_\perp$, через которую проходит $N$ силовых линий (рис. 162).

Тогда

$$E = \frac{N}{S_\perp}.$$

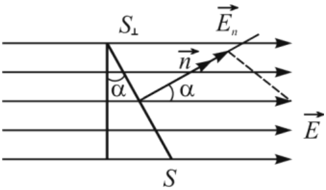


Рис. 162

Очевидно, столько же силовых линий проходит и через площадку $S$, расположенную под произвольным углом $\alpha$ к направлению силовых линий. Так как $S_\perp = S\cos\alpha$,

$$E = \frac{N}{S\cos\alpha}.$$

Однако $E\cos\alpha = E_n$ – проекция вектора $\vec{E}$ на направление нормали $\vec{n}$ к площадке $S$. В таком случае число силовых линий, пронизывающих произвольную площадку, размещенную в электрическом поле равно:

$$N = ES\cos\alpha = E_n S. \tag{10.20}$$

Если поле неоднородное, то всегда можно выбрать элементарную площадку $dS$, которую можно считать плоской, а поле в ее окрестностях – однородным. В таком случае

$$dN = E_n dS,$$

а

$$N = \int_S E_n dS. \tag{10.21}$$

Правую часть уравнения (10.21) называют потоком вектора $\vec{E}$ через поверхность $S$:

$$\Phi_E = \int_S E\cos\alpha \cdot dS = \int_S E_n dS\ . \qquad (10.22)$$

Поток – величина скалярная. $\Phi_E$ может быть больше нуля или меньше нуля в зависимости от значения угла $\alpha$: если угол $\alpha$ острый, то $\cos\alpha > 0$ и поток положительный; если угол $\alpha$ тупой, то $\cos\alpha < 0$ и поток отрицательный; при $\alpha = \frac{\pi}{2}$ поток равен нулю.

Если поверхность замкнутая, то за положительное направление нормали выбирают ее внешнюю нормаль.

Выражение (10.22) можно записать в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\ \ dS\ . \qquad (10.23)$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор, нормальный к элементарной площадке $dS$.

**Теорема Гаусса.** Теорема Гаусса формулируется так: *поток вектора напряженности электрического поля в вакууме через любую замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, охваченных этой поверхностью, отнесенной к* $\varepsilon_0$:

$$\Phi_E = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{\varepsilon_0}\ . \qquad (10.24)$$

Докажем эту теорему для точечного заряда. Пусть заряд $Q$, создающий поле, находится в центре воображаемой сферы радиусом $r$ (рис. 163).

Напряженность поля точечного заряда в любой точке поверхности сферы определяется формулой (10.11)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\ .$$

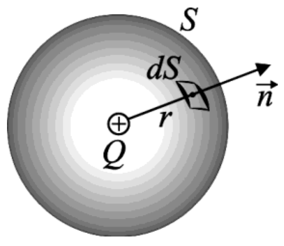

Рис. 163

Подставим последнее выражение в (10.23):

$$\Phi_E = \oint_S (\vec{E} \cdot \vec{n})dS = \oint_S (\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n})dS =$$
$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oint_S dS = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}. \qquad (10.25)$$

Здесь учтено, что вектор нормали к элементу поверхности сферы направлен вдоль ее радиуса, поэтому скалярное произведение $\left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{n}\right) = 1$, а множители, от которых не зависит *dS*, вынесены из-под знака интеграла. Поверхностный интеграл по поверхности сферы равен площади ее поверхности.

Таким образом, поток вектора напряженности электрического поля не зависит от радиуса сферической поверхности и, следовательно, он будет неизменным для любого точечного заряда, если последний находится внутри сферы. Очевидно, формула (10.25) будет справедлива как в случае замкнутой поверхности любой формы, так и произвольного расположения заряда внутри ее. На рис. 164 показано, что через поверхность произвольной формы *S* проходит столько же силовых линий, сколько и через сферические поверхности $S_1$ и $S_2$.

Форма поверхности может быть такова, что отдельные силовые линии могут пересекать ее несколько раз (рис. 165).

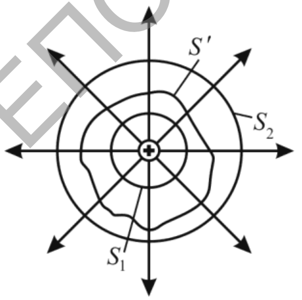


Рис. 164

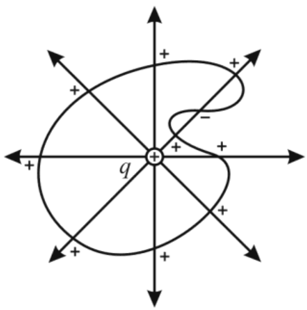


Рис. 165

Однако в таком случае для элементов поверхности скалярное произведение $(\vec{E}\cdot\vec{n})$ даст вклад со знаком «+» или «–» в зависимости от угла между векторами. Поскольку любую произвольную систему электрических зарядов можно представить как совокупность точечных, то теорема Гаусса справедлива для любой такой системы.

**Применение теоремы Гаусса.** Теорему Гаусса удобно применять для вычисления электрических полей при симметричных распределениях зарядов.

***Поле бесконечной равномерно заряженной плоскости в вакууме.*** Плоскость заряжена с поверхностной плотностью заряда $\sigma$. Под поверхностной плотностью заряда понимают средний заряд, приходящийся на единицу площади поверхности:

$$\sigma = \frac{dq}{dS},$$

где $dS$ – площадь элементарной поверхности, на которой находится заряд $dq$, $\sigma = 1$ Кл/м$^2$. Найдем напряженность электрического поля в произвольно взятой точке, удаленной от плоскости на расстояние $l$ (рис. 166, *а*).

Мысленно построим цилиндр так, чтобы его образующая была перпендикулярной плоскости $S$, которая при этом делит цилиндр пополам, а на одном из оснований находится взятая для расчета точка. Такой цилиндр является замкнутой поверхностью, к которой можно применить теорему Гаусса. Заряд внутри этой поверхности находится только на площадке $\Delta S$ и равен $q = \sigma\Delta S$. Так как плоскость бесконечна и заряжена равномерно, для любого заряда на ней всегда можно найти такой же заряд, что вектор их суммарной напряженности будет перпендикулярен плоскости. Из рис. 166, *б* видно, что горизонтальные составляющие

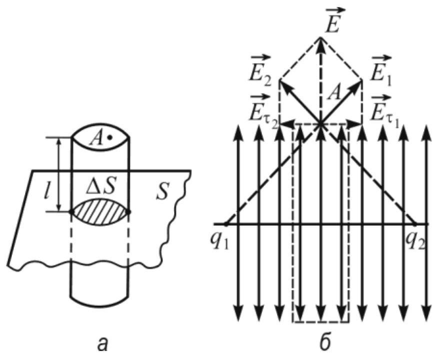


Рис. 166

напряженностей, создаваемых зарядами $q_1$ и $q_2$ в выбранной точке, равны по величине и противоположны по направлению. Следовательно, в любой точке пространства вектор напряженности перпендикулярен плоскости, а его поток через боковую поверхность мысленно построенного цилиндра равен нулю (вектор нормали к боковой поверхности перпендикулярен $\vec{E}$ ). В таком случае поток вектора $\vec{E}$ сквозь поверхность цилиндра определяется суммой

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2,$$

где $\Phi_1 = E\,\Delta S$ – поток через нижнее основание цилиндра, $\Phi_2 = E\,\Delta S$ – поток через верхнее основание цилиндра. Откуда $\Phi = 2E\,\Delta S$ . Согласно теореме Гаусса

$$2E\,\Delta S = \frac{\sigma\,\Delta S}{\varepsilon_0},$$

а значение абсолютной величины вектора напряженности поля бесконечной заряженной плоскости есть

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}. \qquad (10.26)$$

Таким образом, напряженность электрического поля, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, имеет во всех точках пространства одно и то же значение и зависит только от поверхностной плотности заряда.

***Поле двух бесконечных параллельных разноименно заряженных плоскостей.*** Рассмотрим две бесконечные плоскости, поверхностные плотности зарядов которых соответственно равны $+\sigma$ и $-\sigma$ . На рис. 167 линии напряженности положительно заряженной плоскости показаны сплошными линиями, а отрицательно заряженной – пунктирными линиями.

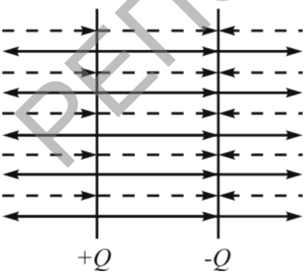


Рис. 167

Внутри между плоскостями линии направлены в одну сторону. Плотность тех и других линий одинакова. Следовательно, одинаковы и напряженности полей, создаваемые обеими плоскостями. За пределами плоскостей силовые линии направлены в противоположные стороны. Согласно принципу суперпозиции вне плоскостей напряженность суммарного поля равна нулю, а между ними она вдвое больше напряженности поля одной плоскости

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}. \qquad (10.27)$$

***Поле равномерно заряженной сферы.*** Положительный заряд $q$ равномерно распределен по сферической поверхности радиусом $R$ (рис. 168).

Найдем напряженность поля за пределами сферы в произвольной точке $A$ ($r > R$). Для этого окружим сферу воображаемой сферической поверхностью, на которой расположена точка. Вектор напряженности в любой точке за пределами заряженной сферы направлен вдоль продолжения одного из радиусов, его модуль на поверхности воображаемой сферы имеет одно и то же значение, а полный поток через последнюю сферу равен:

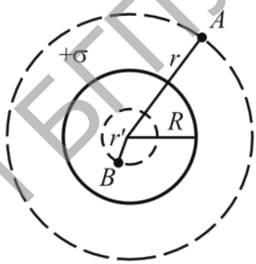


Рис. 168

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r^2.$$

Согласно теореме Гаусса

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

откуда

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}. \qquad (10.28)$$

Чтобы рассчитать напряженность внутри заряженной сферы построим воображаемую сферу так, чтобы произвольная точка $B$ принадлежала ее поверхности, а центр совпадал с центром заряженной сферы. Поток через нее определяется выражением

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r'^2.$$

Однако внутри этой сферы заряда нет, поэтому согласно теореме Гаусса

$$\Phi_E = E \cdot 4\pi r'^2 = 0.$$

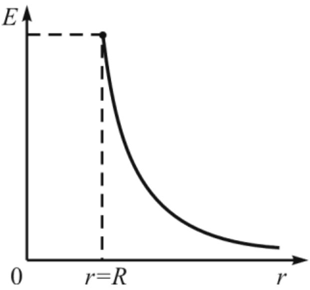

Рис. 169

Следовательно, $E = 0$. На рис. 169 представлен график зависимости напряженности поля равномерно заряженной сферы радиусом $R$ от расстояния до центра.

***Поле равномерно заряженного шара.*** Воспользуемся еще раз для наглядности рис. 163. Положительный заряд $q$ равномерно распределен по объему шара радиусом $R$ с объемной плотностью $\rho$. Объемная плотность равномерно заряженного по всему объему тела определяется как заряд единицы объема

$$\rho = \frac{dq}{dV},$$

где $dV$ – элементарный объем, в котором распределен элементарный заряд $dq$, $\rho = 1$ Кл/м$^3$. Вектор напряженности электрического поля, как и в предыдущем случае, направлен вдоль радиуса шара и его продолжения. За пределами шара при $r > R$ его поле рассчитывается точно так же, как и поле заряженной сферы, по формуле (10.28).

Чтобы рассчитать поле внутри заряженного шара, проведем воображаемую сферу через произвольную точку $B$ радиусом $r' < R$; центры шара и сферы совпадают. Внутри этой сферы находится заряд

$$q' = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3,$$

где $\frac{4}{3}\pi r'^3$ – объем воображаемой сферы, а $\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3}{4}\frac{q}{\pi R^3}$ – объемная плотность заряда в шаре. Тогда

$$q' = \frac{3}{4}\frac{q}{\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r'^3 = q\frac{r'^3}{R^3}.$$

Согласно теореме Гаусса поток вектора напряженности через воображаемую сферу

$$\Phi_E = E\cdot 4\pi r^2 = \frac{q'}{\varepsilon_0} = \frac{q}{\varepsilon_0}\frac{r'^3}{R^3},$$

тогда окончательно

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r'}{R^3}. \qquad (10.29)$$

Таким образом, напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара возрастает прямо пропорционально расстоянию от его центра, а за его пределами убывает прямо пропорционально квадрату расстояния от того же центра (рис. 170).

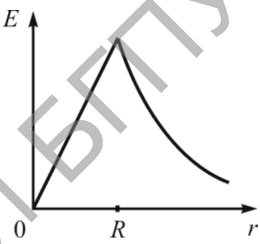


Рис. 170

***Поле бесконечной прямой равномерно заряженной нити.*** Пусть положительный заряд равномерно распределен вдоль нити бесконечной длины с линейной плотностью $\gamma = dq/dl$ (рис. 171), где $dq$ – заряд, находящийся на элементе длины нити $dl$, $\gamma\ =1$ Кл/м.

Рассчитаем напряженность поля, создаваемую заряженной нитью в произвольной точке $A$ на расстоянии $r$ от нити. Для этого построим воображаемый цилиндр таким образом, чтобы на его боковой поверхности находилась точка $A$, а ось цилиндра совпадала с нитью. Внутри цилиндра находится заряд $q = \gamma l$, где $l$ – высота цилиндра. Согласно теореме Гаусса поток вектора напряженности через поверхность цилиндра

$$\Phi_E = \frac{\gamma l}{\varepsilon_0}.$$

Поток через основания цилиндра из соображений симметрии равен нулю (см. поле бесконечной плоскости). Поэтому

$$\Phi_E = E\cdot 2\pi r l = \frac{\gamma l}{\varepsilon_0}.$$

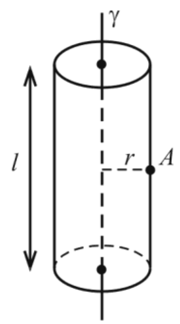


Рис. 171

Выражая напряженность, получим окончательно:

$$E = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r}. \tag{10.30}$$

Таким образом, поле бесконечной заряженной нити убывает прямо пропорционально расстоянию.

***Поле равномерно заряженного цилиндра.*** Напряженности полей, создаваемых равномерно заряженным полым цилиндром с поверхностной плотностью распределения заряда $\sigma$ и равномерно заряженным сплошным цилиндром с объемной плотностью распределения заряда $\rho$, читателю предлагается рассмотреть самостоятельно.

## 10.5. Работа поля в электрическом поле. Потенциал. Циркуляция вектора напряженности электрического поля. Потенциал системы электрических зарядов и электрического диполя

**Работа поля в электрическом поле. Потенциал.** На любой заряд, помещенный в электрическое поле, действует сила; если этот заряд точечный, то она определяется формулой (10.2).

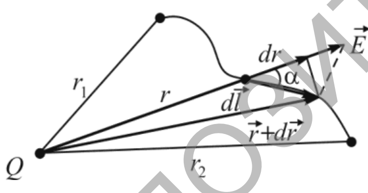

Рис. 172

Определим работу, которую совершает поле, создаваемое неподвижным точечным зарядом $Q$ в вакууме, при перемещении пробного заряда $q$ по произвольной траектории из пункта *1* в пункт *2* (рис. 172).

Разделим траекторию на малые участки, каждому из которых можно поставить в соответствие элементарный вектор перемещения $d\vec{l}$. Тогда элементарная работа сил поля при перемещении заряда $q$ вдоль $d\vec{l}$ выражается следующим образом:

$$dA = \vec{F}\,d\vec{l} = q\vec{E}\,d\vec{l} = qE\,dl\cos\alpha, \tag{10.31}$$

где $\alpha$ есть угол между векторами перемещения и напряженности. Поскольку $dl$ – величина бесконечно малая, напряженность поля на этом элементарном отрезке можно считать величиной постоянной и равной

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}.$$

Элементарная работа в таком случае

$$dA = k\frac{Qq}{r^2}dl\cos\alpha.$$

Согласно рис. 172 перпендикуляр, опущенный на направление действия силы (напряженности поля), отсекает отрезок *dr*, являющийся приращением радиус-вектора $\vec{r}$ на элементарном перемещении $d\vec{l}$:

$$dr = dl\cos\alpha.$$

Тогда

$$dA = k\frac{Qq}{r^2}dr.$$

Работа поля на отрезке *1–2* определяется интегралом

$$A_{12} = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} k\frac{Qq}{r^2}dr = kQq\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2} = -q\left(\frac{kQ}{r_2} - \frac{kQ}{r_1}\right). \qquad (10.32)$$

Из формулы (10.31)следует, что работа сил электрического поля по перемещению электрического заряда не зависит от траектории заряда. Она определяется только его начальным и конечным положениями. Если $r_1 = r_2$ (конечное положение совпадает с начальным), то $A_{12} = 0$. Это означает, что работа сил поля по перемещению заряда вдоль замкнутого контура равна нулю. Поля такого типа называют *потенциальными* или *консервативными*. Далее видим, что в скобках стоит разность двух величин, которые связаны только с расстоянием от заряда *Q* и величиной самого заряда. Это позволяет ввести еще одну характеристику электрического поля – *потенциал* $\varphi(r)$:

$$\varphi(r) = k\frac{Q}{r}. \qquad (10.32a)$$

Теперь, зная значения потенциалов в точках поля $r_1$ и $r_2$, можно вычислить работу на участке *1–2* как

$$A_{12} = -q\left(\varphi(r_2) - \varphi(r_1)\right) = -q\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = -q\Delta\varphi. \qquad (10.33)$$

По определению работа сил потенциального поля равна изменению потенциальной энергии со знаком «минус»:

$$A_{12} = -\left(W_{P2} - W_{P1}\right) = -\Delta W_P. \qquad (10.34)$$

Из сравнения формул (10.32) и (10.33) следует связь потенциальной энергии с потенциалом:

$$W_P = q\varphi = qk\frac{Q}{r}. \qquad (10.35)$$

Как видно из полученных выражений для работы, *физический смысл имеют именно разность потенциалов и изменение потенциальной энергии*. Если конечную точку траектории *2* удалить в бесконечность (т. е. $r_2 \to \infty$), то значение потенциала $\varphi(r_2)$ обратится в нуль:

$$\varphi(r_2) = \varphi_2 = 0.$$

Соответственно, и потенциальная энергия нормируется аналогичным образом:

$$W_{P2} = 0.$$

Можно выбрать в бесконечности начальную точку траектории. Заключения для $W_{P1}$ и $\varphi_1$ будут аналогичны приведенным выше.

Следует иметь в виду, что как в выражение для работы, так и в выражение для потенциала следует подставлять значения зарядов с учетом знаков. Выбрав для определенности $q > 0$, $Q > 0$, $r_2 \to \infty$, получим:

$$A_{12} = k\frac{qQ}{r} > 0.$$

Этот результат подтвердится опытом: одноименные заряды отталкиваются; свободный положительный заряд $q$ под действием кулоновской силы со стороны зафиксированного в начале системы координат положительного заряда $Q$ будет перемещаться в бесконечность. В этом случае говорят, что *работу совершает поле*

(поле заряда *Q*). Аналогичный результат будет получен, если $q < 0$, $Q < 0$, $r_2 \to \infty$. Если же, например, $q < 0$, $Q > 0$, $r_2 \to \infty$, то работа будет отрицательной:

$$A_{12} = -k\frac{qQ}{r} < 0.$$

В этом случае говорят, что *работа совершена над полем*. Этот результат также находится в соответствии с экспериментом: разноименные заряды притягиваются; для перемещения заряда $-q$ в бесконечность необходимо действовать внешней силой, равной по абсолютной величине кулоновской, но противоположной ей по направлению.

Подобные рассуждения могут быть проведены при вычислении работы с использованием формулы (10.33). Если $\varphi_2 > \varphi_1$, $\Delta\varphi < 0$, то в случае положительного заряда *q* работа будет отрицательной – положительный заряд может перейти из точки с более низким потенциалом в точку с более высоким потенциалом только при внешнем воздействии (работа совершается над полем). В случае, когда $\varphi_1 > \varphi_2$, $\Delta\varphi > 0$, для положительного заряда *q* работа будет положительной (работу совершит поле). Подобные рассуждения можно провести и для отрицательного заряда *q*, однако в этом случае работа будет положительной при $\varphi_2 > \varphi_1$, $\Delta\varphi < 0$ и отрицательной – при $\varphi_2 > \varphi_1$, $\Delta\varphi < 0$.

Из формулы (10.33) следует и физический смысл разности потенциалов между двумя точками поля: *работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного заряда из одной точки поля в другую*.

**Циркуляция вектора напряженности электрического поля.** Если траектория движения заряда замкнута, то $\varphi_1 = \varphi_2$ и, соответственно, работа по его перемещению равна нулю. Согласно (10.31) элементарная работа

$$dA = qE_l\,dl,$$

а при перемещении заряда по замкнутой территории

$$A = \oint_l qE_l\,dl = q\oint_l E_l\,dl = 0.$$

Поскольку $q \neq 0$, $E_l\, dl = 0$.

В математике криволинейный интеграл по замкнутому контуру *l* от скалярного произведения вектора $\vec{E}$ на вектор $d\overline{l}$, касательный к контуру *l*, называют циркуляцией вектора $\vec{E}$ вдоль *l*. Таким образом, интеграл $\oint\limits_l \vec{E}d\vec{l}$ называется *циркуляцией вектора напряженности электрического поля* $\vec{E}$ *по соответствующему замкнутому контуру l*. Другой формой записи циркуляции может быть интеграл вида $\oint\limits_l E_l dl$. Учитывая тот факт, что циркуляция вектора напряженности электростатического поля по любому замкнутому контуру равна нулю, можно сформулировать еще один признак потенциальности поля: *электрическое поле является потенциальным, если циркуляция вектора его напряженности по любому замкнутому контуру равна нулю*.

**Потенциал системы электрических зарядов.** Рассмотрим поле, создаваемое системой *n* точечных зарядов $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, …, $Q_n$ (рис. 173).

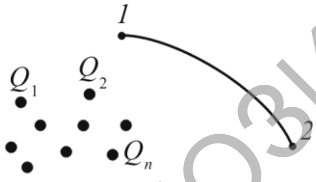

Рис.173

Расстояния от каждого из зарядов до выбранной точки поля обозначим соответственно $r_1$, $r_2$, …, $r_n$. Работа сил этого поля по перемещению заряда *q* из пункта *1* в пункт *2* будет равна алгебраической сумме работ сил, обусловленных каждым из зарядов в отдельности:

$$A_{12} = \sum_{i=1}^{n} A_i .$$

Каждая из работ $A_i$ (см. (10.32)) равна:

$$A_i = k\left(\frac{Q_i q}{r_{1i}} - \frac{Q_i q}{r_{2i}}\right),$$

где $r_{1i}$ ($r_{2i}$) – расстояние от заряда $Q_i$ до начального (конечного) положения заряда $q$. Следовательно,

$$A_{12} = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i q}{r_{i1}} - k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i q}{r_{i2}} . \qquad (10.36)$$

Сравнение последней формулы с (10.34) дает выражение для потенциальной энергии заряда $q$ в поле системы зарядов

$$W_n = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i q}{r_i} .$$

Соответственно, потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов,

$$\varphi = k\sum_{i=1}^{n}\frac{Q_i}{r_i} . \qquad (10.37)$$

Формула (10.36) демонстрирует, что поле, создаваемое системой зарядов, также является потенциальным. Сравнение же формул (10.37) и (10.32*а*) указывает, что потенциал поля, создаваемого системой точечных зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов полей, создаваемых каждым из зарядов в отдельности:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n}\varphi_i . \qquad (10.38)$$

При расчетах вычисление потенциалов оказывается обычно значительно проще, чем вычисление напряженностей, поскольку последние являются векторами.

Для полей, создаваемых системой зарядов, справедлива формула (10.33). Однако в ней потенциалы $\varphi_1$ и $\varphi_2$ создаются системами зарядов, а не единичным зарядом. Если заряд $q$ из точки с потенциалом $\varphi_1 = \varphi$ удаляется на бесконечность, где $\varphi_2 = \varphi_\infty = 0$, работа сил поля равна:

$$A_\infty = q\varphi . \qquad (10.39)$$

В таком случае потенциал электрического поля можно определить как физическую величину, численно равную работе, которую совершают силы поля над единичным положительным зарядом при удалении его из данной точки на бесконечность. За единицу измерения потенциала принимают потенциал в такой точке поля, для перемещения в которую из бесконечности единичного положительного заряда необходимо совершить работу, равную единице. В системе СИ за единицу измерения потенциала принимается потенциал в такой точке, для перемещения в которую из бесконечности заряда в 1 кулон необходимо совершить работу в 1 джоуль. Эта единица называется *вольтом* в честь итальянского физика и физиолога А. Вольта (1745–1827) – одного из основателей учения об электричестве.

$$1B = \frac{1\text{Дж}}{1\text{Кл}}.$$

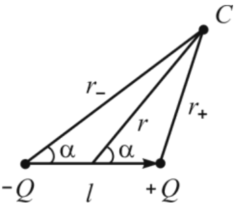


Рис. 174

**Потенциал поля электрического диполя.** Согласно формулам (10.32*а*) и (10.38)

$$\varphi = k\frac{Q}{r_+} + k\frac{-Q}{r_-} = kQ\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-}\right) = kQ\frac{r_- - r_+}{r_+ r_-},$$

можно определить потенциал поля диполя в любой точке пространства $C$ на расстоянии $r$ от центра диполя (рис. 174).

При условии, что $l \ll r$, $r_+ r_- \approx r^2$, а $r_- - r_+ = l\cos\alpha$, для расчета потенциала получается формула

$$\varphi = k\frac{Ql\cos\alpha}{r^2} = k\frac{P\cos\alpha}{r^2} = \frac{P\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad (10.40)$$

где $\alpha$ – угол между направлением момента диполя $P$ и радиус-вектором $\vec{r}$, проведенным с середины диполя в пункт наблюдения.

## 10.6. Связь потенциала и напряженности электрического поля. Эквипотенциальные линии и поверхности

**Связь потенциала и напряженности электрического поля.** Элементарную работу по перемещению силами поля точечного заряда $q$ вдоль произвольного направления $l$ на элементарном участке пути $dl$ можно представить согласно (10.31)

$$dA = qE_l dl.$$

С другой стороны, эта же работа согласно (10.33)

$$dA = q\left(\varphi - (\varphi + d\varphi)\right) = -q\,d\varphi. \tag{10.41}$$

Приравнивая правые части этих выражений, получим:

$$E_l dl = -d\varphi;$$

тогда проекция вектора напряженности $\vec{E}$ на элементарное перемещение $d\vec{l}$ есть

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}. \tag{10.42}$$

Из (10.42) следует, что проекция вектора напряженности электрического поля на произвольное направление равна «скорости» уменьшения потенциала в этом направлении.

Поскольку аналитическую зависимость электрического потенциала можно задать уравнением $\varphi \equiv \varphi(x, y, z)$, то проекции вектора напряженности на оси координат имеют вид:

$$E_x = -\frac{d\varphi}{dx},\ \ E_y = -\frac{d\varphi}{dy},\ E_z = -\frac{d\varphi}{dz}. \tag{10.43}$$

Его модуль можно определить по формуле

$$E = \sqrt{E_x{}^2 + E_y{}^2 + E_z{}^2} = \sqrt{\left(\frac{d\phi}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dy}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi}{dz}\right)^2},$$

а сам вектор $\vec{E}$ в разложении по декартовому базису выражается следующим образом:

$$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} + E_z\vec{k} = -\left(\frac{d\varphi}{dx}\vec{i} + \frac{d\varphi}{dy}\vec{j} + \frac{d\varphi}{dz}\vec{k}\right).$$

Выражение в скобках представляет собой градиент функции $\varphi$:

$$\vec{E} = -grad\varphi, \tag{10.44}$$

или *напряженность электрического поля равна градиенту его электрического потенциала, взятого со знаком «минус»*.

Таким образом, если известно распределение потенциала $\varphi \equiv \varphi(x, y, z)$ некоторого поля, то для нахождения компонент вектора напряженности следует вычислить производную потенциала по соответствующим координатам. Обратная задача (т. е.

вычисление потенциала по известной напряженности поля) решается с помощью интегрирования.

**Эквипотенциальные линии и поверхности.** Воображаемая поверхность (или линия), все точки которой имеют одинаковый потенциал, называется *эквипотенциальной поверхностью (линией)*. При перемещении вдоль эквипотенциальной поверхности потенциал не изменяется. Следовательно, согласно (10.42) составляющая вектора напряженности, касательная к силовой линии, равна нулю:

$$\frac{d\varphi}{dl} = E_l = 0.$$

А это означает, что вектор напряженности, а следовательно, и силовые линии в любой точке перпендикулярны к эквипотенциальным поверхностям.

Эквипотенциальную поверхность можно провести через любую точку поля, и таких поверхностей может быть бесконечно много. Если проводить их таким образом, чтобы разность потенциалов между двумя соседними поверхностями была величиной постоянной, то по плотности их нанесения можно судить о картине электрического поля. На рис. 175 представлены силовые линии и эквипотенциальные поверхности для полей точечного заряда и диполя.

Поскольку эти поля неоднородные, то плотность линий при приближении к зарядам увеличивается. В случае однородного поля эквипотенциальные поверхности представляют собой плоскости, расположенные на одинаковом расстоянии друг от друга.

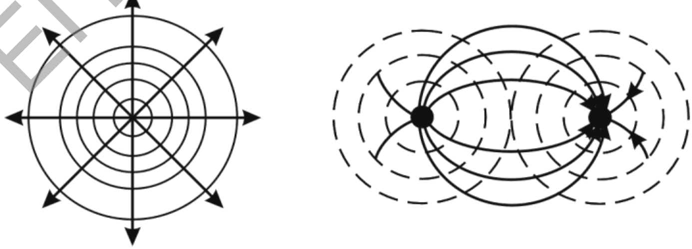

Рис. 175

## 10.7. Проводники в электрическом поле. Напряженность электрического поля у поверхности заряженного проводника

**Проводники в электрическом поле.** Проводники отличаются от диэлектриков наличием свободных носителей заряда. В металлических проводниках роль этих носителей выполняют свободные электроны, концентрация которых составляет приблизительно $10^{28}$ м$^{-3}$, и они способны перемещаться под действием самой малой электрической силы. Для того чтобы заряды оставались в равновесии, необходимо выполнение следующих условий:

1. Напряженность электрического поля внутри проводника должна быть равной нулю:

$$E = 0\,. \tag{10.45}$$

Согласно формуле (10.42) потенциал внутри проводника должен быть постоянным ($\varphi = \text{const}$).

2. На поверхности проводника силовые линии и вектор напряженности электрического поля должны быть направлены перпендикулярно к поверхности проводника:

$$\vec{E} = \vec{E}_n\,. \tag{10.46}$$

Это условие означает, что поверхность проводника в условиях равновесия является эквипотенциальной. В противном случае электроны двигались бы вдоль поверхности проводника.

При сообщении проводнику электрического заряда он распределяется в проводнике согласно условиям (10.45) и (10.46), что легко доказывается с помощью теоремы Гаусса. На рис. 176 изображен проводник произвольной формы (он может быть даже пустотелым).

Выберем непосредственно под поверхностью проводника замкнутую поверхность $S$, показанную штриховой линией. Применим к этой поверхности теорему Гаусса:

$$\oint_S E_n dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}\,.$$

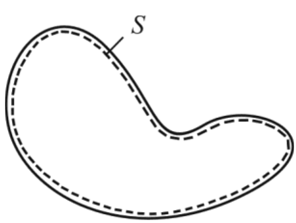


Рис. 176

В любой точке проводящей поверхности $S$ поле должно быть равным нулю, иначе электроны пришли бы в движение. Неподвижность зарядов в проводнике означает, что внутри проводника на них не действуют электрические силы, т. е. $E = 0$ на поверхности $S$. В этом случае

$$\oint_S E_n dS = 0 .$$

Левая часть выражения равна нулю, следовательно, и правая часть равна нулю. Таким образом, $Q = 0$. Полный заряд внутри произвольной замкнутой поверхности равен нулю и, следовательно, сообщенный заряд распределился по поверхности проводника с некоторой плотностью $\sigma$. Экспериментально распределение заряда по поверхности проводника в свое время демонстрировал английский физик Майкл Фарадей (1791–1867) в опытах с так называемой клеткой Фарадея. Оклеенная листами станиоля большая деревянная клетка изолировалась от Земли и сильно заряжалась при помощи электрической машины. В клетку с электроскопом помещался сам Фарадей. Электроскоп внутри клетки не показывал никакого отклонения. В условиях школьного кабинета физики показать распределение зарядов можно с помощью следующего опыта. Закрепим на изолированной подставке полый шар (рис. 177) и наэлектризуем его.

Затем маленьким шариком, закрепленным на изолированной ручке, коснемся внешней поверхности полого шара, а потом стержня электрометра. В таком случае стрелка электрометра отклонится. После касания маленьким шариком внутренней стенки полого шара стрелка электрометра не отклоняется. Следовательно,

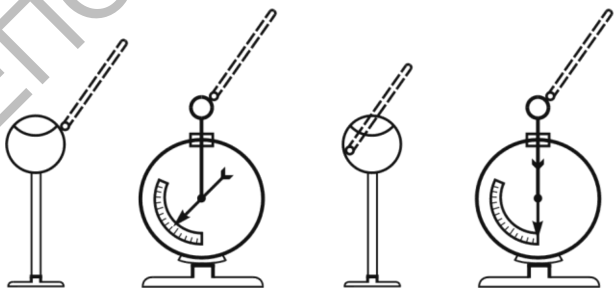

Рис. 177

все заряды сосредоточены на внешней поверхности проводника, а на поверхности полости в состоянии равновесия заряды располагаться не могут. Этот вывод вытекает и из того, что одноименные заряды отталкиваются и стремятся расположиться на наибольшем расстоянии друг от друга.

**Напряженность электрического поля у поверхности заряженного проводника.** Рассмотрим поверхность заряженного проводника (рис. 178).

Для расчета напряженности электрического поля у его поверхности воспользуемся теоремой Гаусса. Рассмотрим небольшой цилиндр, образованный нормалями к поверхности проводника и основаниями площадью *dS*, одно из которых расположено внутри проводника, другое – за его пределами.

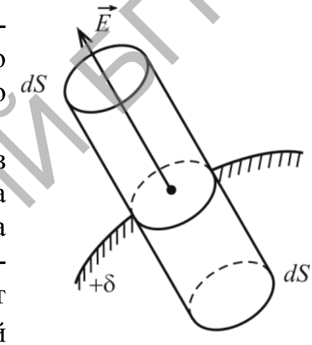

Рис. 178

Поток вектора напряженности через внутреннюю часть поверхности цилиндра равен нулю, так как внутри проводника электрическое поле отсутствует. Вне проводника в непосредственной близости от поверхности вектор $\vec{E}$ перпендикулярен ей (для этого высота цилиндра выбирается достаточно маленькой). В таком случае согласно теореме Гаусса для электрического заряда, расположенного внутри цилиндра, поток вектора напряженности через его поверхность равен:

$$E\,dS = \frac{\sigma\,dS}{\varepsilon_0}.$$

Отсюда следует, что напряженность поля вблизи поверхности проводника равна

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

и зависит только от плотности заряда на его поверхности.

## 10.8. Зависимость поверхностной плотности заряда от радиуса кривизны проводника. Электрический генератор Ван-де-Граафа

**Зависимость поверхностной плотности заряда от радиуса кривизны проводника.** Два заряженных шара с радиусами $R_1$, $R_2$ и зарядами $Q_1$, $Q_2$ обладают потенциалами

$$\varphi_1 = k\frac{Q_1}{R_1} \text{ и } \varphi_2 = \frac{Q_2}{R_2}.$$

В условиях равновесия их потенциалы должны быть равными ($\varphi_1 = \varphi_2$). Для достижения равновесия шары предварительно соединили проводником.

Величины зарядов связаны с поверхностной плотностью заряда следующим образом:

$$Q_1 = 4\pi R_1^2 \sigma_1,\ Q_2 = 4\pi R_2^2 \sigma_2.$$

Тогда, приравняв потенциалы шаров и использовав приведенные выше выражения для зарядов, получим:

$$k\frac{4\pi R_1^2 \sigma_1}{R_1} = k\frac{4\pi R_2^2 \sigma_2}{R_2}.$$

Результатом выполнения элементарных преобразований будет следующее выражение:

$$\sigma_1 R_1 = \sigma_2 R_2. \qquad (10.47)$$

Учитывая то, что поверхность проводника является эквипотенциальной, можно сделать вывод, что *плотность зарядов на поверхности проводника тем выше, чем больше ее кривизна (чем меньше радиус кривизны поверхности)*. Особенно больших значений достигает плотность зарядов на остриях. Напряженность же поля вблизи острия, соответственно, может быть настолько значительной, что ионизируются молекулы воздуха. Ионы, имеющие заряд со знаком, противоположным знаку заряда на проводнике, притягиваются к нему, а имеющие одноименный заряд – отталкиваются. В результате начинается движение последних от проводника, которое увлекает и нейтральные молекулы. Это явление, называемое электрическим ветром, легко наблюдать на опыте (рис. 179).

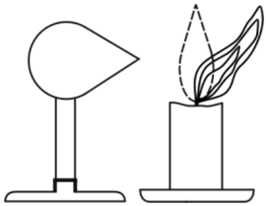

Рис. 179

Деформируем металлическую сферу таким образом, чтобы часть сферической поверхности превратилась в боковую поверхность конуса. Затем закрепим ее на изолирующей подставке так, как показано на рисунке. Если сферу сильно наэлектризовать и поднести вершиной конуса к зажженной свечке, то пламя отклонится.

**Электрический генератор Ван-де-Граафа.** Для передачи заряда от одного заряженного тела к другому достаточно привести их в соприкосновение. Еще М. Фарадей указал способ для полной передачи заряда от одного проводящего тела к другому проводящему телу. Для этого в последнем следует сделать полость и внести в нее первое заряженное тело; тогда при соприкосновении внесенного тела с поверхностью полости его заряд полностью переходит на второе тело (рис. 177). После этого тело извлекается из полости, заряжается и снова вносится для передачи заряда. Этот процесс повторяется многократно. Теоретически полому телу можно передать сколь угодно большой заряд. На практике же величина переданного заряда ограничивается утечкой электричества вследствие ионизации воздуха. На этом принципе и работает электростатический генератор Ван-де-Граафа (рис. 180).

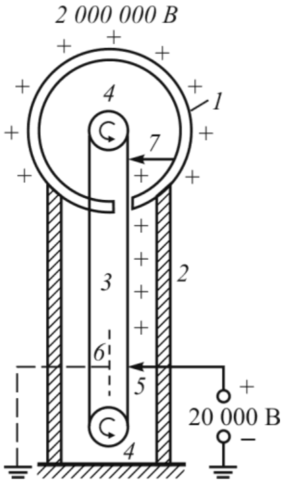


Рис. 180

Генератор состоит из полого металлического шара *1* диаметром в несколько метров, укрепленного на изолирующей колонне *2*. Внутри колонны движется транспортерная лента *3*, изготовленная из прорезиненной ткани, которая заряжается от источника напряжения при помощи системы остроконечных электродов *5*. С другой стороны ленты напротив остроконечных электродов находится заземленная пластина *6*, способствующая стеканию зарядов с этих электродов *5* на ленту *3*. Заряд ленты передается шару *1* посредством другой системы остроконечных электродов *7*, соединенных с его внутренней поверхностью. Генератор позволяет заряжать шар до потенциала 3–5 миллионов вольт и используется для ускорения заряженных частиц.

## 10.9. Проводники во внешнем электрическом поле. Электростатическая защита. Расчет полей наведенных зарядов. Метод зеркальных отображений

**Проводники во внешнем электрическом поле.** При внесении незаряженного проводника в электрическое поле все свободные носители заряда немедленно приходят в движение: положительные – в направлении вектора напряженности $\vec{E}$, отрицательные – в противоположную сторону. В результате на концах проводника возникают разноименные заряды, а внутри проводника возникает собственное электрическое поле, вектор напряженности которого направлен противоположно вектору внешнего поля. Перераспределение зарядов продолжается до тех пор, пока не выполняться условия (10.45) и (10.46), т. е. пока внутреннее электрическое поле, возникшее в результате перераспределения зарядов, полностью не скомпенсирует внешнее поле, а линии напряженности вне проводника не станут перпендикулярными его поверхности. Внесенный в электрическое поле нейтральный проводник искажает это поле. Часть силовых линий внешнего поля искривляется, а часть – разрывается: они заканчиваются на отрицательных зарядах и вновь начинаются на положительных (рис. 181).

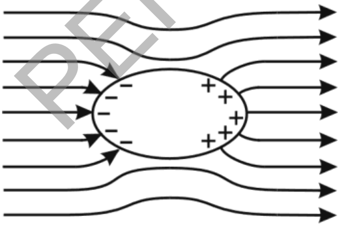

Рис. 181

Явление возникновения зарядов в незаряженном проводнике под действием внешнего электрического поля называется *электростатической индукцией*. Заряды, которые при этом возникают, называются *индуцированными* или *наведенными*.

С помощью явления электростатической индукции можно зарядить проводник, не приводя его в контакт с заряженным телом. Схема такого опыта представлена на рис. 182.

При внесении во внешнее поле двух соприкасающихся проводящих шаров в них происходит перераспределение зарядов. Если шары развести, не убирая их из поля, то наведенные заряды останутся на них.

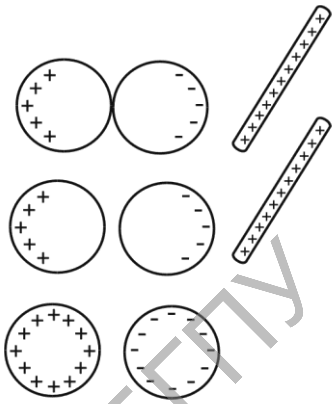

Рис. 182

**Электростатическая защита.** Отсутствие внутри проводника электрического поля позволяет относительно просто решать проблему защиты различных приборов от воздействия внешних электрических полей. Для этого достаточно поместить прибор в металлический корпус.

Несколько сложнее осуществляется экранизация источника поля – электрического заряда. Поместим точечный заряд, для определенности положительный, в центр сферы. В таком случае на внутренней поверхности сферы индуцируется равный ему по величине отрицательный заряд, а на внешней – положительный (рис. 183).

Внутри сферы линии напряженности начинаются на положительном заряде и заканчиваются на индуцированном отрицательном, распределенном на внутренней поверхности сферы.

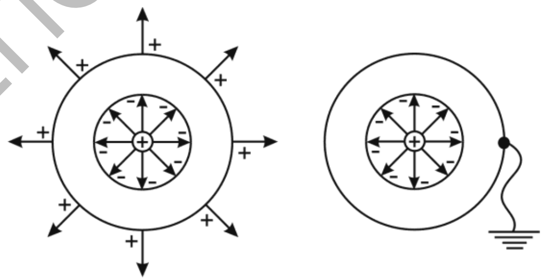

Рис. 183

Внутри проводника, из которого изготовлена сфера, поле отсутствует. За пределами же сферы поле определяется индуцированным на ее поверхности положительным зарядом. Значит, поместив заряд внутрь проводящей сферы, экранировать его нельзя. Если же сферу заземлить, то положительный заряд с ее внешней поверхности стечет в Землю. В результате внутри шара поле не измениться, а за ее пределами будет отсутствовать. Таким образом, через заземленный экран электрическое поле заряда, который он охватывает, не проникает.

**Расчет полей наведенных зарядов. Метод зеркальных отображений.** Основной задачей электростатики является расчет электрических полей, создаваемых заряженными телами различной формы. Эти тела могут по-разному размещаться в пространстве. Как правило, распределение заряда по поверхности проводника неизвестно, поэтому для решения подобных задач пользуются разными искусственными методами. Одним из них является метод зеркальных отображений. Рассмотрим задачу на нахождение поля точечного заряда $+Q$, расположенного над бесконечной плоской поверхностью проводника. Линии напряженности поля, создаваемого зарядом, должны заканчиваться на индуцированных зарядах противоположного знака на поверхности проводника (рис. 184, слева).

Картина этого поля идентична картине поля, создаваемого системой из двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов (рис. 184, справа). Плоскость *S*, которая делит поле на две равных части, является эквипотенциальной, силовые линии перпендикулярны к ней, и поэтому ее можно заменить проводящей

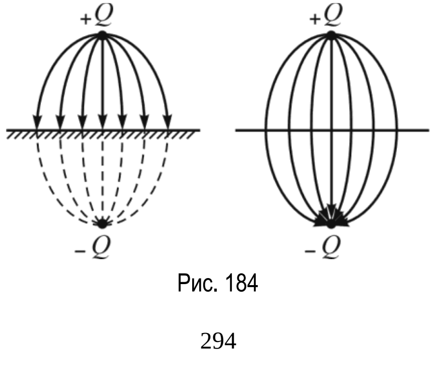


Рис. 184

плоскостью. Картина поля от этого не изменится. Теперь если (см. рис. 184, слева) под бесконечной плоскостью мысленно поместить заряд $-Q$, то получатся две абсолютно одинаковые картины распределения полей. В таком случае говорят, что заряд $-Q$, который находится на таком же расстоянии от поверхности проводника, что и $+Q$, является его зеркальным отображением в проводящей плоскости. Теперь задача расчета поля заряда, размещенного у поверхности проводника, сводится к расчету поля, создаваемого двумя равными по величине и противоположными по знаку зарядами. А такая задача вполне разрешима.

## 10.10. Электроемкость. Электроемкость уединенного проводника. Конденсаторы. Соединение конденсаторов

**Электроемкость. Электроемкость уединенного проводника.** Сообщенный уединенному проводнику заряд распределяется по его поверхности так, что напряженность электрического поля внутри него равна нулю. Уединенным называют проводник, расположенный настолько далеко от других тел, что они не влияют на распределение его заряда. Если такому проводнику сообщить дополнительный заряд, то он вновь распределится по его поверхности согласно условиям равновесия заряда в проводнике (10.45) и (10.46):

$$E = 0 \text{ и } E_n = E .$$

В любой точке проводника поверхностная плотность заряда пропорциональна величине заряда. Электростатическое поле заряженного проводника линейно зависит от плотности его заряда в согласии с формулой

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} .$$

Тогда и потенциал уединенного проводника пропорционален сообщенному ему заряду:

$$\varphi = \frac{1}{C} Q .$$

Коэффициент

$$C = \frac{Q}{\varphi} \qquad (10.48)$$

называют *емкостью уединенного проводника* или просто *электроемкостью*. Он численно равен электрическому заряду, который повышает потенциал проводника на единицу. Электроемкость проводника не зависит от материала, из которого он изготовлен, не зависит от агрегатного состояния материала проводника, но зависит от его размеров и формы. Единицей измерения электрической емкости в системе СИ служит *фарад*. Согласно (10.48)

$$C = \frac{1\,\text{Кл}}{1\,\text{В}} = 1\,\text{Ф} \ \text{(фарад)}.$$

1 фарад – электроемкость такого проводника, при сообщении которому заряда в 1 кулон его потенциал возрастает на 1 вольт. 1 фарад очень большая величина. На практике для оценки электроемкости обычно употребляются дольные величины: 1 микрофарад (1 мкФ = $1\cdot10^{-6}$ Ф), 1 нанофарад (1 нФ = $1\cdot10^{-9}$ Ф) и т. д. Для оценки единицы измерения емкости 1 Ф рассмотрим электроемкость уединенного шара. Для этого сообщим шару с радиусом $R$ заряд $Q$.

Тогда напряженность электрического поля, создаваемого шаром на расстоянии $r$, определяется формулой

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

С другой стороны, используя связь между вектором напряженности электрического поля и его потенциалом, получим:

$$\varphi - \varphi_\infty = \int_R^\infty E_r\,dr = \int_R^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_R^\infty = \left|\varphi_\infty = 0\right| = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}. \qquad (10.49)$$

Подставив (10.49) в (10.48), получим:

$$C = \frac{Q}{\varphi} = 4\pi\varepsilon_0 R\,. \qquad (10.50)$$

Из формулы (10.50) рассчитаем радиус проводника, который обладал бы электроемкость в 1 Ф:

$$R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{1}{4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}} = 9\cdot 10^9\,\text{м} = 9\cdot 10^6\,\text{км}\,.$$

Вспомним, что радиус Земли равен 6400 км.

**Конденсаторы.** Способность уединенных проводников накапливать электрические заряды ограничена. Например, проводящий шар с радиусом, равным радиусу Земли, имеет емкость всего в 700 мкФ. На практике же требуются устройства, способные накапливать значительные заряды. В основу конструкции таких устройств, называемых *конденсаторами*, положен тот факт, что электроемкость проводника в окружении других тел возрастает. Объясняется это тем, что под действием электрического поля заряженного проводника на находящихся вблизи его телах возникают либо индуцированные заряды, если эти тела – проводники, либо поляризационные заряды, если тела – диэлектрики (свойства последних будут рассмотрены далее). Смещение зарядов на окружающих телах происходит таким образом, что вблизи проводника располагаются заряды со знаком, противоположным знаку заряда проводника. Эти ближние заряды оказывают влияние на потенциал проводника, поскольку он представляет собой алгебраическую сумму потенциалов полей, создаваемых всеми зарядами (см. (10.38)) и рис. 185).

В таком случае потенциал проводника понижается и согласно (10.50) возрастает его электроемкость.

*Технический конденсатор* представляет собой систему из двух проводников, расположенных близко друг от друга и имеющих

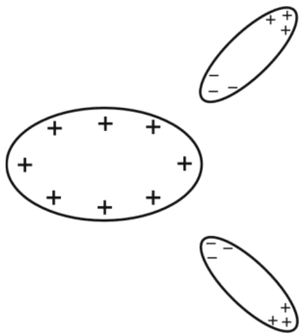

Рис. 185

такую форму, что электрическое поле, созданное накопленными на них зарядами, равными по величине и противоположными по знаку, сосредоточено в ограниченном пространстве между ними. Проводники в таком случае называют *обкладками конденсатора*. Линии напряженности электрического поля конденсатора начинаются на обкладке, заряженной положительно, и заканчиваются на обкладке, заряженной отрицательно.

Сообщение конденсатору заряда называют *зарядкой*. *Под величиной заряда конденсатора понимают абсолютное значение заряда на одной из его обкладок.* Чтобы зарядить конденсатор, достаточно сообщить заряд одной из его обкладок, а другую – заземлить. Эффективнее зарядка конденсатора происходит при подключении его обкладок к разноименным клеммам источника постоянного тока.

Электроемкостью конденсатора называется величина

$$C = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2}, \tag{10.51}$$

где $Q$ – заряд конденсатора, $\varphi_1 - \varphi_2$ – разность потенциалов между его обкладками. Чаще в (10.51) применяется величина $U = \varphi_1 - \varphi_2$, называемая *напряжением между обкладками*. Тогда формула (10.51) приобретает вид:

$$C = \frac{Q}{U}. \tag{10.52}$$

Электроемкость конденсатора измеряется в тех же единицах, что и электроемкость уединенного проводника – в фарадах. Ее значение определяется формой и размером обкладок, свойствами диэлектрика, которым заполнено пространство между обкладками. Первоначально будет рассмотрено электрические поля в вакууме. Электрическое поле с внесенным диэлектриком будет рассмотрено ниже.

В зависимости от формы промышленностью выпускаются плоские, сферические и цилиндрические конденсаторы.

***Плоский конденсатор.*** Плоский конденсатор представляет собой систему из двух проводящих пластин, каждая из которых имеет некоторую площадь $S$ (рис. 186).

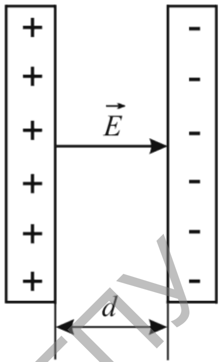

Рис. 186

Поскольку расстояние между обкладками конденсатора мало по сравнению с их площадью, граничными эффектами электростатического поля можно пренебречь (т. е. поле внутри конденсатора считаем однородным). Тогда для расчета напряженности поля между обкладками плоского конденсатора можно использовать формулу для расчета напряженности электрического поля между двумя бесконечно большими, заряженными противоположными по знаку зарядами плоскостями:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

где $\sigma$ – плотность заряда, распределенного на обкладках конденсатора. Напряжение между обкладками конденсатора

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_0^d E \cdot dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^d dx = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d.$$

Подставив последнее выражение в (10.52), получим выражение для расчета электроемкости плоского конденсатора:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q\varepsilon_0}{\sigma d} = \left|\sigma = \frac{Q}{S}\right| = \frac{Q\varepsilon_0 S}{Qd} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \qquad (10.53)$$

Из формулы (10.53) следует, что размерность электрической постоянной $\varepsilon_0$:

$$\varepsilon_0 = \frac{1\,\Phi}{1\,\text{м}} = 1\,\Phi/\text{м}.$$

***Сферический конденсатор.*** Сферический конденсатор представляет собой систему из двух концентрических проводящих сфер (рис. 187). Формула для его емкости выводится аналогично предыдущей.

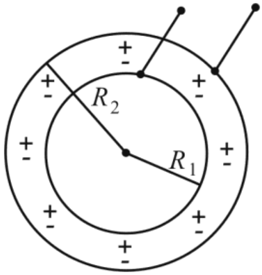

Рис. 187

Электрическое поле между обкладками согласно теореме Гаусса целиком определяется зарядом, распределенным на внутренней сфере конденсатора:

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Напряжение между обкладками

$$U = \int_{R_1}^{R_2} E\,dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,dr = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_{R_1}^{R_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

После подстановки в (10.52) получим:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1 R_2}{R_2 - R_1}, \tag{10.54}$$

или

$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\dfrac{1}{R_1} - \dfrac{1}{R_2}}. \tag{10.55}$$

Если $R_2 \to \infty$, формула (10.55) превращается в формулу для расчета электроемкости уединенного шара (10.50).

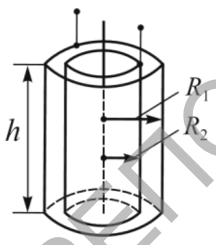


Рис. 188

Если же $R_2 - R_1 = d$ и выполняется условие $d \ll R_1$, тогда можем полагать, что $R_1 \approx R_2 = R$ и выражение для емкости примет следующий вид:

$$C = \frac{\varepsilon_0 4\pi R^2}{d} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

***Цилиндрический конденсатор.*** Цилиндрический конденсатор представляет собой систему из двух коаксиальных цилиндров (рис. 188).

Цилиндрические конденсаторы изготавливаются при условии, что $h \gg R_2 - R_1 = d$. Электрическое поле между обкладками целиком определяется зарядом внутреннего цилиндра

$$E = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 r h},$$

где $Q=\gamma h$ – заряд конденсатора, $\gamma$ – заряд, приходящийся на единицу длины обкладки.

$$U=\varphi_1-\varphi_2=\int_{R_1}^{R_2}E\,dr=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\frac{R_2}{R_1},$$

$$C=\frac{Q}{U}=\frac{Q}{\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 h}\ln\dfrac{R_2}{R_1}}=\frac{2\pi\varepsilon_0 h}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}. \qquad (10.56)$$

Если $d \ll R_1$, а $x \ll 1$, можно полагать $\ln(1+x)\approx x$, тогда

$$\ln\frac{R_2}{R_1}=\ln\left(1+\frac{R_2-R_1}{R_1}\right)=\ln\left(1+\frac{d}{R_1}\right)=\frac{d}{R_1},$$

(10.56) превращается в формулу для расчета электроемкости плоского конденсатора:

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 hR_1}{d}=\frac{\varepsilon_0 S}{d},$$

где $S=2\pi R_1 h$ – площадь боковой поверхности цилиндра.

Кроме электроемкости каждый конденсатор характеризуется предельным напряжением, которое можно подавать на его обкладки. В случае превышения этого напряжения конденсатор выходит из строя (происходит «пробой» конденсатора, т. е. через него начинает протекать электрический ток).

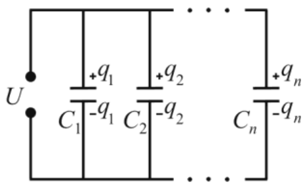

Рис. 189

**Соединение конденсаторов.** При использовании конденсаторов их часто соединяют в батареи. Соединение конденсаторов может быть параллельным, последовательным и комбинированным.

***Параллельное соединение конденсаторов.*** При параллельном соединении конденсаторов (рис. 189) напряжение на всех конденсаторах одинаковое, а заряды в таком случае равны:

$$Q_1=C_1U;\ Q_2=C_2U,\ \ldots,\ Q_n=C_nU.$$

Заряд батареи равен сумме зарядов, накопленных на каждом конденсаторе:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = C_1U + C_2U + \ldots + C_nU = U\sum_{i=1}^{n} C_i .$$

Емкость батареи

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{U\sum\limits_{i=1}^{n} C_i}{U} = \sum_{i=1}^{n} C_i . \qquad (10.57)$$

Согласно формуле (10.57) параллельное соединение применяется для увеличения емкости батареи.

***Последовательное соединение конденсаторов.*** Последовательное соединение конденсаторов применяется тогда, когда во избежание пробоя большую разность потенциалов требуется распределить между несколькими конденсаторами (рис. 190).

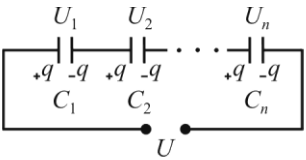


Рис. 190

При последовательном соединении на всех конденсаторах находится одинаковый заряд $Q$. Если на левую пластину первого конденсатора поместить заряд $+Q$, то вследствие электростатической индукции на его правой пластине появится заряд $-Q$, а на левой пластине второго конденсатора согласно закону сохранения заряда – заряд $+Q$. Наличие этого заряда снова вызовет появление на правой пластине наведенного заряда. Процесс распространяется на все включенные в батарею конденсаторы. Тогда все конденсаторы будут обладать одинаковым зарядом $Q$. Более того, общий заряд батареи также равен $Q$. Напряжение на каждом конденсаторе определяется его электроемкостью:

$$U_1 = \frac{Q}{C_1},\ U_2 = \frac{Q}{C_2},\ \ldots,\ U_n = \frac{Q}{C_n} .$$

Напряжение батареи

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n = \sum_{i=1}^{n} U_i = Q\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i} .$$

Электроемкость батареи определяется выражением

$$C = \frac{Q}{U}\,.$$

Сравнивая последние два выражения, получим формулу для расчета электроемкости батареи из последовательно соединенных конденсаторов:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_m} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}\,. \qquad (10.58)$$

Из формулы (10.58) следует, что *электроемкость батареи, составленной из группы последовательно соединенных конденсаторов, всегда меньше электроемкости любого из этих конденсаторов*.

На практике наиболее часто применяется комбинированное соединение конденсаторов. В таком случае расчет емкости батареи осуществляется с помощью формул (10.57) и (10.58).

## 10.11. Электрическое поле в диэлектриках. Поляризация диэлектриков. Поляризованность

**Электрическое поле в диэлектриках.** Выше рассматривались электрические поля, создаваемые заряженными телами в вакууме. Еще Фарадеем в середине XIX в. было замечено, что если между обкладками конденсатора поместить какое-либо непроводящее вещество, то его электроемкость заметно возрастает. Вещества, не способные проводить электрический ток, называют *диэлектриками*. В отличие от проводников, в идеальных диэлектриках отсутствуют свободные заряды. В отличие от проводников, все заряды в диэлектриках связаны в атомах и молекулах и могут стать свободными только под действием очень сильных электрических полей. Их называются *связанными зарядами*. Однако в реальных диэлектриках на их поверхности, а в некоторых и внутри в небольшом количестве могут присутствовать и *свободные заряды*.

**Поляризация диэлектриков.** Внесенные во внешнее электрическое поле диэлектрики испытывают воздействие, называемое *поляризацией*. Если к заряженному электрометру поднести толстую диэлектрическую пластину, то его показания уменьшатся.

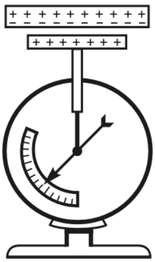

Рис. 191

Объяснить явление можно возникновением на нижней части пластины заряда, противоположного заряду электрометра. Соответственно, на верхней части пластины появится заряд одного знака с зарядом электрометра (рис. 191).

Явление возникновения зарядов противоположного знака на противоположных концах диэлектрика при внесении его во внешнее электрическое поле называется *поляризацией диэлектрика*.

Механизм поляризации диэлектриков определяется строением их молекул. Известно, что атом или молекула любого вещества являются электрически нейтральными. Однако центры распределения положительных и отрицательных зарядов в них могут совпадать или не совпадать. В первом случае молекулы называются *неполярными*, а во втором – *полярными*.

К неполярным относятся следующие вещества: $H_2$, $N_2$, $CO_2$, $CH_4$ и т. д. На рис. 192 показана схема поляризации такой молекулы. В электрическом поле на ядро действует сила, стремящаяся вытолкнуть его из поля. Вращающиеся вокруг ядра электроны она стремится втянуть в поле. В результате орбиты электронов вытягиваются, и центры распределения зарядов перестают совпадать. Молекула становится диполем. При внесении такого диэлектрика во внешнее поле все его молекулы становятся диполями и на противоположных поверхностях диэлектрика появляются нескомпенсированные заряды: слева – отрицательный, справа – положительный (рис. 192).

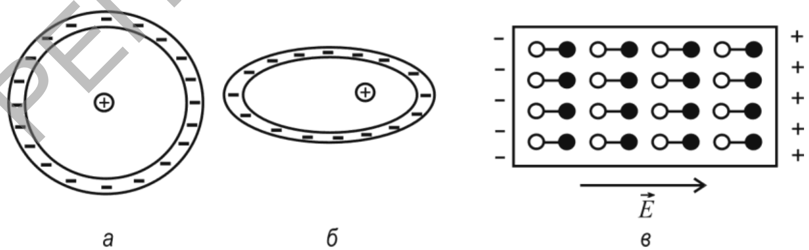


Рис. 192

Такой вид поляризации называется *поляризацией смещения* или *электронной поляризацией*. Степень поляризации смещения зависит от вида диэлектрика, напряженности внешнего поля и практически не зависит от температуры.

У полярных диэлектриков центры распределения положительных и отрицательных зарядов в молекулах не совпадают. К таким веществам относятся вода, спирт, ацетон, эфир, соляная кислота и т. д. В электрическом поле на каждую молекулу, как и на любой диполь, будет действовать вращательный момент. В результате каждый диполь будет стремиться разместиться параллельно полю (рис. 193).

Межмолекулярные связи и тепловое движение молекул будут препятствовать этому. В результате их переориентация будет неполной, однако в среднем число диполей, ориентированных вдоль поля, позволят возникнуть на противоположных гранях диэлектрика поляризационным зарядам. Такой вид поляризации называется *ориентационным* или *дипольным*. Степень ориентационной поляризации зависит от температуры, рода диэлектрика и напряженности внешнего электрического поля. Все полярные диэлектрики в той или иной степени подвержены и электронной поляризации.

При удалении диэлектриков из электрического поля их поляризация исчезает, так как тепловое движение молекул разрушает ориентацию диполей у полярных диэлектриков, а у неполярных – молекулы приобретают свою обычную форму.

Для характеристики электрических свойств диэлектриков служит физическая величина, называемая *диэлектрической*

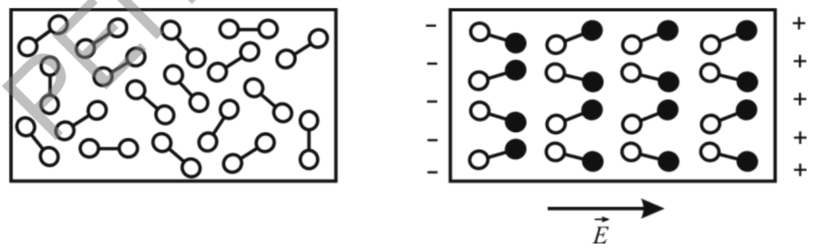


Рис. 193

*проницаемостью*. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon$ – физическая величина, которая показывает, во сколько раз уменьшается напряженность электрического поля, которое существует в вакууме при внесении в это поле диэлектрика. Соответственно этому происходит увеличение емкости конденсатора при заполнении пространства между его обкладками диэлектриком. Для всех без исключения веществ $\varepsilon > 1$, для вакуума же – $\varepsilon = 1$. Диэлектрическая проницаемость для полярных диэлектриков, как правило, несколько выше, чем для неполярных. В табл. 10.1 приведены значения диэлектрической проницаемости для некоторых веществ.

Табл. 10.1

| Вещество | $\varepsilon$ | Вещество | $\varepsilon$ | Вещество | $\varepsilon$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Воздух (при нормальных условиях) | 1,0006 | Слюда | 6–7 | Керосин | 2,0 |
| Сера | 4 | Стекло | 5,5–7 | Вода | 81 |
| Воск 0 | 7,8 | Фарфор | 5,7–6,3 | Янтарь | 12 |
| Парафин | 2,1 | Эбонит | 2,5 | | |

Рассмотрим, как зависит емкость конденсатора от наличия между его обкладками диэлектрика. Выберем плоский конденсатор и будем полагать, что его пластины (обкладки) первоначально разделены вакуумом. Если на пластинах находятся электрические заряды $+Q$ и $-Q$, то между ними существует электрическое поле со значением напряженности $E_0$. Заполним затем пространство между обкладками диэлектриком с проницаемостью $\varepsilon$. Значение напряженности поля между обкладками изменится и станет равным $E = E_0/\varepsilon$. По определению $C = Q/U$, а, в свою очередь, связь между напряженностью поля внутри конденсатора и напряжением на его обкладках есть $E = U/d$. Тогда выражение для емкости плоского конденсатора, обкладки которого разделены диэлектриком, примет следующий вид:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{Ed} = \frac{Q}{\dfrac{E_0 d}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon Q}{4\pi k\sigma d} = \frac{\varepsilon Q}{4\pi k \dfrac{Q}{S} d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon C_0,$$

где $C_0$ есть емкость конденсатора, в котором обкладки разделены вакуумом.

**Поляризованность.** Для количественной характеристики степени поляризации диэлектрика вводится *поляризованность* – векторная величина, равная отношению суммы электрических моментов молекул, заключенных в физически малом элементе диэлектрика, содержащем данную точку, к объему этого элемента:

$$\vec{P} = \frac{\sum\limits_{\Delta V} \vec{p}_i}{\Delta V}, \qquad (10.59)$$

где $\vec{p}_i$ – дипольный момент *i*-й молекулы.

Если поляризованность имеет одно и то же значение по всему объему диэлектрика, то поляризацию называют *однородной* и (10.59) имеет вид:

$$\vec{P} = \frac{\sum\limits_{V} \vec{p}_i}{V}. \qquad (10.60)$$

В противном случае поляризацию называют *неоднородной*. Размерность вектора поляризованности

$$\left[\vec{P}\right] = \frac{\left[\vec{P}\right]}{V} = \frac{1\,\text{Кл}\cdot\text{м}}{1\,\text{м}^3} = 1\,\text{Кл}/\text{м}^2 .$$

Нетрудно заметить, что размерность поляризованности диэлектрика совпадает с размерностью поверхностной плотности зарядов. Между этими величинами существует простая связь. Если поляризация однородная, то поляризационные заряды возникают только на поверхности диэлектрика. Если поляризация неоднородная, то нескомпенсированные поляризационные заряды возникают и внутри его объема. В связи с этим различают поверхностные и объемные поляризационные заряды. Суммарный поляризационный заряд диэлектрика в силу действия закона сохранения заряда равен нулю:

$$\int\limits_V \rho_\text{п}\, dV + \int\limits_S \sigma_\text{п}\, dS = 0, \qquad (10.61)$$

где $\sigma_п$ – поверхностная плотность поляризационных зарядов, $\rho_п$ – объемная плотность поляризационных зарядов, $V$ – объем образца диэлектрика, $S$ – площадь его поверхности. При однородной поляризации объемные заряды не возникают и каждое слагаемое в (10.61) равно нулю. При неоднородной поляризации нулю равна сумма, и тогда поверхностный поляризационный заряд равен объемному:

$$\int_V \rho_п \, dV = -\int_S \sigma_п \, dS . \qquad (10.62)$$

Пусть большая плоскопараллельная пластина из однородного диэлектрика находится в однородном электрическом поле. Поляризация диэлектрика при таких условиях будет однородной. Мысленно выделим в пластине цилиндрический объем $\Delta V$ таким образом, что его боковые поверхности параллельны вектору напряженности поля $\vec{E}$ (рис. 194).

На гранях оснований цилиндра, площадь которых $\Delta S$, возникнут поляризационные заряды с поверхностной плотностью $+\sigma_п$ и $-\sigma_п$. Цилиндр приобретает электрический момент $p = \sigma_п \Delta S \, l$. Поляризованность цилиндра

$$P = \frac{p}{\Delta V} = \frac{\sigma_п \Delta S \, l}{\Delta V} .$$

Объем цилиндра $\Delta V = \Delta S_{\perp} l = \Delta S l \cos\alpha$, где $\alpha$ – угол между вектором нормали к положительно заряженному основанию цилиндра и вектором $\vec{P}$. В таком случае

$$P = \frac{\sigma_п \Delta S \, l}{\Delta S l \cos\alpha} = \frac{\sigma_п}{\cos\alpha}, \text{ или } \sigma_п = P\cos\alpha = P_н , \qquad (10.63)$$

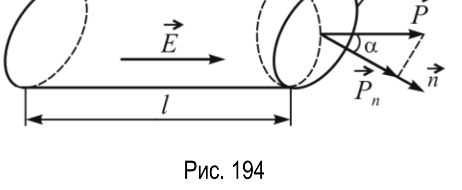


Рис. 194

где $P_н$ – проекция вектора $\vec{P}$ на направление нормали к поверхности $\Delta S$. Формула (10.63) получена для положительно заряженного основания цилиндра, однако она справедлива и для отрицательно заряженного основания. На боковой поверхности цилиндра поверхностная плотность зарядов и нормальная составляющая вектора поляризованности равны нулю.

## 10.12. Поле внутри диэлектрика. Связь между векторами напряженности и электрического смещения. Электрическая восприимчивость

**Поле внутри диэлектриков.** В диэлектриках в отличие от металлов электрическое поле не равно нулю. Возникающие в процессе поляризации связанные заряды лишь ослабляют внешнее поле. Для расчета полей в диэлектриках применяется теорема Гаусса, которая учитывает не только свободные заряды, но поляризационные. Мысленно выделим в диэлектрике произвольный объем *V*, ограниченный поверхностью *S*. Теорема Гаусса для данного объема запишется в виде:

$$\oint_S E_n\, dS = \frac{Q + Q_n}{\varepsilon_0}, \qquad (10.64)$$

где $Q_n = \int_V \rho_n\, dV$ – полный поляризационный заряд в объеме *V*, $\rho_n$ – объемная плотность этого заряда. Уравнение (10.64) можно переписать:

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n\, dS = Q + \int_V \rho_n\, dV . \qquad (10.65)$$

Учитывая формулу (10.61), последнее выражение можно преобразовать:

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n\, dS = Q - \int_S \sigma_n\, dS ,$$

или, учитывая выражение (10.63),

$$\oint_S \varepsilon_0 E_n\, dS + \int_S P_n\, dS = Q . \qquad (10.66)$$

Поскольку поток вектора напряженности через боковую поверхность мысленно выделенного цилиндра равен нулю, то формулу (10.66) преобразуем следующим образом:

$$\int_S \varepsilon_0 E_n \, dS + \int_S p_n \, dS = \int_S \; \varepsilon_0 E_n + P_n \;\; dS = Q\,. \tag{10.67}$$

Введем новую физическую величину – *вектор электрического смещения* $\vec{D}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\,. \tag{10.68}$$

С учетом выражения (10.68) формула (10.67) приобретет вид:

$$\int_S D_n \, dS = Q\,. \tag{10.69}$$

Выражение (10.69) представляет собой *теорему Гаусса для поля в диэлектрике*: *поток вектора электрического смещения через любую замкнутую поверхность равен сумме свободных зарядов, которые находятся внутри объема диэлектрика, охваченного этой поверхностью*.

Размерность вектора электрического смещения такая же, как и вектора поляризованности:

$$D \;\; = 1\,\text{Кл}/\text{м}^2\,.$$

**Связь между векторами напряженности и электрического смещения. Электрическая восприимчивость.** Вектором электрического смещения удобно пользоваться в диэлектриках, потому что его силовые линии начинаются и заканчиваются только на свободных зарядах (в отличие от линий вектора напряженности). В вакууме связь между этими величинами совсем простая. В вакууме нет молекул. Следовательно, вектор поляризованности равен нулю. Тогда согласно (10.68)

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\,. \tag{10.70}$$

Связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$ в диэлектриках установлена экспериментально. Как для полярных, так и для неполярных диэлектриков, которые находятся в не слишком сильных электрических полях, выполняется условие

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}\,, \tag{10.71}$$

где коэффициент пропорциональности $\chi$ называется *электрической восприимчивостью* диэлектрика. Линейная зависимость между векторами $\vec{P}$ и $\vec{E}$ в выражении (10.71) объясняется тем, что напряженность электрического поля, способного вызывать поляризацию диэлектрика, значительно меньше напряженностей электрических полей внутри атомов и молекул. Отметим, что в очень сильных электрических полях равенство (10.71) выполняться не будет.

Найдем связь между диэлектрической проницаемостью и электрической восприимчивостью диэлектрика. После подстановки в выражение (10.68) значения поляризации из (10.71) получим:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi)\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\,. \qquad (10.72)$$

Докажем равенство $\varepsilon = 1+\chi$.

В плоском конденсаторе, где поле однородное, выполняется равенство

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon},$$

где $E_0$ – напряженность электрического поля между обкладками конденсатора в вакууме, $E$ – напряженность электрического поля между обкладками конденсатора при наличии там диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon$,

$$\varepsilon = \frac{E_0}{E}\,. \qquad (10.73)$$

Выразим $E_0$ и $E$ соответственно из выражений (10.70) и (10.72) и подставим их в формулу (10.73):

$$\varepsilon = \frac{\dfrac{D}{\varepsilon_0}}{\dfrac{D}{\varepsilon_0(1+\chi)}} = 1+\chi\,. \qquad (10.74)$$

Из (10.74) следует, что электрическая восприимчивость, как и диэлектрическая проницаемость, – величина безразмерная.

Таким образом, в однородным неограниченном изотропном диэлектрике связь между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$ простая: они имеют одно и то же направление и отличаются только множителем $\varepsilon\varepsilon_0$.

## 10.13. Электрическое поле на границе раздела двух диэлектриков. Особенности поляризации твердых диэлектриков

**Электрическое поле на границе раздела двух диэлектриков.** Где бы не находился диэлектрик, его поверхность всегда является границей раздела двух сред: либо диэлектрика и проводника, либо диэлектрика и вакуума, либо диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1$ и диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon_2$. Рассмотрим границу раздела двух диэлектриков (рис. 195).

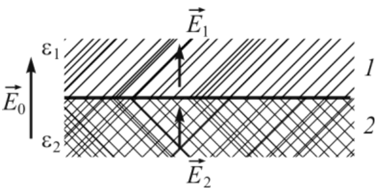


Рис. 195

Рассмотрим электрическое поле, вектор напряженности которого $\vec{E}_0$ направлен перпендикулярно границе раздела диэлектриков из среды *1* в среду *2*. Его абсолютное значение в вакууме обозначим как $E_0$, а в средах *1* и *2* соответственно $E_1 = \dfrac{E_0}{\varepsilon_1}$ и $E_2 = \dfrac{E_0}{\varepsilon_2}$. Сравнивая выражения для $E_1$ и $E_2$, получим, что

$$\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2. \qquad (10.75)$$

Поскольку в рассматриваемом случае $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_2$ перпендикулярны к границе раздела диэлектриков, в (10.75) их можно заменить проекциями на нормаль к границе раздела:

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2}. \qquad (10.76)$$

Выражение (10.76) показывает, что *нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля при переходе через границу раздела двух диэлектриков претерпевает разрыв*.

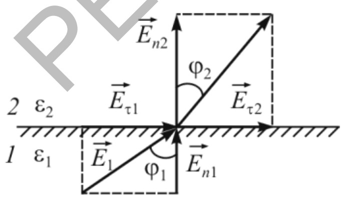


Рис. 196

Теперь рассмотрим общий случай. Напряженность электрического поля направлена под некоторым углом к границе раздела (рис. 196).

В таком случае вектор напряженности можно разложить на две составляющие: на нормальную $\vec{E}_n$ и тангенциальную $\vec{E}_\tau$. Нормальная составляющая при переходе из диэлектрика *1* в диэлектрик *2* изменяется согласно (10.76), а тангенциальная – изменения не претерпевает:

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}\,. \qquad (10.77)$$

Докажем последнее равенство. Для этого на границе раздела двух диэлектриков рассмотрим прямоугольный контур *abcd* и рассчитаем циркуляцию вектора напряженности вдоль этого контура (рис. 197).

Для потенциального поля циркуляция вектора напряженности по замкнутому контуру равняется нулю. Поскольку электростатическое поле является потенциальным, то его циркуляция есть

$$\oint\limits_l E_l\,dl = 0\,.$$

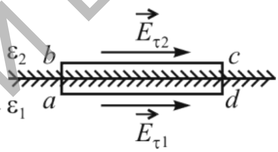


Рис. 197

Будем обходить контур в следующем направлении: $a \to d \to c \to b \to a$. Тогда циркуляция вектора напряженности может быть записана в следующем виде:

$$\int\limits_a^d E_l\,dl + \int\limits_d^c E_l\,dl - \int\limits_c^b E_l\,dl - \int\limits_b^a E_l\,dl = 0\,.$$

Выберем контур таким образом, чтобы выполнялось условие:

$$\int\limits_d^c E_l\,dl - \int\limits_d^a E_l\,dl = 0\,,$$

тогда для двух других слагаемых получим следующее условие:

$$\int\limits_a^d E_l\,dl - \int\limits_c^b E_l\,dl = 0\,,$$

или

$$E_{\tau 2}\,l_{ad} - E_{\tau 2}\,l_{cb} = 0\,.$$

Поскольку $l_{ad} = l_{cb}$, то заключаем, что

$$E_{\tau 1} = E_{\tau 2}\,.$$

Таким образом, *тангенциальная составляющая вектора напряженности электрического поля при переходе через границу раздела двух диэлектриков разрыв не претерпевает*.

Умножим левую и правую части равенства (10.76) на $\varepsilon_0$:

$$\varepsilon_0\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_0\varepsilon_2 E_{n2},$$

или согласно (10.72) можем записать:

$$D_{n1} = D_{n2}. \tag{10.78}$$

*Нормальная составляющая вектора электрического смещения при переходе через границу раздела двух диэлектриков остается непрерывной.*

Согласно выражению (10.72)

$$E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0}.$$

Подставив правую часть этой формулы в (10.77), с учетом индексов получим:

$$\frac{D_{\tau1}}{\varepsilon_1\varepsilon_0} = \frac{D_{\tau2}}{\varepsilon_2\varepsilon_0}, \text{ или } \frac{D_{\tau1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau2}}{\varepsilon_2}. \tag{10.79}$$

*Тангенциальная составляющая вектора электрического смещения при переходе через границу раздела двух диэлектриков претерпевает разрыв.*

Выпишем для наглядности все полученные выражения:

$$\varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2},\ D_{n1} = D_{n2},\ E_{\tau1} = E_{\tau2},\ \frac{D_{\tau1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tau2}}{\varepsilon_2}. \tag{10.80}$$

Группа уравнений (10.80) определяет условия на границе двух диэлектриков: *при переходе через границу раздела двух диэлектриков силовые линии вектора напряженности электрического поля и электрического смещения преломляются*.

Рассмотрим условия преломления. В соответствие с рис. 196

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{E_{\tau1}}{E_{n1}},\ \operatorname{tg}\varphi_2 = \frac{E_{\tau2}}{E_{n2}},\ \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{E_{\tau1}/E_{n1}}{E_{\tau2}/E_{n2}} = \frac{E_{n2}}{E_{n1}}.$$

Из первого уравнения группы (10.80) следует:

$$E_{n2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} E_{n1}.$$

Подставив значение $E_{n2}$ в последнее выражение, получим:

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2} = \frac{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}E_{n1}}{E_{n1}} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}.$$

Тогда для тангенсов углов $\varphi_1$ и $\varphi_2$ получим следующее соотношение:

$$\operatorname{tg}\varphi_2 = \operatorname{tg}\varphi_1 \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}. \qquad (10.81)$$

Формула (10.81) показывает, что при входе электрического поля в диэлектрик с меньшей диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) линии напряженности и линии смещения приближаются к нормали, восстановленной к границе раздела, и, наоборот, при входе в диэлектрик с большей диэлектрической проницаемостью ($\varepsilon_1 < \varepsilon_2$) – отдаляются от нее. Формула (10.81) справедлива как для силовых линий напряженности, так и для линий вектора электрического смещения только в изотропных диэлектриках. Однако картины этих линий внутри диэлектрика отличаются, поскольку линии электрического смещения неразрывны (рис. 198, *а*), а линии напряженности частично прерываются (рис. 198, *б*).

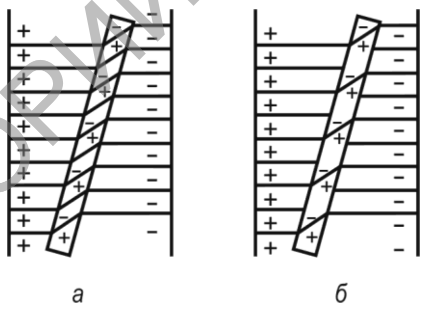


Рис. 198

Густота линий напряженности в соответствии с (10.72) внутри диэлектрика меньше, чем за его пределами, а густота линий смещения одинаковая – не изменяется.

**Особенности поляризации твердых диэлектриков.** Для обширного класса диэлектриков связь между вектором напряженности электрического поля и вектором поляризованности диэлектрика линейна и определяется приведенным выше выражением (10.71) $\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$. Однако в кристаллах, где наблюдается анизотропия, соотношение (10.71) заменяется более общей линейной однородной зависимостью:

$$P_x = \varepsilon_0 \chi_{xx} E_x + \varepsilon_0 \chi_{xy} E_u + \varepsilon_0 \chi_{xz} E_z \,,$$
$$P_y = \varepsilon_0 \chi_{yx} E_x + \varepsilon_0 \chi_{yy} E_u + \varepsilon_0 \chi_{yz} E_z \,, \qquad (10.81a)$$
$$P_z = \varepsilon_0 \chi_{zx} E_x + \varepsilon_0 \chi_{zy} E_u + \varepsilon_0 \chi_{zz} E_z \,.$$

В данном случае вместо одной величины $\chi$, одинаковой во всем объеме для рассматриваемых ранее однородных диэлектриков, при расчетах полей необходимо учитывать девять значений $\chi_{ij}$ $i, j = x, y, z$, с помощью которых выражается связь между составляющими векторов $\vec{P}$ и $\vec{E}$ вдоль осей координат. Точно таким же образом можно выразить и зависимость между векторами $\vec{D}$ и $\vec{E}$ в случае произвольной ориентации кристалла во внешнем поле. В таком случае вместо девяти величин $\chi_{ij}$ рассматривается девять величин $\varepsilon_{ij}$.

Для твердых диэлектриков, как для кристаллических, так и для аморфных наблюдаются и другие особенности поляризации, которые позволяют выделять целые классы диэлектрических веществ. У большинства твердых диэлектриков диэлектрическая проницаемость не зависит от температуры, что свидетельствует о том, что они поляризуются в результате смещения зарядов внутри молекул. Ориентационная поляризация у них практически не наблюдается. Дипольные молекулы и у кристаллических, и у аморфных диэлектриков настолько сильно взаимодействуют между собой, что при обыкновенных по напряженности полях они не могут ориентироваться вдоль поля. Это взаимодействие объясняет и значительно меньшие значения диэлектрической проницаемости одних и тех же веществ в твердом состоянии, чем в жидком.

**Электреты.** Среди твердых диэлектриков есть вещества, способные после снятия внешнего воздействия, вызвавшего поляризацию, создавать электрическое поле в окружающем пространстве. Они являются аналогами постоянных магнитов. Если расплавить вещество, молекулы которого обладают дипольным моментом, и поместить в сильное электрическое поле, а затем действие поля снять после затвердевания вещества, то поляризованное состояние может сохраняться от нескольких дней до нескольких лет. Именно таким образом был изготовлен первый электрет японским физиком Ёгучи в 1922 г. Такие электреты называются *термоэлектретами*. Стабильные электреты получены из аморфных веществ, неорганических поликристаллических диэлектриков, полимеров, монокристаллических неорганических диэлектриков. Электреты получают, освещая диэлектрик в сильном электрическом поле *(фотоэлектреты)*, облучая радиоактивным излучением *(радиоэлектреты)*, помещая диэлектрик в магнитное поле *(магнетоэлектреты)* и т. д. Электреты применяют как источники постоянного электрического поля, а также как чувствительные датчики в дозиметрических приборах. К электретам относятся пчелиный воск, парафин, нафталин, фтористый литий (LiF применяется в дозиметрии), корунд, различные стекла, некоторые виды керамик и др.

**Пьезоэлектрики.** Во многих кристаллах при растяжении и сжатии в определенных направлениях наблюдается поляризация. Это явление, получившее название *прямого пьезоэлектрического эффекта*, открыто в 1880 г. Пьером и Жаком Кюри. Наблюдается оно в кристаллах турмалина, цинковой обманки, хлората натрия, винной кислоты, сегнетовой соли, тростникового сахара, титаната бария и т. д. Пьезоэлектрические свойства обнаруживаются только у ионных кристаллов. Кристаллические решетки положительных и отрицательных ионов, из которых построены такие кристаллы, под действием внешних сил деформируются по-разному. В результате в противоположных местах на поверхности кристалла появляются электрические заряды разных знаков. Для обнаружения пьезоэффекта на грани кристаллической пластинки накладывают металлические обкладки. Если обкладки разомкнуты, то при деформациях пластинки между ними возникает разность потенциалов. В случае замкнутых обкладок на них при деформациях возникают заряды, равные по величине и противоположные по знаку поляризационным зарядам, возникающим на поверхностях пластинки, и в цепи течет электрический ток.

Классическим пьезоэлектриком является кварц ($SiO_2$), и на его примере проще всего рассмотреть механизм возникновения эффекта. Элементарная ячейка его кристаллической решетки содержит три молекулы $SiO_2$. Упрощенная схема такой ячейки представлена на рис. 199, на которой положительные ионы кремния ($Si^{4+}$) изображены большими шариками, а для упрощения рассуждений пары соседних ионов кислорода 2 ($O^{2-}$) маленькими шариками.

При сжатии вдоль оси *X* положительные ионы кремния перемещаются вглубь ячейки, в результате чего на плоскостях *A* и *B* появляются заряды. При растяжениях на тех же плоскостях появляются заряды противоположного знака. Поверхностная плотность зарядов и равный ей модуль вектора поляризации в области упругих деформаций прямо пропорциональны действующему на кристалл механическому напряжению, т. е. силе, рассчитанной на единицу площади поверхности:

$$\sigma = P = df \, . \qquad (10.82)$$

Коэффициент пропорциональности *d* называется *пьезоэлектрическим модулем*. Его размерность $\sigma = 1$ Кл/Н. На самом деле теория пьезоэффекта гораздо сложнее. Его величина зависит от свойств вещества и направления действия силы. Пьезоэлектрические свойства можно создавать и в некоторых некристаллических диэлектриках за счет образования в них так называемой пьезоэлектрической текстуры, например, поляризацией в электрическом поле *(пьезокерамика)*, механической обработкой (древесина) и т. д. Используется пьезоэффект для измерения давлений, в микрофонах, телефонах и т. д.

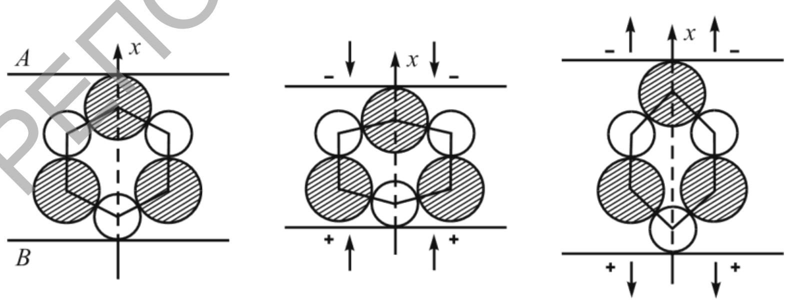


Рис. 199

Если пьезоэлектрик поместить во внешнее электрическое поле, то в нем возникают напряжения, приводящие к деформации образца. Это так называемый *обратный пьезоэлектрический эффект*. Явление было предсказано французским физиком Г. Липпманом (1845–1921) в 1881 г. и в том же году подтверждено экспериментально братьями Кюри. При помещении в переменное электрическое поле пластинка сжимается и расширяется в зависимости от направления поля. Если частота поля совпадает с частотой собственных колебаний пластинки, наступает резонанс. Возникающие колебания пластинки передаются окружающей среде и распространяются в ней. Явление можно широко использовать на практике, например, для неразрушающего контроля качества металлов. Известно, что в металлах ультразвуковые волны распространяются без заметного поглощения. Но если там есть полости или какие-то другие дефекты, то волны на них рассеиваются. Создавая с помощью пластинки ультразвуковые волны в металле и контролируя их распространение, эти дефекты можно обнаруживать.

**Пироэлектрики.** У некоторых пьезоэлектрических кристаллов решетка положительных ионов в состоянии термодинамического равновесия смещена относительно решетки отрицательных ионов. Кристалл оказывается поляризованным даже в отсутствие электрического поля. Такая поляризация называется *спонтанной*. Вещества, обладающие спонтанной поляризацией, называются *пироэлектриками*. Обычно эффект спонтанной поляризации скрыт свободными поверхностными зарядами, которые появляются в результате оседания ионов из воздуха на поверхность пироэлектрика. При нагревании ионные решетки сдвигаются в кристалле одна относительно другой, вследствие чего на противоположных гранях возрастают заряды противоположных знаков. Наблюдается не сама спонтанная поляризация, а ее изменение при быстром изменении температуры. Появление электрических зарядов на поверхности кристаллов в результате быстрого изменения температуры называется *прямым пироэлектрическим эффектом*. К пироэлектрикам относится только половина из двадцати кристаллических классов, обладающих пьезоэлектрическим эффектом.

К наиболее известным пироэлектрикам относится турмалин. Кристаллы турмалина при погружении в горячий пепел сначала притягивают его, а затем отталкивают. В Европе об удивительных свойствах кристаллов турмалина узнали в самом начале XVIII в., после того как его туда завезли голландские купцы с острова Шри Ланка. Лишь во второй половине XIX в. свойства турмалина были изучены и объяснены. Немецкий физик А. Кундт (1839–1894) погружал кристалл турмалина в смесь порошков сурика и серы. В результате перемешивания сурик электризуется положительно, а сера – отрицательно. В процессе нагревания красный сурик притягивается к отрицательно заряженной грани кристалла, сера – к заряженной положительно. Заряженные участки располагаются на противоположных гранях кристалла. В том, что турмалин поляризован спонтанно при обычных температурах, можно убедиться, разломив кристалл и погрузив один из его кусков в чашку, заполненную ртутью и соединенную с гальванометром. По количеству электричества, протекшего через гальванометр, можно определить даже степень поляризации кристалла.

Помимо прямого пироэлектрического эффекта существует и обратный. Изменение внешнего электрического поля, в которое помещен пироэлектрик, в адиабатических условиях приводит к изменению его температуры. Пироэлектрические кристаллы могут использоваться в качестве чувствительных приемников инфракрасного излучения.

**Сегнетоэлектрики**. Из группы пироэлектриков особый интерес представляют кристаллы, называемые *сегнетоэлектриками*, у которых спонтанная поляризация наблюдается лишь в определенных интервалах температуры. Эта область температур называется *полярной областью*. На границе полярной области сегнетоэлектрики испытывают фазовые превращения, переходя в новые кристаллические модификации, в которых спонтанная поляризация не наблюдается. От обычных пироэлектриков они отличаются еще тем, что направление спонтанной поляризации может быть изменено сравнительно слабым внешним электрическим полем (переполяризация). У остальных пироэлектриков переполяризация невозможна даже в сильных электрических полях. Прямая, параллельная вектору спонтанной поляризации сегнетоэлектрика, называется *полярной осью*. Существуют сегнетоэлектрики с одной полярной осью и с несколькими полярными осями. Кристаллическая модификация, в которой сегнетоэлектрик спонтанно поляризован, называется *полярной фазой*, а модификация, в которой спонтанной поляризации нет, – *неполярной фазой*. Температура, при которой происходит переход из одной фазы в другую, называется точкой Кюри в честь П. Кюри. Чаще сегнетоэлектрик имеет одну точку Кюри, ниже которой он находится в полярной фазе, а выше – в неполярной. Однако есть вещества, которые имеют две точки Кюри. Среди них сегнетова соль, или, как ее называют, двойная натриевокалиевая соль винной кислоты $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$. Эта соль и дала название всему классу. Спонтанная поляризация у сегнетовой соли наблюдается только в диапазоне температур от –18 °C до +24 °C. На сегодня известно несколько сотен сегнетоэлектриков. Сегнетова соль обладает малой механической прочностью и очень гигроскопична, и вследствие этого ее практическое применение очень ограничено. Важнейшим сегнетоэлектриком является титанат бария ($BaTiO_3$). Он отличается высокой механической прочностью и химической устойчивостью. Переход из полярной в неполярную фазу у него происходит при температуре 120 °C.

Обычно сегнетоэлектрики не являются однородно поляризованными. Сегнетоэлектрики состоят из доменов – уже поляризованных областей, причем у каждого домена такое направление поляризации, что суммарный дипольный момент образца практически равен нулю. Размеры доменов различных образцов сегнетоэлектриков имеют вполне макроскопическую величину. Так, минимальная ширина доменов титаната бария составляет 30–50 нм, а в обычных условиях – от 4 мкм до 10 мкм. На рис. 200 схематично показано изображение доменов для титаната бария.

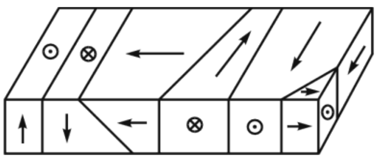

Рис. 200

Наличием доменов объясняется возможность существования полярной фазы только в определенном диапазоне температур. Спонтанная

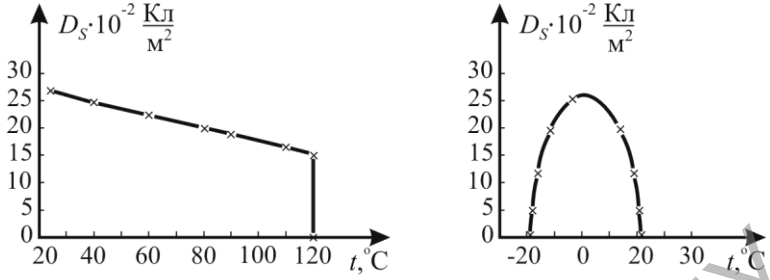


Рис. 201

поляризация за пределами этого температурного диапазона прекращает свое существование. Спонтанная поляризация линейных пироэлектриков не исчезает даже при нагревании их до температуры химического разложения. На рис. 201 представлены зависимости вектора спонтанной поляризации от температуры для титаната бария *(а)* и сегнетовой соли *(б)*.

Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков сильно зависит от температуры как в полярной фазе, так и в неполярной.

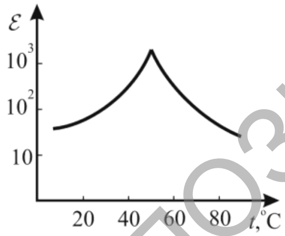


Рис. 202

Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков принимает очень большие значения (до $10^4$–$10^5$) не только при температурах, близких к точке Кюри. Для температур, далеких от нее, значение диэлектрической проницаемости значительно выше, чем у других диэлектриков. Вспомним, что для большинства твердых диэлектриков ε составляет несколько единиц. На рис. 202 представлена температурная зависимость $\varepsilon = \varepsilon \;\; t$ для триглицинсульфата.

В неполярной фазе при температурах, близких к точке Кюри, выполняется закон Кюри – Вейса:

$$\varepsilon = \frac{C}{T - T_C}, \qquad (10.83)$$

где $C$ – постоянная Кюри, которая определяется экспериментально и для каждого сегнетоэлектрика имеет свое значение. Например, для сегнетовой соли $C = 2{,}2 \cdot 10^3$ К, для титаната бария $C = 1{,}5 \cdot 10^5$ К.

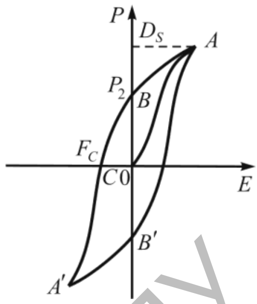


Рис. 203

Поляризованность сегнетоэлектрика зависит не только от напряженности электрического поля в момент ее определения, но и от напряженности поля, в котором образец находился до того, т. е. от «предыстории» исследуемого образца. Если неполяризованный сегнетоэлектрик внести во внешнее электрическое поле и напряженность его плавно увеличивать, начиная от нуля, то поляризованность $\vec{P}$ сначала резко возрастает, а затем достигает насыщения (кривая *OA*, рис. 203).

Под действием электрического поля доменные границы смещаются так, что объемы доменов, поляризованных по полю, растут за счет доменов, поляризованных против поля. В достаточно сильных полях образец становится однодоменным и наступает насыщение. При уменьшении напряженности внешнего поля до нуля уменьшение вектора $\vec{P}$ идет по другой, более пологой кривой *(AB)*. При $E = 0$ значение $P \neq 0$. Образец остается поляризованным, на нем сохраняется остаточная поляризованность $P_r$ (на оси ординат отрезок *OB*). Для того чтобы уменьшить поляризованность до нуля, необходимо изменить направление вектора напряженности электрического поля на противоположное. Значение напряженности электрического поля $E_c$, приложенного в обратном направлении, при котором поляризованность сегнетоэлектрика становится равной нулю, называется *коэрцитивной силой* (отрезок *OC* на оси абсцисс). При дальнейшем увеличении напряженности поля поляризованность достигает насыщения, но уже в противоположном направлении ($CA'$). Цикл замыкается по кривой $A'B'C'A$. Полученная кривая зависимости $\vec{P} = P \ \vec{E}$ называется *петлей гистерезиса*. Если поляризованность образца изменяется от насыщения в одном

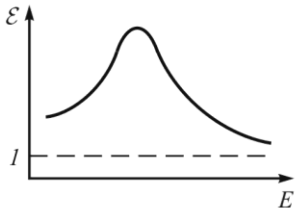


Рис. 204

направлении до насыщения в другом направлении, петля гистерезиса называется *максимальной*.

Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектриков зависит от напряженности электрического поля. В слабых полях с увеличением $\vec{E}$ она резко возрастает, достигая максимума. В сильных же полях диэлектрическая проницаемость убывает и в пределе стремится к единице (рис. 204).

Сегнетоэлектрические материалы (монокристаллы, керамика, пленки) широко используются в качестве материалов для изготовления конденсаторов, поскольку величина ε у них достигает больших значений. Сильная зависимость диэлектрической проницаемости сегнетоэлектриков от напряженности электрического поля позволяет использовать их в нелинейных конденсаторах (варикондах).

## 10.14. Энергии системы точечных зарядов, уединенного проводника, системы заряженных проводников, заряженного конденсатора, электрического поля

**Энергия системы точечных зарядов.** Для образования любой системы заряженных тел необходимо совершить работу, так как заряды взаимодействуют между собой по закону Кулона. Эта работа должна быть совершена какими-либо внешними силами и согласно закону сохранения энергии должна равняться изменению энергии системы. Если же определить работу по переносу зарядов из бесконечности в заданные точки пространства, то она и будет составлять энергию образованной системы. Для примера определим работу, которую необходимо совершить, чтобы создать систему из трех точечных зарядов $q_1$, $q_2$, $q_3$, которые необходимо расположить в точках *1*, *2*, *3* (рис. 205).

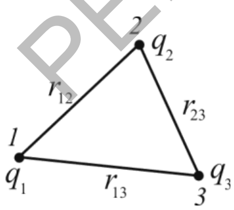


Рис. 205

Расстояние между точками обозначим следующим образом: $r_{12}$ – расстояние между зарядами $q_1$ и $q_2$; $r_{13}$ – расстояние между зарядами $q_1$ и $q_3$; $r_{23}$ – расстояние между зарядами $q_2$ и $q_3$. Очевидно, что $r_{12} = r_{21}$, $r_{13} = r_{31}$, $r_{23} = r_{32}$, или в общем виде $r_{ik} = r_{ki}$, где индексы *i* и *k* принимают значения 1, 2, 3.

Работа по переносу зарядов не зависит от очередности перемещения зарядов. Переместим заряд $q_1$ из бесконечности в точку *1*. Работа по этому переносу равняется нулю, так как на данный момент электрическое поле в выбранной точке пространства отсутствует:

$$A_1 = 0.$$

Работа по перемещению заряда $q_2$ равна произведению величины заряда на разность потенциалов поля в точке *2* и на бесконечности. Потенциал на бесконечности равен нулю, а в точке *2* он целиком определяется зарядом $q_1$.

$$A_2 = q_2 (\varphi_2 - \varphi_\infty) = q_2 \varphi_2 = k \frac{q_1 q_2}{r_{12}}.$$

Для перемещения заряда $q_3$ в точку *3* необходимо выполнить работу против сил поля, созданного уже двумя зарядами $q_1$ и $q_2$:

$$A_3 = q_3 (\varphi_3 - \varphi_\infty) = q_3 \varphi_3 = q_3 \left( k \frac{q_1}{r_{13}} + k \frac{q_2}{r_{23}} \right) = k \left( \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}}) \right),$$

где $k \frac{q_1}{r_{13}}$ – потенциал, создаваемый в точке *3* зарядом $q_1$; $k \frac{q_2}{r_{23}}$ – потенциал, создаваемый в точке *3* зарядом $q_2$.

Сумма этих работ и есть энергия системы, состоящей из трех точечных зарядов:

$$W = A_1 + A_2 + A_3 = k \left( \frac{q_1 q_2}{r_{12}} + \frac{q_1 q_3}{r_{13}} + \frac{q_2 q_3}{r_{23}} \right). \qquad (10.84)$$

Для вывода уравнения энергии формулу (10.84) представим в симметричном виде:

$$W=\frac{1}{2}k\left(\frac{q_1q_2}{r_{12}}+\frac{q_2q_1}{r_{21}}+\frac{q_1q_3}{r_{13}}+\frac{q_3q_1}{r_{31}}+\frac{q_2q_3}{r_{23}}+\frac{q_3q_2}{r_{32}}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}k\left[q_1\left(\frac{q_2}{r_{12}}+\frac{q_3}{r_{13}}\right)+q_2\left(\frac{q_1}{r_{21}}+\frac{q_3}{r_{23}}\right)+q_3\left(\frac{q_1}{r_{31}}+\frac{q_2}{r_{32}}\right)\right]= \qquad (10.85)$$

$$=\frac{1}{2}\ q_1\varphi_1+q_2\varphi_2+q_3\varphi_3 \ .$$

Для системы из *n* точечных зарядов формула (10.85) имеет вид:

$$W=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}q_i\varphi_i\ , \qquad (10.86)$$

где $\varphi_i$ – потенциал электрического поля, создаваемый в данной точке всеми зарядами, кроме заряда $q_i$, который находится в данной точке. Например, в приведенной задаче $\varphi_1$ – потенциал, созданный в точке *1* зарядами $q_2$ и $q_3$.

Энергия системы зарядов носит характер потенциальной энергии. Устойчивому состоянию любой системы соответствует минимум потенциальной энергии. Энергия любой пары зарядов $q_i$ и $q_k$ выражается членом вида $\frac{1}{2}\frac{q_iq_k}{r_{ik}}$. Для одноименных зарядов это выражение положительно и значение энергии непрерывно убывает по мере возрастания расстояния между зарядами $r_{ik}$. Это соответствует факту, что два одноименных заряда отталкиваются друг от друга, пока не отдалятся на бесконечно большое расстояние. Для разноименных зарядов это выражение отрицательно и непрерывно убывает по мере их сближения. Два разноименных заряда притягиваются друг к другу, пока частично или полностью не нейтрализуют друг друга. Этот вывод распространяется и на любое количество зарядов. Следовательно, не может быть устойчивой статичной конфигурации электрических зарядов.

**Энергия уединенного проводника.** Заряд проводника $Q$, который согласно теореме Гаусса сосредоточен на его поверхности, можно рассматривать как систему точечных зарядов $q_i$. Поэтому для вычисления энергии уединенного проводника используем формулу (10.86). При этом учтем, что поверхность проводника является эквипотенциальной и, следовательно, потенциал во всех точках, где находятся точечные заряды $q_i$, равен $\varphi$.

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i\varphi = \frac{1}{2}\varphi\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1}{2}Q\varphi. \qquad (10.87)$$

Учитывая, что $Q = C\varphi$, энергию можно представить:

$$W = \frac{1}{2}Q\varphi = \frac{1}{2}C\varphi^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}. \qquad (10.88)$$

**Энергия системы заряженных проводников.** Потенциал проводника, находящегося в электрическом поле, созданном другими заряженным проводниками (являющихся источником поля), зависит как от величины собственного заряда, так и от зарядов источников. Однако во всех случаях его поверхность является эквипотенциальной. Поэтому для любой системы, состоящей из $n$ заряженных проводников с потенциалами $\varphi_1$, $\varphi_2$, …, $\varphi_n$ и зарядами $Q_1$, $Q_2$, …, $Q_n$ (рис. 206), энергия рассчитывается с применением формулы (10.87):

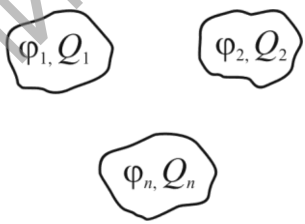

Рис. 206

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Q_i\varphi_i. \qquad (10.89)$$

Формулы для расчета энергии системы точечных зарядов (10.86) и для расчета энергии системы заряженных проводников (10.89) подобны, однако следует иметь в виду:

- в формуле (10.86) $\varphi_i$ – потенциалы полей, созданных всеми зарядами, кроме $q_i$;

- в формуле (10.89) $\varphi_i$ – потенциалы полей, созданных зарядами всех проводников, включая и $Q_i$.

Соответственно, (10.86) выражает энергию взаимодействия точечных зарядов, а (10.89) – полную энергию системы.

**Энергия заряженного конденсатора.** Конденсатор, по определению, представляет собой систему, состоящую из двух проводников с одинаковыми по величине и противоположными по знаку зарядами $+Q$ и $-Q$ и потенциалами $\varphi_1$ и $\varphi_2$. Согласно выражению (10.89) энергия заряженного конденсатора равна:

$$W = \frac{Q\varphi_1}{2} - \frac{Q\varphi_2}{2} = Q\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \frac{QU}{2},$$

где $U$ – разность потенциалов между его обкладками. Учитывая, что $Q = CU$,

$$W = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \quad (10.90)$$

**Энергия электрического поля.** Заряженные проводники и заряженные конденсаторы обладают энергией в соответствии с формулами (10.88) и (10.90). Ответим на вопрос о локализации этой энергии. Энергия плоского конденсатора, возможно, сосредоточена на его обкладках, т. е. на электрических зарядах. В принципе, это соответствует формулам (10.86), (10.88), (10.90). С другой стороны, поле внутри проводника отсутствует, однако существует за его пределами. Есть основание думать, что энергия сосредоточена в электрических полях, которые создают заряженные тела. Для конденсатора это пространство между обкладками конденсатора.

На самом деле только опыт может дать ответ на поставленный вопрос. В рамках электростатики получить его не представляется возможным, поскольку в электростатическом поле нельзя отделить заряд от поля: электрический заряд порождает электростатическое поле. Наличие поля указывает на наличие электрического заряда (или зарядов), который является источником поля. Получить такие опытные данные возможно только при рассмотрении электрических полей, изменяющихся во времени. Эти поля представляются электромагнитными волнами, которые представляют собой электрические и магнитные поля, изменяющиеся во времени и распространяющиеся в пространстве с определенной скоростью. Электромагнитные поля существуют самостоятельно. Заряды, которые их создали, могут нейтрализоваться (т. е. прекратить свое существование), а волны будут распространяться в пространстве и переносить энергию. В этом мы ежедневно убеждаемся, когда включаем радиоприемник, телевизор, пользуемся мобильным телефоном и т. д. Поскольку электростатическое поле – частный случай электромагнитного поля, то можно утверждать: энергия сконцентрирована в электростатическом поле, а не в зарядах.

Выражение для расчета этой энергии получим, исследуя однородное электростатическое поле плоского конденсатора. Его электроемкость определяется формулой

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$

Подставив это выражение в (10.90), получим:

$$W = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S U^2}{2d}.$$

Модуль вектора напряженности электрического поля конденсатора и разность потенциалов между его обкладками связаны известным выражением

$$E = \frac{U}{d}.$$

Тогда энергия поля конденсатора

$$W = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 S d E^2, \qquad (10.91)$$

где $Sd = V$ – объем пространства, в котором сосредоточено поле.

Определим *плотность энергии электрического поля* как физическую величину, численно равную энергии электрического поля, сосредоточенного в единице объема пространства:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2. \qquad (10.92)$$

Учитывая связь вектора электрического смещения и вектора напряженности электрического поля $D = \varepsilon\varepsilon_0 E$, для плотности энергии получим:

$$\omega = \frac{W}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{ED}{2}. \qquad (10.93)$$

Формула (10.93) справедлива для расчета энергии однородных электрических полей. Для расчета энергии неоднородного поля объем, в котором оно сосредоточено, необходимо разбить его на элементарные объемы *dV*, в которых поле можно считать однородным, и, используя (10.93), выполнить интегрирование по всему объему:

$$W = \int_V \omega\, dV = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon\varepsilon_0 E^2\, dV = \frac{1}{2}\int_V DE\, dV = \frac{1}{2}\int_V \frac{D^2}{\varepsilon\varepsilon_0} dV. \qquad (10.94)$$

Если проанализировать выражение (10.92) и связанные с ним формулы (10.93) и (10.94), то можно заметить, что энергия электрического поля с одинаковой напряженностью в диэлектрике в $\varepsilon$ раз больше, чем в вакууме. Объясняется это тем, что часть энергии при создании поля расходуется на поляризацию диэлектрика. Из этих рассуждений можно определить ту ее часть, которая необходима для поляризации единицы объема диэлектрика:

$$\Delta\omega = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E^2 - \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E^2. \qquad (10.95)$$

# 11. Законы постоянного тока

## 11.1. Постоянный ток. Условия существования тока

На любую заряженную частицу в электрическом поле действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$ ($q$ – заряд частицы, $\vec{E}$ – напряженность поля). Если эта частица свободная, то под действием силы она придет в движение.

Заряженная частица, способная перемещаться под действием сил электрического поля, называется *носителем электрического заряда*.

В разных веществах носителями зарядов могут быть разные частицы. В металлах это электроны, в электролитах – ионы, в газах – ионы и электроны, в полупроводниках – электроны и дырки. Наконец носителями зарядов могут быть макрочастицы – заряженные пылинки и капли.

Направленное движение зарядов в вакууме или в веществе называется *электрическим током проводимости* или просто *электрическим током*. Еще по предложению Б. Франклина (1706–1790) за направление электрического тока принято направление движения положительных зарядов. Это не совсем удобно, так как в самых распространенных проводниках – металлах – носителями зарядов являются электроны. Тем не менее, в свое время Франклин считал, что ток, текущий к пластине конденсатора, передает ей положительный заряд. Теперь известно, что пластина конденсатора приобретает положительный заряд, потому что ее покидают электроны проводимости. Следовательно, электроны проводимости всегда движутся в направлении, противоположном направлению тока. Количественной характеристикой электрического тока является физическая величина, называемая *силой тока*. По своему физическому смыслу сила тока – скалярная характеристика, равная отношению величины заряда $dq$, переносимого через сечение проводника за интервал времени $dt$, к этому интервалу:

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (11.1)$$

Ток, не изменяющийся со временем, называется *постоянным*. Для постоянного тока

$$I = \frac{q}{t}. \qquad (11.2)$$

В СИ единица измерения силы тока 1 ампер (1 А), и она является основной. При силе тока в проводнике 1 А через его поперечное сечение за 1 с переносится заряд 1 Кл. Единица названа в честь французского физика А.М. Ампера (1775–1836). Электрический ток – это направленное движение как положительных, так и отрицательных зарядов. Если ток в проводнике создается носителями зарядов обоих знаков, при этом за время $dt$

в одном направлении переносится положительный заряд $dq^+$, а в другом направлении переносится отрицательный заряд $dq^-$, то сила тока определяется как

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{\left|dq^-\right|}{dt}. \tag{11.3}$$

Сила тока – величина скалярная. Очевидно, что такая характеристика неполная, она не учитывает направление движения заряженных частиц. Кроме этого, электрический ток может быть распределен неравномерно по поверхности, через которую течет, поэтому вводится *вектор плотности электрического тока*. Направление его совпадает с направлением тока, т. е. с направлением движения положительных зарядов, а численно он равен силе тока $di$ через расположенную в данной точке перпендикулярно к направлению движения носителей площадку $dS_\perp$, отнесенную к величине этой площадки:

$$j = \frac{di}{dS}. \tag{11.4}$$

Если элементарная площадка $dS$, через которую движутся носители зарядов, расположена так, что нормаль к ней $\vec{n}$ составляет с вектором плотности угол $\alpha$ (рис. 207), то

$$dS_\perp = dS\cos\alpha .$$

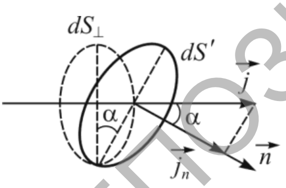


Рис. 207

Тогда

$$j = \frac{di}{dS\cos\alpha},$$

соответственно,

$$di = j\cos\alpha\, dS = j_n\, dS,$$

где $j_n$ – проекция вектора $\vec{j}$ на нормаль к площадке. В таком случае сила тока

$$I = \int_S j_n\, dS. \tag{11.5}$$

Интегрирование ведется по всей площади сечения проводника $S$.

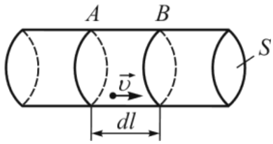

Рис. 208

Установим связь плотности тока с концентрацией зарядов в проводнике. Для этого рассмотрим участок между двумя сечениями *A* и *B* цилиндрического проводника (рис. 208). Его объем определяется формулой:

$$dV = S\,dl\ .$$

В нем содержится

$$n\,dV = nS\,dl$$

носителей зарядов, где $n$ – их концентрация. Если $\upsilon$ – модуль скорости направленного движения носителей зарядов, то за время

$$dt = \frac{dl}{\upsilon}$$

все носители зарядов из выделенного объема пройдут через сечение *B* и перенесут заряд

$$dQ = nq\,dV\ ,$$

где $q$ – заряд одной частицы. Тогда сила тока в проводнике согласно определению:

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{nqS\,dl\,\upsilon}{dl} = nqS\upsilon\,.$$

Учитывая, что $j = I/S$ , получим выражение для плотности тока:

$$j = qn\upsilon\,.$$

В векторной форме оно перепишется так:

$$\vec{j} = qn\vec{\upsilon}\,. \qquad (11.6)$$

Из приведенных выше рассуждений можно сформулировать условия возникновения электрического тока:

- наличие в проводнике свободных носителей зарядов;
- наличие в проводнике электрического поля с напряженностью $\vec{E}$ .

Последнее условие можно представить в несколько ином виде, если вспомнить связь напряженности электрического поля и разности потенциалов между двумя его точками:

$$\vec{E} = -grad\,\varphi\,,$$

или в скалярной форме

$$E_l = -\frac{d\varphi}{dl}.$$

Так как

$$d\varphi = -E_l\, dl,$$

то разность потенциалов между концами проводника можно выразить следующим образом:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -\int_1^2 d\varphi = \int_1^2 E_l\, dl = El.$$

Величину $\varphi_1 - \varphi_2 = U$ принято называть *электрическим напряжением* или *напряжением электрического тока*. Если $U = \text{const}$, то в проводнике протекает постоянный ток. Теперь второе условие можно сформулировать и таким образом:

- наличие на концах проводника разности потенциалов, или напряжения.

## 11.2. Закон Ома для участка цепи, содержащего только проводник. Закон Ома в дифференциальной форме

**Закон Ома для участка цепи, содержащего только проводник.** Немецкий физик Г.С. Ом (1787–1854) в 1827 г. экспериментально установил закон, согласно которому ток в металлах пропорционален приложенному к концам проводника напряжению при постоянной температуре:

$$I = kU, \tag{11.7}$$

где коэффициент пропорциональности $k$ называется *электрической проводимостью проводника*. Он зависит от размеров проводника, материала, из которого проводник изготовлен, температуры. Единицей измерения электропроводности в системе СИ является *сименс (См)*. Согласно (11.7)

$$1\text{См} = \frac{1\text{А}}{1\text{В}}.$$

Однако в настоящее время закон Ома применяется в ином виде:

$$I = \frac{U}{R}, \qquad (11.8)$$

где $R = \frac{1}{k}$ – сопротивление проводника (величина, обратная электропроводности). В СИ электрическое сопротивление измеряется в *омах (Ом)*:

$$1\text{Ом} = \frac{1\text{В}}{1\text{А}}.$$

1 Ом равен сопротивлению проводника, между концами которого возникает напряжение 1 В при силе постоянного тока 1 А.

Г.С. Ом установил и зависимость электрического сопротивления однородного проводника, у которого постоянна площадь поперечного сечения, от природы вещества проводника и его размеров:

$$R = \rho\frac{l}{S}, \qquad (11.9)$$

где $l$ – длина проводника, $S$ – площадь его поперечного сечения, $\rho$ – удельное сопротивление проводника, $\rho = 1\text{Ом}\cdot\text{м}$.

1 Ом·м равен удельному электрическому сопротивлению проводника площадью поперечного сечения 1 м$^2$ и длиной 1 м, имеющего сопротивление 1 Ом.

Физическая величина $\sigma = \frac{1}{\rho}$ называется *удельной электрической проводимостью вещества*. В СИ

$$\sigma = \frac{1\text{См}}{1\text{м}} = 1\text{Ом}^{-1}\cdot 1\text{м}^{-1}.$$

Удельные сопротивления экспериментально определены практически для всех используемых на практике проводников. Найти эти значения для пользования можно в физических справочниках.

**Закон Ома в дифференциальной форме.** В проводниках с изменяющимся сечением пользоваться законом Ома в форме (11.8) не корректно. Для того чтобы получить формулу, пригодную для таких расчетов, рассмотрим участок $\Delta l$ проводника между двумя сечениями $S_1$ и $S_2$, потенциалы которых $\varphi_1$ и $\varphi_2$ соответственно (рис. 209).

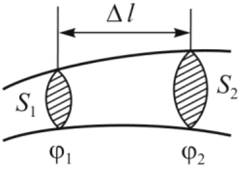


Рис. 209

При достаточно малом отрезке $\Delta l$ среднее сечение участка проводника можно выразить:

$$S \approx \frac{S_1 + S_2}{2}.$$

В таком случае сопротивление этого участка

$$\Delta R = \rho\frac{\Delta l}{S},$$

а сила тока

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta R} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\rho\,\Delta l} S = -\frac{S}{\rho}\frac{\Delta\varphi}{\Delta l} = \frac{S}{\rho}E.$$

Учитывая, что $\frac{1}{\rho} = \sigma$ и $j = \frac{I}{S}$, получим:

$$j = \sigma E,$$

или в векторной форме

$$\vec{j} = \sigma\vec{E}. \qquad (11.10)$$

Выражение (11.10) называют *законом Ома в дифференциальной форме*. Закон позволяет рассчитать силу тока в любой точке проводника, если известно распределение электрического поля в проводнике.

## 11.3. Электродвижущая сила источников тока. Закон Ома для неоднородного участка цепи. Напряжение на зажимах источника ЭДС

**Электродвижущая сила источников тока.** Из закона Ома (11.8) следует, что для поддержания тока в проводнике необходимо существование на его концах постоянной разности потенциалов.

Рассмотрим замкнутую электрическую цепь (рис. 210). Пусть вдоль замкнутой электрической цепи движется положительный заряд. Сопротивление в подводящих проводах в идеальном случае отсутствует. Это значит, что направленное движение зарядов на участках $a \to b$ и $c \to d$ происходит по инерции, без воздействия на заряд силы.

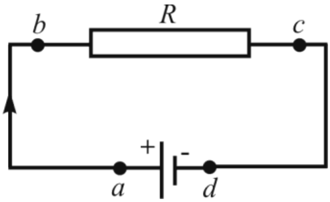


Рис. 210

Потенциалы точек $\varphi_a = \varphi_b$, $\varphi_c = \varphi_d$. На участке $b \to c$ разность потенциалов согласно закону Ома $\varphi_b - \varphi_c = IR$. Движение на нашей схеме положительного заряда слева направо свидетельствует о том, что потенциал точки $b$ выше, чем потенциал точки $c$. Напряженность электрического поля внутри проводника отлична от нуля, следовательно, на заряд со стороны электрического поля действует сила. Кроме того, заряды взаимодействуют в металлах с ионами кристаллической решетки, что обусловливает силу сопротивления движению заряда. На участке $d \to a$ потенциал $\varphi_a$ больше потенциала $\varphi_d$. Чтобы в цепи продолжалось направленное движение зарядов необходимо каким-то образом перемещать заряд из точки $d$ в точку $a$. Этот процесс не может происходить под действием электростатических сил. Силы, способные перемещать положительный заряд из точки с меньшим потенциалом в точку с большим потенциалом, получили название *сторонних сил*. Эти силы могут иметь химическую, электромагнитную, механическую или иную природу, кроме электростатической.

Работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда по всей цепи называется *электродвижущей силой источника тока (ЭДС)*. Для ее обозначения будем использовать символ $\mathcal{E}$.

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q}. \qquad (11.11)$$

Сравнение формулы (11.11) с выражением для работы сил электростатического поля $A = q\ \varphi_1 - \varphi_2$ показывает, что размерность

ЭДС должна быть такой же, как и размерность разности потенциалов:

$$\mathcal{E} = 1\text{В}.$$

Работа сторонних сил не равняется нулю только внутри источника тока. Определим напряженность поля сторонних сил в соответствии с напряженностью электростатического поля:

$$\vec{E}_{\text{ст}} = \frac{\vec{F}_{\text{ст}}}{q}. \quad (11.12)$$

Работа сторонних сил по перемещению положительного заряда $q$ по замкнутому контуру согласно определению:

$$A_{\text{ст}} = \oint F_{\text{ст}}\, dl = q\oint E_{\text{ст}}\, dl.$$

Тогда ЭДС есть:

$$\mathcal{E} = \frac{A_{\text{ст}}}{q} = \oint E_{\text{ст}}\, dl. \quad (11.13)$$

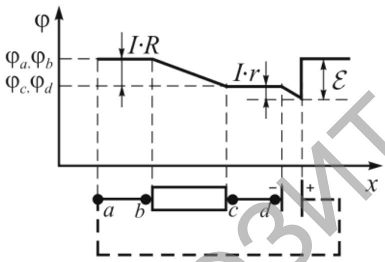


Рис. 211

Из последнего выражения следует, что циркуляция вектора напряженности сторонних сил по замкнутому контуру равна ЭДС. Причем при расчетах интегрировать можно не вдоль всего контура, а только по тем участкам, которые содержат ЭДС.

Наряду со скачком потенциала в направлении $d \to a$ внутри источника тока, сопротивление которого определим как $r$, наблюдается его падение, определяемое законом Ома и равное $Ir$. Соответственно, на участке $b \to c$ присутствует падение потенциала $IR$. На рис. 211 схематично показано распределение потенциала вдоль рассмотренной нами цепи.

**Закон Ома для неоднородного участка цепи.** *Неоднородным* называют участок цепи, содержащий ЭДС. На таком участке на заряды действуют силы

$$\vec{F}_{\text{к}} = q\vec{E}_{\text{к}} \text{ и } \vec{F}_{\text{ст}} = q\vec{E}_{\text{ст}},$$

где $\vec{F}_{к}$ есть сила, действующая на заряды со стороны электростатического поля, а $\vec{E}_{к}$ – его напряженность; а $\vec{F}_{ст}$ и $\vec{E}_{ст}$ – сторонние силы и напряженность поля сторонних сил соответственно. Рассматриваемые участки цепи представлены на рис. 212.

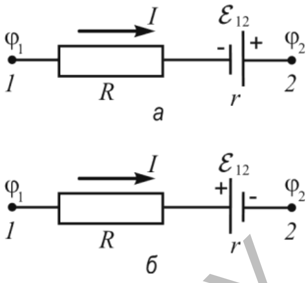


Рис. 212

Отличаются эти участки тем, что на одном из них источник ЭДС включен так, что скачок потенциала на источнике повышает потенциал участка (рис. 212, *а*), а на другом – понижает (рис. 212, *б*). В случае *а* ток выходит из положительного полюса источника, а в *б* – из отрицательного.

Тогда в общем случае согласно закону Ома в дифференциальной форме плотность тока в любой точке участка можно выразить:

$$\vec{j} = \sigma\left(\vec{E}_{эл} + \vec{E}_{ст}\right). \tag{11.14}$$

От закона Ома в дифференциальной форме перейдем к закону Ома в интегральной форме. Для этого умножим левую и правую части (11.14) на элемент длины участка $dl$:

$$\vec{j}\,dl = \sigma\left(\vec{E}_{эл} + \vec{E}_{ст}\right)dl.$$

Сделаем замену $\sigma = 1/\rho$ и получим:

$$\vec{j}\rho\,dl = \left(\vec{E}_{эл} + \vec{E}_{ст}\right)dl;$$

перепишем эти уравнения в скалярной форме:

$$\rho j_l\,dl = \left(E_{эл}\right)_l dl + \left(E_{ст}\right)_l dl. \tag{11.15}$$

В последнем выражении выполним интегрирование по всей длине участка от точки *1* до точки *2*. При этом помним, что $\varphi_1$ – потенциал точки, от которой течет ток, а $\varphi_2$ – потенциал точки, к которой течет ток. Так как $j = I/S$ и сила тока имеет одно и то же значение в любом сечении проводника на участке *1–2*, получим:

$$I\int_1^2 \frac{\rho}{S}\,dl = \int_1^2 E_{\text{эл}\ l}\,dl + \int_1^2 E_{\text{ст}\ l}\,dl\,, \qquad (11.16)$$

где $\int_1^2 E_{\text{эл}\ l}\,dl$ – работа сил электростатического поля по перемещению единичного положительного заряда из точки *1* в точку *2*; по определению – разность потенциалов между точками *1* и *2*:

$$\int_1^2 E_{\text{эл}\ l}\,dl = \varphi_1 - \varphi_2\,.$$

С другой стороны, $\int_1^2 E_{\text{ст}\ l}\,dl = \mathcal{E}_{12}$ – работа сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда из точки *1* в точку *2*, или электродвижущая сила.

$\int_1^2 \frac{\rho}{S}\,dl = R_{12}$ – сопротивление участка цепи между точками *1* и *2*.

Сделав необходимые подстановки в (11.16), получим закон Ома для неоднородного участка цепи в интегральной форме:

$$IR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}\,, \text{ или } I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 \pm \mathcal{E}_{12}}{R_{12}}\,. \qquad (11.17)$$

ЭДС в формуле (11.17) берется со знаком «плюс», если источник включен в соответствии с рис. 212, *а*, т. е. повышает потенциал участка по выбранному направлению тока, и со знаком «минус», если источник включен аналогично рис. 212, *б* – понижает потенциал.

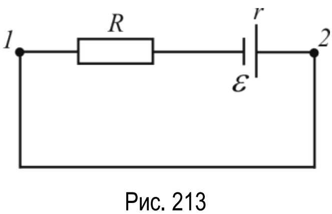

Рис. 213

Если соединить между собой проводником точки *1* и *2* (рис. 213), то получим замкнутую цепь. В таком случае $\varphi_1 = \varphi_2$, и формула (11.17) примет вид:

$$I = \frac{\mathcal{E}_{12}}{R_{12}}.$$

Так как

$$R_{12} = R + r,$$

где $R$ – внешнее сопротивление цепи, а $r$ – внутренне сопротивление (или сопротивление источника ЭДС), общий вид выражения для силы тока будет следующий:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \qquad (11.18)$$

Последнее выражение есть *закон Ома для замкнутой цепи*.

**Напряжение на зажимах источника** ЭДС. Рассмотрим схему, представленную на рис. 214.

Напряжение на зажимах источника такое же, как на внешнем сопротивлении $R$, и равно:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = IR.$$

Но согласно (11.18)

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

тогда напряжение на участке *1–2* определяется следующим выражением:

$$U_{12} = \frac{\mathcal{E}}{R + r} R = \mathcal{E} \frac{R + r - r}{R + r} = \mathcal{E}\left(1 - \frac{r}{R + r}\right).$$

Из последнего равенства следует, что напряжение на зажимах источника зависит от внешнего сопротивления цепи. При этом чем большая разница между величиной внешнего сопротивления и сопротивлением источника, тем ближе напряжение на зажимах источника к значению ЭДС. Если же внешнее сопротивление бесконечно велико (клеммы источника

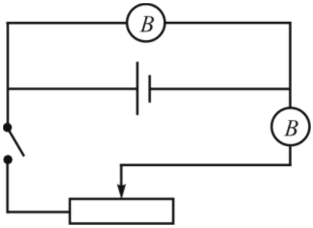

Рис. 214

разомкнуты), то напряжение на зажимах равно ЭДС. Следовательно, измерить ЭДС источника можно непосредственно вольтметром с достаточно большим сопротивлением.

## 11.4. Работа и мощность постоянного тока. Разветвленные электрические цепи. Закон Джоуля – Ленца

При прохождении электрического тока в цепи за время $dt$ через его сечение переносится заряд $dq = I\,dt$ ($I$ – сила тока в цепи). Силы электростатического поля и сторонние силы, если они есть на выбранном участке, совершают работу

$$dA = U\,dq = UI\,dt\ ,$$

где $U$ – разность потенциалов на этом участке цепи. За конечный промежуток времени $t$ совершается работа $A$:

$$A = \int_0^t U\,dq = UI\int_0^t dt = UIt\ .$$

Величина, определенная полученной формулой, называется *работой постоянного тока*. Как и любая работа, она измеряется в джоулях: $[A] = 1\text{Дж} = 1\text{В}\cdot\text{А}\cdot\text{с}$.

Разделив работу на время, за которое она совершается, получим выражение для мощности, развиваемую током на рассматриваемом участке цепи:

$$P = \frac{A}{t} = UI\ , \qquad (11.19)$$

$$[P] = 1\text{Вт} = 1\text{В}\cdot\text{А}\ .$$

Эта мощность расходуется на совершение механической работы на рассматриваемом участке цепи над внешними телами (если участок перемещается в пространстве, например, работа электродвигателя), на протекание химических реакций, на нагревание самого участка цепи.

В проводниках первого рода, к которым относятся в первую очередь все металлы, если они неподвижны, механическая работа не выполняется и химические процессы не происходят. Следовательно, вся работа электрического тока расходуется на выделение теплоты в проводнике, т. е. на его нагревание. В рамках классической физики объяснить это можно строением металла кристаллической решеткой, состоящей из положительных ионов. Свободные электроны, которые движутся в электрическом поле, сталкиваются с узлами решетки и отдают им свою энергию, нагревая проводник. Выделяющаяся в проводнике теплота определяется полученным выше выражением для работы за промежуток времени $t$:

$$A = UIt = Q . \qquad (11.20)$$

Равенство (11.20), используя закон Ома, можно представить в виде:

$$Q = UIt = IR^2 t = \frac{U^2}{R} t . \qquad (11.21)$$

Выражение (11.21) называют *законом Джоуля – Ленца в интегральной форме*, который был установлен в 1841 г. независимо английским ученым Дж. Джоулем (1818–1889) и русским ученым Э.Х. Ленцем (1804–1865).

Введем понятие *удельной тепловой мощности*, которое можно определить как количество теплоты, выделившееся в единице объема проводника за единицу времени:

$$\omega = \frac{\Delta Q}{\Delta V \, \Delta t} .$$

Учитывая выражения (11.20), (11.8) и так как объем проводника есть $\Delta V = S \, \Delta l$, получим:

$$\omega = \frac{I^2 \rho \, \Delta l \, \Delta t}{S S \, \Delta l \, \Delta t} = \frac{I^2}{S^2} \rho = j^2 \rho , \qquad (11.22)$$

где $j = I/S$ – плотность тока, $\rho$ – удельное сопротивление проводника. Используя закон Ома в дифференциальной форме $j = \sigma E$ и связь удельной проводимости с удельным сопротивлением проводника $\rho = 1/\sigma$, получим математическое выражение для *закона Джоуля – Ленца в дифференциальной форме*:

$$\omega = \sigma^2 E^2 \frac{1}{\sigma} = \sigma E^2 . \qquad (11.23)$$

## 11.5. Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа. Примеры применения правил Кирхгофа. Шунт. Мостик Уитстона

**Разветвленные цепи. Правила Кирхгофа.** На практике часто приходится рассчитывать разветвленные электрические цепи. Они могут содержать, в принципе, произвольное количество замкнутых контуров. Вычисления всегда можно выполнить с помощью закона Ома. Однако их можно значительно упростить, если использовать правила, сформулированные немецким физиком Кирхгофом (1824–1887). Этих правил два.

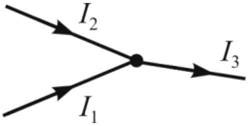

Рис. 215

***Первое правило Кирхгофа.*** Определим понятие «узел» как точка, в которой соединяются три и более проводников (рис. 215).

Само правило является следствием закона сохранения заряда и условия, которое накладывается на узел (узел не может накапливать заряды): *алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю*:

$$\sum_{i=1}^{n} I_i = 0\,. \tag{11.24}$$

При расчетах цепей уравнений вида (11.24) записывается на одно меньше, чем насчитывается узлов в цепи. Если же число уравнений соответствует числу узлов, то одно из них является следствием всех остальных, что только затрудняет выполнение расчетов. Токи, входящие в узел, считаются положительными, а вытекающие – отрицательными.

***Второе правило Кирхгофа.*** *В любом замкнутом контуре разветвленной электрической цепи алгебраическая сумма ЭДС, действующих в этом контуре, равна сумме произведений токов в каждой его ветви на их сопротивления:*

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_i = \sum_{i=1}^{n} I_i R_i\,, \tag{11.25}$$

где $n$ – число участков, на которые контур разбивается узлами.

Рассмотрим замкнутый контур, состоящий из четырех участков (рис. 216).

Здесь $R_{12} = R_1$, $R_{23} = R_2$, $R_{34} = R_3$, $R_{41} = R_4$ – полные сопротивления участков *1–2, 2–3, 3–4, 4–1*, которые включают в себя и внутренние сопротивления включенных в схему источников ЭДС. Согласно закону Ома (10.17) (11.8) для каждого из участков можно записать:

$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathcal{E}_1;$$
$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \mathcal{E}_2;$$
$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_4 + \mathcal{E}_3;$$
$$I_4 R_4 = \varphi_4 - \varphi_1.$$

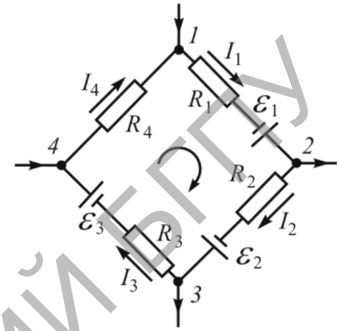

Рис. 216

Сложив между собой соответственно правые и левые части приведенных выше уравнений, получим конечную формулу в следующем виде:

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 + I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3.$$

Полученное выражение соответствует формуле (11.25) для замкнутого контура, состоящего из четырех ветвей. Очевидно, что данное утверждение справедливо и для любого количества ветвей замкнутой цепи. Уравнение согласно (11.25) можно составить для всех мысленно выделенных замкнутых контуров в разветвленной цепи. Однако независимыми будут только те из них, контуры для которых нельзя получить «наложением» друг на друга.

***Схема применения правил Кирхгофа:***

1. На всех участках цепи стрелками показываем направление тока, которое выбираем произвольно. Если после проведения расчетов значение силы тока окажется отрицательным, то это означает, что на этом участке цепи ток течет в сторону, противоположную выбранной на схеме.

2. Записываем уравнения (11.24) для всех узлов за исключением одного, имеющихся в рассматриваемой цепи. Токи, которые входят в узел, считаем положительными, выходящие из узла – отрицательными.

3. Произвольно выбираем направление обхода контуров. Условимся за направление обхода выбрать движение часовой стрелки.

4. Для всех независимых контуров записываем уравнение вида (11.25). На участках цепи, где направление обхода совпадает с направлением тока, произведение $IR$ считаем положительным, где не совпадает – отрицательным. Значения ЭДС, источники которой повышают потенциал в направлении обхода, считаем положительными; если же потенциал понижается, то ЭДС для них входят в уравнение со знаком «минус».

5. Решаем систему уравнений, составленную согласно пунктам 2 и 4.

**Примеры применения правил Кирхгофа в случае параллельного соединения проводников.** В цепь на рис. 217 включены два сопротивления ($r_1$, $r_2$), соединенные параллельно. Согласно приведенной выше методике расчетов применяем правила Кирхгофа:

1. Укажем направление токов на всех участках ($I$, $I_1$, $I_2$).

2. В цепи имеется два узла ($a$, $b$). Согласно (11.24) достаточно составить одно уравнение, например, для узла $a$:

$$I - I_1 - I_2 = 0 .$$

3. Направление обхода всех контуров выбираем согласно движению часовой стрелки.

4. Для двух независимых контуров $ar_2br_1a$ и $ar_1b\mathcal{E}a$ согласно (11.25) записываем уравнения:

$$I_2r_2 - I_1r_1 = 0 ,$$

$$I_1r_1 + Ir = \mathcal{E} .$$

5. Решаем систему уравнений:

$$\begin{cases} I - I_1 - I_2 = 0, \\ I_1r_1 + Ir = \mathcal{E}, \\ I_2r_2 - I_1r_1 = 0. \end{cases}$$

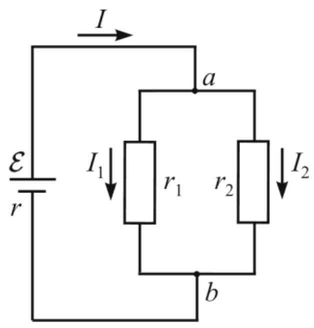

Рис. 217

Из первого уравнения выразим $I_1$ и подставим в третье:

$$-Ir_1 + I_2r_1 + I_2r_2 = 0 ,$$

или

$$I_2 \;\; r_1 + r_2 \;\; = Ir_1 .$$

Из последнего уравнения следует:

$$\frac{I_2}{I} = \frac{r_1}{r_1 + r_2} . \tag{11.26}$$

Выполнив аналогичные преобразования для $I_1$, получим в результате:

$$\frac{I_1}{I} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} . \tag{11.27}$$

Из двух последних равенств следует:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2}{r_1} .$$

*Отношение сил токов в двух проводниках, соединенных параллельно, обратно отношению их сопротивлений.*

Из (11.26) выразим $I_1$ и подставим во второе уравнение системы:

$$I\left( r + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} \right) = \mathcal{E} .$$

Если сравнить последнее выражение с законом Ома для замкнутой цепи (11.18), то общее сопротивление внешнего участка цепи, т. е. общее сопротивление двух соединенных параллельно проводников, равно:

$$R = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} .$$

Из последнего уравнения не составляет труда получить:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} . \tag{11.28}$$

Общее сопротивление $n$ проводников, соединенных параллельно, рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{r_i} . \tag{11.29}$$

**Шунт.** Сопротивление, включаемое в электрическую цепь параллельно амперметру с целью увеличения максимально измеряемой данным прибором силы тока, называют *шунтом*. А само включение этого сопротивления называют *шунтированием прибора*. Схема включения шунта показана на рис. 218.

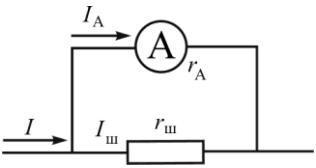


Рис. 218

Согласно (11.27) сила тока в цепи

$$I = I_A \frac{r_ш + r_A}{r_ш},$$

где $r_A$ – сопротивление амперметра, $r_ш$ – сопротивление шунта.

Если измеряемая сила тока в $n$ раз превышает максимальную величину силы тока, измеряемую данным амперметром, т. е. $I = nI_A$, то

$$nI_A = I_A \frac{r_ш + r_A}{r_ш},$$

или

$$r_ш = \frac{r_A}{n-1}. \qquad (11.30)$$

Формулой (11.30) пользуются при расчете шунтов для увеличения пределов измерения амперметров.

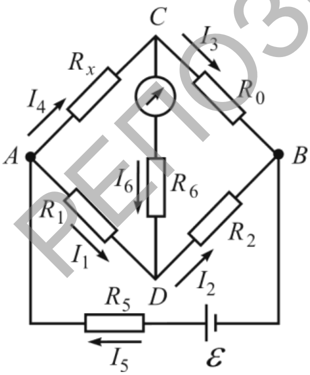


Рис. 219

**Мостик Уитстона.** Схема мостика представлена на рис. 219. Она используется для сравнения некоторого неизвестного сопротивления $R_x$ с известным сопротивлением $R_0$. В мостике имеются четыре точки разветвления (*A*, *B*, *C*, *D*), между которыми включены четыре сопротивления $R_1$, $R_2$, $R_x$, $R_0$, называемые *плечами мостика*. В одну из его диагоналей (*AB*) включен источник ЭДС и сопротивление $R_5$, а во вторую (*CD*) – гальванометр и сопротивление $R_6$.

Применим схему решения к мостику, причем в ходе решения выразим неизвестное сопротивление $R_x$:

1. Укажем направление токов на всех участках мостика.

2. В схеме имеется четыре узла ($A$, $B$, $C$, $D$). Согласно (11.24) достаточно составить три уравнение, скажем, для узлов $A$, $C$, $D$:

$$\begin{cases} I_5 - I_4 - I_1 = 0, \\ I_4 - I_3 - I_6 = 0, \\ I_1 + I_6 - I_2 = 0. \end{cases} \tag{11.31}$$

3. Направление обхода всех контуров выбираем по часовой стрелке.

4. Для трех независимых контуров $ACDA$, $CBDC$ и $ADB\mathcal{E}R_5A$ согласно (11.25) записываем уравнения:

$$\begin{cases} I_4R_x + I_6R_6 - I_1R_1 = 0, \\ I_3R_0 - I_2R_2 - I_6R_6 = 0, \\ I_1R_1 + I_2R_2 + I_5R_5 = \mathcal{E}. \end{cases} \tag{11.32}$$

5. Решая уравнения (11.31) совместно с уравнениями (11.32), можно определить все токи $I_1$, $I_2$, $I_3$, $I_4$, $I_5$, $I_6$. Однако на практике мостики изготавливаются таким образом, что за счет изменения сопротивлений $R_1$ и $R_2$ добиваются состояния, когда ток через гальванометр не проходит. Это означает, что потенциалы в узлах $C$ и $D$ равны между собой. В таком случае из (11.31) следует, что $I_1 = I_2$, $I_3 = I_4$, а из (11.32) получим, что $I_1R_1 = I_4R_x$, $I_2R_2 = I_3R_0$. Тогда, выполнив преобразования, получим:

$$\frac{R_x}{R_0} = \frac{R_1}{R_2} \text{ и } R_x = R_0\frac{R_1}{R_2}. \tag{11.33}$$

Последнее выражение и применяется для определения неизвестных сопротивлений. Промышленностью выпускаются разные приборы для измерения сопротивлений проводников, в основе которых лежит мостовая схема. Поскольку в расчетную формулу не входит значение ЭДС источника, то схемы могут запитываться от источников как переменного, так и постоянного токов.

# 12. Электрический ток в различных средах

## 12.1. Природа электрического тока в металлах. Объяснение закона Ома. Объяснение закона Джоуля – Ленца. Объяснение закона Видемана – Франца

В зависимости от электропроводности все вещества делятся на проводники, диэлектрики и полупроводники. У проводников удельная электрическая проводимость лежит в диапазоне $10^6$–$10^8$ См·м$^{-1}$, у диэлектриков она меньше $10^{-6}$ См·м$^{-1}$, а для полупроводников занимает промежуточное положение между приведенными величинами ($10^{-4}$–$10^4$ См·м$^{-1}$). Такое деление в значительной степени условно, так как электропроводность меняется в широких пределах при изменении состояния вещества. При температурах, близких к абсолютному нулю, полупроводники являются диэлектриками. С ростом температуры проводимость полупроводников растет. У металлов, наоборот, с ростом температуры проводимость падает.

**Природа электрического тока в металлах.** К проводникам относятся в первую очередь металлы. Для выяснения природы носителей тока в металлах еще в начале прошлого века были поставлены ряд опытов. Первым в этом ряду стоит опыт немецкого физика В.Э. Рикке (1845–1915), который он провел в 1901 г. Два медных и один алюминиевый цилиндры с тщательно отшлифованными торцами были поставлены «один на один». Через них на протяжении года протекал электрический ток. По замыслу автора, если бы электрический заряд переносился атомами, то изменилась бы масса цилиндров. Однако взвешивание показало, что масса цилиндров не изменилась, хотя за год через них протек заряд $3{,}5 \cdot 10^6$ Кл. Вывод из этого опыта: перенос заряда в металлах осуществляется какими-то частицами, входящими в состав всех металлов. Такой частицей мог быть уже открытый к тому времени электрон (1897 г., У. Томсон).

Доказательством того, что носителями электрических зарядов в металлах являются электроны, служит опыт, поставленный в 1916 г. американскими физиками Р.Ч. Толменом (1881–1948) и Стюартом. Идею опыта подсказал Х.А. Лоренц (1853–1928). Если в металле есть свободные заряды, обладающие массой, то они должны подчиняться закону инерции. При внезапной остановке быстродвижущегося проводника останавливаются все его атомы, а свободные заряды какое-то время продолжают двигаться. В результате в проводнике возникнет импульс тока, который можно зарегистрировать (рис. 220).

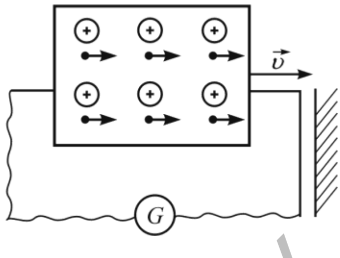


Рис. 220

Схема опыта Стюарта и Толмена представлена на рис. 221.

Катушка с большим количеством витков проволоки приводилась в быстрое вращение вокруг своей оси с линейной скоростью вращения 300 м/с. Концы проволочной обмотки были соединены с чувствительным гальванометром длинными гибкими проводами, скручивающимися во время вращения катушки. Магнитное поле Земли было скомпенсировано с помощью специальных неподвижных катушек. Длина проводов достигала 500 м. После резкого торможения катушки стрелка гальванометра отклонялась. По направлению отклонения стрелки было установлено, что носители тока в металлах – отрицательные заряды. Расчет отношения величины заряда к массе его носителя (удельный заряд) производился из следующих соображений:

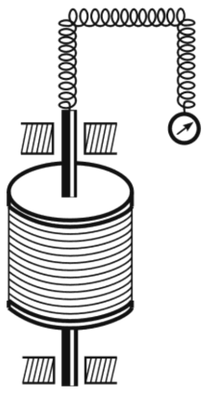

Рис. 221

- Пусть в процессе торможения за время $dt$ кинетическая энергия одного носителя заряда уменьшилась на величину $dw_к$. Поскольку

$$w_к = \frac{m\upsilon^2}{2},$$

где $m$ – масса носителя, $\upsilon$ – линейная скорость движения проводника, то

$$dw_к = m\upsilon d\upsilon.$$

- Уменьшение кинетической энергии всех носителей зарядов в проводнике есть

$$dW_к = Ndw_к = Nm\upsilon d\upsilon = nSlm\upsilon d\upsilon, \qquad (12.1)$$

где $N$ – число носителей зарядов в проводнике, $n$ – концентрация (число носителей зарядов в единице объема проводника) носителей зарядов в проводнике, $S$ – площадь поперечного сечения проводника, $l$ – длина проводника.

- За это же время в проводнике выделяется тепловая энергия, которая согласно закону Джоуля – Ленца равна:

$$dW_Q = i^2 R\,dt = iRi\,dt = iR\,dq = jSR\,dq = en\upsilon SR\,dq\,, \qquad (12.2)$$

где $i$ – мгновенное значение тока, $R$ – сопротивление проводника, $dq$ – зарегистрированный заряд, протекший в проводнике за время $dt$, $j = en\upsilon$ – плотность тока в проводнике согласно (10.6), $e$ – заряд носителя, $\upsilon$ – скорость направленного движения носителя заряда (в данном случае скорость движения проводника).

- Согласно закону сохранения энергии

$$-dW_к = dW_Q\,,$$

или

$$-nSlm\,d\upsilon = en\upsilon SR\,dq\,.$$

После несложных преобразований получим:

$$dq = -\frac{ml}{eR}\,d\upsilon\,.$$

Последнее выражение интегрируется с учетом того, что скорость вращения катушки изменялась от $\upsilon$ до $0$, а прошедший заряд – от $0$ до некоторого значения $q$. Количество прошедшего заряда $q$ определялось в опыте непосредственно. В итоге получим:

$$q = \frac{ml\upsilon}{eR}\,.$$

Тогда удельный заряд определится следующим выражением:

$$\frac{e}{m} = \frac{l\upsilon}{qR}\,. \qquad (12.3)$$

Все величины, входящие в правую часть (12.3), могут быть получены непосредственно из опыта. Так был определен удельный заряд электрона. Стюарт и Толмен провели свои исследования, используя в опытах проводники из меди, серебра и алюминия, и получили $\frac{e}{m}=1,6\cdot10^{11}$ Кл/кг для меди, $\frac{e}{m}=1,49\cdot10^{11}$ Кл/кг для серебра и $\frac{e}{m}=1,54\cdot10^{11}$ Кл/кг для алюминия.

Эксперименты, подобные опытам Стюарта и Толмена, в 1913 г. в Страсбурге проводили русские ученые Л.И. Мандельштам (1879–1944) и Н.Д. Папалекси (1880–1947). Однако закончить исследования они не успели из-за приближавшейся первой мировой войны. Проведение их, по сути, являлось продолжением работы по созданию классической теории проводимости металлов. Основы этой теории к 1901 г. были разработаны немецким физиком П. Друде (1863–1906), а чуть позднее усовершенствованы и дополнены Лоренцем. Согласно этой теории атомы в металлах частично диссоциированы на электроны и положительные ионы, которые находятся в узлах решетки кристаллов, из которых состоит твердый металл. В большинстве случаев число свободных электронов соответствует числу атомов металла, т. е. концентрация свободных электронов $n\approx10^{28}-10^{29}$ м$^{-3}$. Считается, что в среднем каждый атом отдает по одному электрону. Такие электроны могут относительно свободно перемещаться в кристаллической решетке. В отсутствие внешнего электрического поля они совершают беспорядочное тепловое движение. И Друде, и Лоренц предложили рассматривать свободные электроны как некий «электронный газ», который подчиняется законам идеального газа. Однако в отличие от молекул идеального газа, которые сталкиваются между собой, свободные электроны сталкиваются с ионами кристаллической решетки. При наложении внешнего электрического поля электроны начинают упорядоченное движение в направлении, противоположном этому полю. Оценим абсолютные значения скорости хаотичного движения электронов и скорости их направленного движения (скорости дрейфа).

Кинетическая энергия одного электрона определяется выражением

$$w_{\text{к}}=\frac{m\bar{u}^2}{2},$$

где $m$ – масса электрона, $\bar{u}$ – средняя скорость хаотического движения электрона. Согласно молекулярно-кинетической теории эта же энергия $w_{\text{к}} = \frac{3}{2}kT$, где $k$ – постоянная Больцмана, $T$ – температура. Из этих выражений следует:

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}.$$

Для комнатной температуры ($T = 300$ К)

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{3 \cdot 1{,}38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{9{,}1 \cdot 10^{-31}}} \approx 10^5 \text{ м/с}.$$

Среднюю скорость направленного движения электронов в медном проводнике определим из (10.6), положив плотность тока $j = 10 \text{ А/мм}^2 = 1 \cdot 10^7 \text{ А/м}^2$ и концентрацию $n = 1 \cdot 10^{29} \text{ м}^{-3}$. Тогда

$$\bar{\upsilon} = \frac{j}{ne} = \frac{10^7}{10^{29} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \approx 10^{-3} \text{ м/с}.$$

Таким образом, $\bar{\upsilon} \ll \bar{u}$.

Теория Друде – Лоренца объясняет основные законы протекания электрического тока в проводниках, в частности закон Ома, закон Джоуля – Ленца, закон Видемана – Франца. Дополненная некоторыми квантово-механическими представлениями, она удовлетворительно объясняет контактные явления на границе двух проводников. Тем не менее, она не может объяснить механизм электропроводности полупроводников и ряд явлений в проводниках, о которых речь будет идти ниже.

**Объяснение закона Ома.** При наличии электрического поля внутри проводника на каждый электрон действует сила $\vec{F} = e\vec{E}$, где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля. Под действием этой силы согласно второму закону Ньютона электрон движется с ускорением

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{e\vec{E}}{m}.$$

Ускоренное направленное движение электрона наблюдается только между двумя столкновениями с узлами решетки. После столкновения, согласно Друде, скорость электрона равна нулю, а перед столкновением она определяется по формуле

$$\upsilon_{\max} = a\tau = \frac{eE}{m}\tau, \qquad (12.4)$$

где $\tau$ – время свободного пробега. Средняя скорость направленного движения электронов

$$\bar{\upsilon} = \frac{\upsilon_{\max} + 0}{2} = \frac{eE}{2m}\bar{\tau}, \qquad (12.5)$$

где среднее значение времени свободного пробега электрона

$$\bar{\tau} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{u} + \bar{\upsilon}} = \frac{\bar{\lambda}}{\bar{u}},$$

поскольку $\bar{u} \gg \bar{\upsilon}$. Здесь $\bar{\lambda}$ – средняя длина свободного пробега электрона. Тогда из (12.5) получим:

$$\bar{\upsilon} = \frac{e\bar{\lambda}}{2m\bar{u}}E. \qquad (12.6)$$

Подставив (12.6) в (11.6), получим выражение для расчета плотности тока в проводнике:

$$j = en\bar{\upsilon} = en\frac{e\bar{\lambda}}{2m\bar{u}}E = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{u}}E. \qquad (12.7)$$

Сравнив (12.7) с законом Ома в дифференциальной форме ($j = \sigma E$), получим выражение для удельной электропроводности проводников:

$$\sigma = \frac{ne^2\bar{\lambda}}{2m\bar{u}} = \frac{ne^2}{2m}\bar{\tau}. \qquad (12.8)$$

В последнюю формулу входит среднее время свободного пробега электронов, т. е. среднее время между двумя столкновениями электронов с узлами кристаллической решетки. Чем это время больше, тем выше электропроводность проводника. Следовательно, классическая теория электропроводности металлов объясняет электрическое сопротивление металлов столкновением электронов с узлами кристаллической решетки.

**Объяснение закона Джоуля – Ленца.** Чтобы рассчитать энергию, которую передает узлу при столкновении один электрон, воспользуемся выражением (12.4) и уже упоминаемым условием Друде (скорость электрона после столкновения равна нулю):

$$w_{\text{к}} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} = \frac{me^2E^2\overline{\tau}^2}{2m^2} = \frac{e^2E^2\overline{\tau}^2}{2m}.$$

За единицу времени электрон сталкивается с узлами решетки в среднем $\overline{z} = \dfrac{1}{\overline{\tau}}$ раз. В таком случае за единицу времени в единице объема проводника выделится энергия

$$\omega = n\overline{z}w_{\text{к}} = \frac{n\overline{z}e^2E^2\overline{\tau}^2}{2m} = \frac{ne^2\overline{\tau}^2}{2\overline{\tau}m}E^2 = \frac{ne^2\overline{\tau}}{2m}E^2. \qquad (12.9)$$

Сравнив последнее выражение с (12.8), получим закон Джоуля – Ленца в дифференциальной форме:

$$\omega = \sigma E^2.$$

**Объяснение закона Видемана – Франца.** Закон установлен эмпирически в 1853 г. и связывает коэффициенты электропроводности и теплопроводности металлов:

$$\frac{\chi}{\sigma} = AT,$$

где $\chi$ – коэффициент теплопроводности, $A = 2{,}21\cdot10^{-8}$ Вт/К$^2$ – определенная экспериментально постоянная, одинаковая для всех металлов. Поскольку металлы – хорошие проводники тепла, а диэлектрики – плохие, логично предположить, что теплопроводность металлов обусловлена свободными электронами. Тогда согласно молекулярно-кинетической теории газов

$$\chi = nk\overline{u}\frac{\overline{\lambda}}{2}, \qquad (12.10)$$

где в данном случае $n$, $\overline{u}$, $\overline{\lambda}$ – концентрация, средняя скорость и средняя длина свободного пробега электронов в металле; $k$ – постоянная Больцмана. Разделив (12.10) на (12.8), получим:

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{nk\overline{u}\overline{\lambda}\cdot 2m\overline{u}}{ne^2\overline{\lambda}\cdot 2} = \frac{k\overline{u}^2m}{e^2}.$$

Так как $\dfrac{m\bar{u}^2}{2} = \dfrac{3}{2}kT$, то

$$\frac{\chi}{\sigma} = \frac{3k^2}{e^2}T,$$

где $\dfrac{3k^2}{e^2} = A = \dfrac{3\cdot\left(1{,}38\cdot 10^{-23}\right)^2}{\left(1{,}6\cdot 10^{-19}\right)^2} = 2{,}23\cdot 10^{-8}$ В$^2$/К$^2$. Совпадение экспериментальных значений постоянной $A$ и рассчитанной согласно классической теории электропроводности не вызывает сомнений в правильности использованного подхода.

## 12.2. Зависимость сопротивления металлов от температуры. Сверхпроводимость. Трудности классической теории электропроводимости металлов

**Зависимость сопротивления металлов от температуры.** Согласно классической теории (см. 12.1) сопротивление металлов объясняется столкновением электронов с ионами кристаллической решетки. С увеличением температуры амплитуда колебаний ионов в узлах кристаллической решетки должна возрастать. Следовательно, должно возрастать и число столкновений электронов с узлами, что согласно (12.8) приведет к снижению электропроводности, или росту сопротивления проводника. Экспериментально установлено, что при обычных температурах сопротивление меняется с температурой линейно:

$$R = R_0\left(1 + \alpha t\right), \tag{12.11}$$

где $t$ – температура, выраженная в градусах Цельсия; $\alpha = R\dfrac{dR}{dt}$ – температурный коэффициент сопротивления, численно равный относительному изменению сопротивления проводника при изменении его температуры на 1 К. Температурный коэффициент зависит от температуры. Для металлов он всегда положителен, и при изменении температуры в небольших интервалах его можно считать величиной постоянной и равной среднему значению в этом интервале. Для большинства чистых металлов

$$\alpha \approx \frac{1}{273}. \qquad (12.12)$$

В формуле (12.11) $R$ и $R_0$ – сопротивление проводника соответственно при температурах $t$ и $t_0$. Если не учитывать изменение геометрических размеров при изменении температуры, формулу (12.11) можно применять для характеристики температурной зависимости удельного сопротивления проводника:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t). \qquad (12.13)$$

Учитывая (12.12), получим после выполнения преобразований:

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0 (1 + \alpha t) = \rho_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right) = \\ &= \rho_0 \frac{273 + t}{273} = \rho_0 \frac{1}{273} T = \rho_0 \alpha T. \end{aligned} \qquad (12.14)$$

Уравнение (12.14) указывает на прямо пропорциональную зависимость сопротивления металлов от температуры. Согласно теории при стремлении температуры к абсолютному нулю сопротивление чистого металла должно стремиться к нулю (рис. 222).

В реальных металлах любые примесные атомы или дефекты кристаллической решетки приводят к остаточному сопротивлению, которое не зависит от температуры (рис. 222).

**Сверхпроводимость.** В 1911 г. голландский физик Х. Камерлинг-Оннес (1853–1926) открыл явление, которое назвали *сверхпроводимостью*. Исследуя температурную зависимость сопротивления ртути, он обнаружил, что при температуре 4,15 К ее электрическое сопротивление скачкообразно падает до нуля (рис. 222). В настоящее время известно свыше 20 чистых металлов, обладающих этим свойством, и более 1000 разных химических соединений. У каждого проводника – своя температура, при которой происходит переход в сверхпроводящее

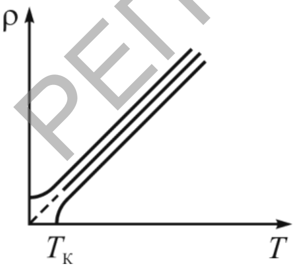

Рис. 222

состояние. Она называется *критической* ($T_к$). Среди чистых металлов наибольшая критическая температура у ниобия – 9,22 К. Существуют две возможности экспериментального наблюдения сверхпроводимости:

- при включении в замкнутую электрическую цепь сверхпроводящего сопротивления. Разность потенциалов на его концах равна нулю;
- при размещении кольца из сверхпроводящего материала в магнитном поле. После охлаждения кольца до температуры ниже критической магнитное поле выключается и в кольце индуцируется электрический ток, который при обычных условиях прекратился бы почти сразу. При наличии сверхпроводимости он может наблюдаться в кольце неограниченно долго. Известны случаи, когда такие токи сохранялись в лаборатории на протяжении нескольких лет.

В рамках классической теории объяснить явление сверхпроводимости нельзя. Квантовомеханическое объяснение представляет одну из актуальных проблем теоретической физики твердого тела и выходит за рамки программы курса общей физики.

В настоящее время основными направлениями практического применения сверхпроводимости являются:

- магниты, создающие сильные магнитные поля. Существует множество электромагнитов со сверхпроводящими обмотками, которые создают магнитные поля до 10 Тл;
- линии электропередач с малыми потерями. Сверхпроводящие линии электропередач будут свободны от потерь электроэнергии. Когда стоимость электрической энергии, полученной от альтернативных источников, например с помощью солнечных батарей, станет сравнимой со стоимостью энергии, производимой атомными и тепловыми станциями, проблема ее доставки из районов производства в места потребления может быть решена с помощью сверхпроводящих линий электропередач;
- высокоскоростные транспортные средства.

**Трудности классической теории электропроводимости металлов.** Классическая теория удовлетворительно объясняет законы Ома, Джоуля – Ленца, Видемана – Франца, однако она не в состоянии объяснить:

- сверхпроводимость;
- температурную зависимость металлов от температуры. Согласно (12.8)

  $$\sigma = \frac{ne^2\overline{\lambda}}{2m\overline{u}}, \ \rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{2m\overline{u}}{ne^2\overline{\lambda}} = \frac{2m}{ne^2\overline{\lambda}}\sqrt{\frac{3kT}{m}},$$

  т. е. удельное сопротивление проводника пропорционально $\sqrt{T}$, тогда как согласно (12.13) оно прямо пропорционально абсолютной температуре в первой степени;
- закон Дюлонга (1785–1838) и Пти (1791–1820) для проводников. Согласно этому экспериментальному закону молярная (атомная) теплоемкость всех твердых тел при постоянном объеме $C_V = 3R = 25$ Дж/(К·моль). Однако электроны проводимости в металле являются электронным (одноатомным) газом, и они должны вносить свой вклад в значение теплоемкости металла. Атомная теплоемкость такого газа определяется по формуле $c = \frac{3R}{2} = 12{,}5$ Дж/(К·моль). В таком случае атомная теплоемкость всех металлов должна быть $C = C_V + c = 37{,}5$ Дж/(К·моль). На самом деле закон Дюлонга и Пти с достаточной точностью выполняется для всех металлов. Это означает, что электроны – непосредственные участники процессов электропроводности и теплопроводности – не влияют на теплоемкость проводников;
- рассчитанное по формуле (12.8) значение средней длины свободного пробега электрона при условии, что для расчета взята экспериментально полученная величина удельной проводимости металла, в сотни раз превышает расстояние между узлами кристаллической решетки.

## 12.3. Основные свойства полупроводников. Основные представления зонной теории. Собственная и примесная проводимость полупроводников

**Основные свойства полупроводников.** К полупроводникам относят класс веществ, удельное сопротивление которых лежит в интервале между сопротивлениями проводников и диэлектриков ($10^{-5}\,\text{Ом}\cdot\text{м} < \rho < 10^{8}\,\text{Ом}\cdot\text{м}$). С проводниками их объединяет то, что в обоих случаях носителями зарядов являются электроны. Однако в полупроводниках концентрация свободных электронов значительно ниже концентрации атомов и сильно зависит от температуры, освещения и ионизирующего излучения. С ростом температуры число свободных электронов растет и, соответственно, растет проводимость. У проводников же с ростом температуры наблюдается рост сопротивления, что вполне логично объясняется с помощью классической теории электропроводности. Температурная зависимость сопротивления является определяющим свойством для идентификации веществ, чья электропроводность находится на границе диапазона проводник – полупроводник:

- если с ростом температуры проводимость падает, то вещество – проводник;
- если с ростом температуры проводимость растет, то вещество – полупроводник.

К полупроводникам относятся кремний, германий, селен, индий, ряд химических соединений элементов III группы периодической системы с элементами V группы (GaAs, InSb и др.), некоторые органические соединения.

Объяснить электропроводность полупроводников в рамках классической теории невозможно. Простейшей теорией, способной описать их свойства, является квантовая зонная теория. С ее помощью можно объяснить также те свойства проводников, которые вступают в противоречия с классической теорией.

**Основные представления зонной теории:**

- Электроны в атоме могут принимать только дискретные значения энергии.

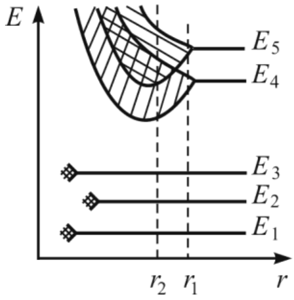


Рис. 223

- Дискретные значения энергии электронов представляются в виде энергетических уровней, которые на схемах принято показывать в виде отдельных линий (рис. 223).

По оси ординат отложены значения энергии электронов, а по оси абсцисс – расстояние между атомами. На больших расстояниях, пока взаимодействием между атомами можно пренебречь, энергетические уровни электронов полностью совпадают. У каждого из них при сближении атомов до расстояний, когда они создают связанную систему, например кристалл, взаимодействие между ними возрастает и приводит к изменению положения уровней. В таком случае говорят, что они «расщепляются» на энергетические зоны (на рис. 223 они заштрихованы). Вместо одного одинакового для всех атомов значения энергетического уровня возникает равная количеству атомов в кристалле совокупность очень близких, но не совпадающих между собой значений. Величина расщепления уровней не одинакова. Сильнее расщепляются те, которые в атоме соответствуют внешним (валентным) электронам. На рис. 223 показано расщепление уровней в зависимости от расстояния между атомами. При расстоянии между атомами, равном $r_1$, верхние уровни начинают расщепляться, однако образованные зоны еще не перекрываются. Они разделены между собой зоной, которая называется *запрещенной*. Электроны не могут иметь значения энергии, соответствующие запрещенной зоне. Начиная с расстояния $r_2$, происходит перекрывание соседних зон. Число уровней в такой слившейся зоне равно суммарному их числу, на которые расщепились бы оба у всех атомов кристалла.

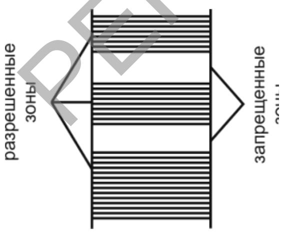


Рис. 224

Удобнее энергетические уровни представлять так, как это сделано на рис. 224.

Энергетические зоны не следует путать с пространственными зонами, т. е. областями пространства, где может находиться электрон. Согласно принципу Паули на одном энергетическом уровне в любой разрешенной зоне не может находиться более двух электронов с противоположными значениями спина. Поэтому энергетические уровни заполняются парами электронов, начиная с самых «низких». Самая верхняя разрешенная зона, полностью заполненная электронами, называется *основной* или *валентной*. Остальные, более высокие по значению энергии зоны, называются *возбужденными*. Первая возбужденная зона, которая примыкает к валентной, называется зоной *проводимости*.

Движение электрона в квантовой механике рассматривается как процесс перехода его из одного квантового состояния в другое. Для этого необходимо, чтобы конечное квантовое состояние было свободно. Таким образом, электрический ток в твердых телах под воздействием внешнего электрического поля может возникнуть только тогда, когда зона не полностью заполнена электронами или может частично освободиться от электронов вследствие нагревания или какого-то другого воздействия. В диэлектриках и полупроводниках валентные зоны целиком заполнены при температурах, близких к температуре абсолютного нуля. А зоны проводимости, отделенные от валентной запрещенной зоной, пусты (рис. 225, *а*, *б*).

У металлов либо нет запрещенной зоны, либо валентная зона не полностью заполнена даже при температуре абсолютного нуля (рис. 225, *в*). Поэтому даже при наличии слабого электрического поля проводники начинают проводить электрический ток. Чтобы полупроводник начал проводить электрический ток, необходимо электронам из валентной зоны сообщить энергию для преодоления запрещенной зоны и попадания их в зону проводимости. Так, при нагревании электроны из валентной зоны переходят в зону проводимости, а в валентной зоне образуется свободное (вакантное) место, называемое *дыркой*. В это вакантное место

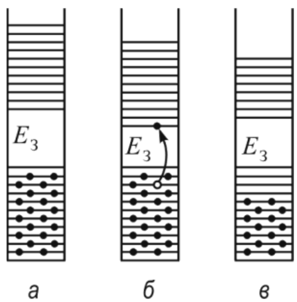


Рис. 225

могут переходить электроны с соседних уровней. В результате и в валентной зоне, и в зоне проводимости создаются условия для возникновения тока при наложении электрического поля. Наличие электронов в зоне проводимости обусловливает *электронную проводимость*, а наличие вакантных мест в валентной зоне – *дырочную проводимость*. Диэлектрики отличаются от полупроводников шириной запрещенной зоны. Принято считать, что если ширина запрещенной зоны при нормальной температуре больше 2–3 эВ, то кристалл является диэлектриком, а если около 1 эВ – полупроводником. Так, у алмаза, который является диэлектриком, ширина запрещенной зоны 5,2 эВ, а у распространенных полупроводников германия и кремния – 0,72 эВ и 1,09 эВ соответственно.

**Собственная и примесная проводимость полупроводников.** Рассмотрим схематично посредством электронных связей на примере германия механизм проводимости чистого полупроводника (рис. 226).

На последней оболочке атома германия расположены 4 валентных электрона. Связь с соседними атомами создана путем обобщения одного электрона с соседним атомом. Каждый атом окружают 4 соседа. Таким образом, заполняется последняя оболочка и образуется ковалентная связь. При $T = 0$ K (рис. 226, *а*) все электроны задействованы в связях между атомами. При $T > 0$ K (рис. 226, *б*) часть электронов переходит в пространство между узлами кристаллической решетки, а на местах их пребывания образуются *дырки*. Дырки тоже считаются носителями электрического тока. При наличии дырок электроны могут рекомбинировать

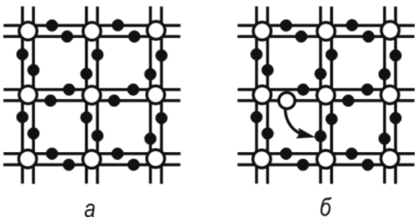


Рис. 226

с ними, т. е. совершать переходы из каких-то квантовых состояний в незаполненные (т. е. дырки). В отсутствие внешнего электрического поля по всему объему полупроводника установится равновесная концентрация дырок и свободных электронов. При наложении внешнего электрического поля на хаотичное движение электронов и дырок накладывается направленное движение. Электроны движутся в сторону, противоположную полю, а дырки – по направлению поля. Согласно зонной теории (рис. 225, *б*) электроны из валентной зоны переходят в зону проводимости и полупроводник становиться электропроводящим. Рассмотренную электропроводность чистых полупроводников называют *собственной*.

При наличии в полупроводнике примесей картина электропроводности заметно меняется. Под примесями понимают атомы и ионы других элементов, различные дефекты и искажения в кристаллической решетке. Наличие в полупроводнике тысячной доли процента примесей способно в сотни тысяч раз уменьшить его сопротивление. Механизм влияния примесей на проводимость полупроводника рассмотрим снова на примере германия, в который внесены атомы мышьяка (As) (рис. 227).

У германия на последней оболочке четыре валентных электрона, а у мышьяка – пять. Один из его валентных электронов не участвует в связях с другими атомами. Небольшие изменения температуры способны оторвать этот электрон от атома (рис. 227, *б*). В результате в полупроводнике возникает проводимость, которую называют *электронной* или *проводимостью*

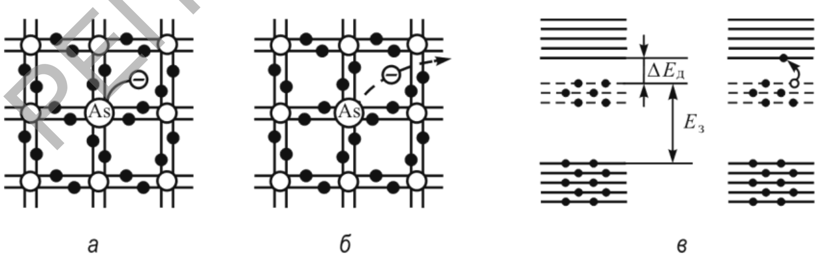


Рис. 227

*n-типа*. Примесь, которая образует такую электропроводность, называют *донорной*. В зонной теории возникновение проводимости *n*-типа выглядит следующим образом. Примесь с большей валентностью, чем у основного полупроводника (в данном случае, мышьяк), образует донорные примесные уровни, размещенные в запрещенной зоне и вблизи нижней границы зоны проводимости (рис. 227, *в*). Энергия, отделяющая эти уровни от зоны проводимости, невелика, порядка 0,01 эВ (для германия с небольшой концентрацией примеси мышьяка $\Delta E_{д} = 0,0124$ эВ). При температуре абсолютного нуля эти уровни так же, как и уровни валентной зоны, полностью заполнены. С повышением температуры с большей вероятностью происходит переход электронов с примесных уровней в зону проводимости, чем с валентной зоны.

Если валентность примеси меньше валентности основного полупроводника, то создаваемая ими проводимость называется *дырочной* или *проводимостью p-типа*. Механизм ее образования рассмотрим на примере все того же германия и индия (In), который является трехвалентным. При $T = 0$ все связи атомов германия «укомплектованы», за исключением связей с атомами индия (рис. 228, *а*).

Они представляют собой места, способные захватить электрон. При переходе на эти места электронов с соседних пар возникают дырки, которые будут кочевать по всему кристаллу (рис. 228, *б*). Вблизи атома примеси возникает избыточный отрицательный заряд, однако он не может быть носителем тока. Индий в германии обусловливает дырочную проводимость. Примеси, которые обеспечивают дырочную проводимость, называются *акцепторными*,

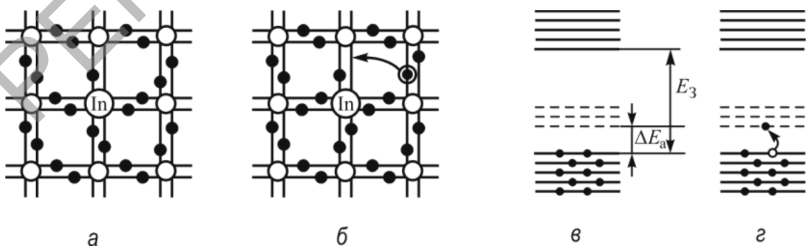


Рис. 228

а полупроводники с такой проводимостью – *полупроводниками p-типа*. Согласно зонной теории трехвалентные примеси приводят к возникновению в нижней части запрещенной зоны дополнительных энергетических уровней, не занятых электронами при абсолютном нуле. При повышении температуры электроны с большей вероятностью будут переходить на них, чем на уровни зоны проводимости, так как ширина этих уровней намного меньше ширины запрещенной зоны и составляет сотые доли электронвольта (рис. 228, *в*, *г*).

При одновременном внесении в полупроводник донорных и акцепторных примесей тип проводимости зависит от того, какая из примесей создает большую концентрацию носителей зарядов. Примеси могут компенсировать друг друга. Обычно в полупроводниках существуют носители зарядов четырех типов:

- электроны собственной проводимости;
- дырки собственной проводимости;
- электроны примесной проводимости;
- дырки примесной проводимости.

Общая удельная электропроводность определяется формулой

$$\sigma = en_1u_1 + en_1u_2 + en_2u_3, \tag{12.15}$$

где $n_1$ – концентрация электронов и дырок собственной проводимости, $u_1$ и $u_2$ – их подвижности соответственно, $n_2$ – концентрация электронов или дырок примесной проводимости, $u_3$ – их подвижность. Под *подвижностью носителей зарядов* понимают отношение скорости их направленного движения, вызванного электрическим полем, к напряженности этого поля. При смешанной проводимости носители зарядов, которые в большей степени влияют на проводимость, называются *основными*, а остальные же – *неосновными*.

Зависимость электропроводности смешанного полупроводника от температуры представлена в виде графика $\ln\sigma = f\left(\frac{1}{T}\right)$ на рис. 229.

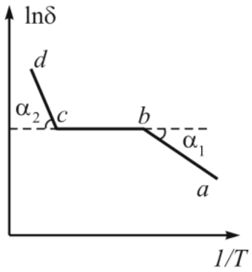


Рис. 229

Здесь $\sigma$ – удельная электропроводность полупроводника. Качественно эта зависимость разбивается на три участка. Участок *ab* соответствует примесной электропроводности при низких температурах. Угол наклона прямой *ab* характеризует энергию ионизации примесей, или согласно зонной теории – ширину дополнительных энергетических уровней $\Delta E_д$, $\Delta E_а$:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\Delta E}{2k}, \tag{12.16}$$

где $k$ – постоянная Больцмана.

Участок *bc* соответствует интервалу температур, при котором все примеси уже ионизированы, а собственная электропроводимость еще не появилась. И наконец, участок *cd* соответствует собственной проводимости полупроводника. По тангенсу наклона прямой *cd* определяют ширину запрещенной зоны чистого полупроводника:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{E_з}{2k}.$$

## 12.4. Электропроводность газов. Несамостоятельный газовый разряд. Виды самостоятельных газовых разрядов

При нормальных условиях все без исключения газы являются диэлектриками. Они состоят из электрически нейтральных молекул, и в них отсутствуют носители зарядов.

Для того чтобы газ стал электропроводным, его необходимо ионизировать. Ионизация газа состоит в отрыве электронов от молекул или атомов и присоединении части их к другим нейтральным атомам или молекулам. Следовательно, носителями электрических зарядов в газах могут быть положительные и отрицательные ионы, а также свободные электроны.

Энергия, необходимая для отрыва электрона от молекулы или атома, называется *работой ионизации*. Работу ионизации принято измерять в электронвольтах (1 эВ). Ниже приведены значения работы ионизации некоторых газов.

Табл. 12.1

| Газ | He | Ne | $N_2$ | Ar | $H_2$ | N | $CO_2$ | Kr | H | O | $H_2O$ | Xe | $O_2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $W_{ион}$, эВ | 24,5 | 21,5 | 15,8 | 15,7 | 15,4 | 14,5 | 14,4 | 13,9 | 13,5 | 13,5 | 13,2 | 12,8 | 12,5 |

Прохождение электрического тока через газы называется *газовым разрядом*. Различают два вида газовых разрядов: *несамостоятельный* и *самостоятельный*. В несамостоятельном разряде ионы образуются в результате действия внешнего ионизатора. Их образование не связано с наличием электрического поля. Ионизация может быть вызвана:

- нагреванием газа *(термическая ионизация)*. В этом случае при достаточно высокой температуре, когда энергия теплового движения атомов или молекул велика, они могут ионизировать друг друга за счет кинетической энергии сталкивающихся частиц;
- воздействием фотонов (квантов электромагнитного излучения). Такая ионизация называется *фотоионизацией*. На практике – это воздействие на газы ультрафиолетовыми или рентгеновскими лучами, а также излучением радиоактивных веществ;
- бомбардировкой молекул (атомов) газа быстро движущимися электронами или ионами *(ударная ионизация)*. Она наблюдается в том случае, когда кинетическая энергия ионизирующей частицы превосходит работу ионизации молекулы (атома) газа.

Для того чтобы разряд был непрерывным, необходима постоянная работа ионизатора. В противном случае через некоторое время разряд затухает. Причиной затухания является *рекомбинация ионов* – нейтрализация разноименных ионов при их встрече или воссоединение положительного иона и электрона в нейтральную молекулу. При рекомбинации излучается энергия, равная энергии ионизации. Частично эта энергия может излучаться в виде света.

Разряд, который существует за счет процессов, созданных в газе электрическим полем, называется самостоятельным. При определенных условиях несамостоятельный разряд может перейти в самостоятельный.

**Несамостоятельный газовый разряд.** Схема наблюдения несамостоятельного газового разряда представлена на рис. 230.

Газ находится в стеклянной трубке, из которой его можно откачивать с помощью вакуумного насоса. В трубку вставлены два электрода, подключенные к положительному и отрицательному полюсам источника постоянного тока. Напряжение на электродах регулируется потенциометром $R$. Электрод, подключенный к положительному полюсу, называется *анодом*, а подключенный к отрицательному – *катодом*. Ионизация газа происходит за счет облучения его ультрафиолетом. Одновременно с процессом ионизации происходит и рекомбинация ионов. На рис. 231 представлена зависимость силы тока разряда от разности потенциалов между анодом и катодом (вольт-амперная характеристика разряда).

Пусть $\Delta n$ – интенсивность работы ионизатора (число пар ионов, что создает ионизатор за единицу времени в единице объема газа), а $\Delta n'$ – число молекул, рекомбинированных в единице объема за единицу времени. Эта величина пропорциональна как числу положительных ионов, так и числу отрицательных ионов в единице объема:

$$\Delta n' = B n_0^2, \tag{12.17}$$

где $B$ – коэффициент рекомбинации, который зависит от природы газа, температуры и давления; $n_0$ – число пар ионов противоположных знаков в единице объема газа.

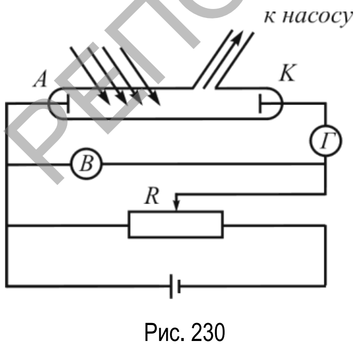


Рис. 230

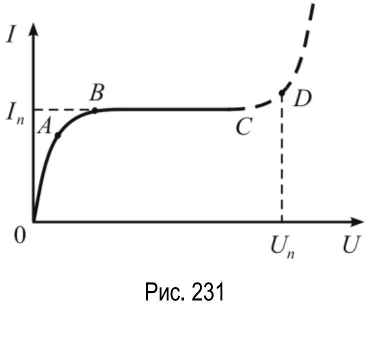


Рис. 231

В отсутствие электрического поля после наступления динамического равновесия число распавшихся молекул равно числу рекомбинированных:

$$\Delta n = \Delta n' = B n_0^2 . \qquad (12.18)$$

Откуда концентрация ионов одного знака равна:

$$n_0 = \sqrt{\frac{\Delta n}{B}} . \qquad (12.19)$$

При наличии электрического поля часть ионов достигает электродов и там нейтрализуется. Условием динамического равновесия в таком случае будет равенство

$$\Delta n = B n_0^2 + \Delta n'' , \qquad (12.20)$$

где $\Delta n''$ – число пар ионов, исчезающих в результате нейтрализации на электродах в единице объема за единицу времени. Выразим объем газа в трубке $V$ через расстояние между электродами $l$ и площадь поверхности электродов $S$:

$$V = Sl .$$

Число пар ионов, нейтрализованных за время $\Delta t$,

$$N = \Delta n'' V \Delta t ,$$

а величина суммарного заряда, прошедшего между электродами,

$$\Delta Q = Ne = \Delta n'' V e \Delta t = \Delta n'' S l e \Delta t .$$

Сила тока в разряде

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \Delta n'' S l e ,$$

а плотность тока

$$j = \frac{I}{S} = \Delta n'' l e .$$

Из последнего выражения найдем

$$\Delta n'' = \frac{j}{el}$$

и подставим в (12.20):

$$\Delta n = B n_0^2 + \frac{j}{el} . \qquad (12.21)$$

Анализируя (12.21), рассмотрим два предельных случая. Первый – когда плотность тока очень мала, что соответствует слабым электрическим полям:

$$\frac{j}{el} \ll Bn_0^2 .$$

Число ионов, нейтрализованных на электродах, значительно меньше нейтрализованных за счет рекомбинации, и их количество согласно (12.19) не изменяется. В таком случае разряд подчиняется закону Ома. На вольт-амперной характеристике разряда (рис. 231) это соответствует участку *OA*. По аналогии с электролитами для газов закон Ома можно представить в виде:

$$\vec{j} = n_0 e \left( b^+ + b^- \right) \vec{E} , \tag{12.22}$$

где $\vec{E}$ – напряженность электрического поля, $b^+$ и $b^-$ – подвижности положительных и отрицательных ионов. Подвижность ионов в газах имеет значения порядка $10^{-4}$ м²/(В·с).

Второй предельный случай наблюдается при $Bn_0^2 \ll \frac{j}{el}$. Из (12.20) находим выражение для плотности тока, который в данном случае называется током насыщения:

$$j_{\text{нас}} = e\Delta nl . \tag{12.23}$$

Плотность тока не зависит от напряженности электрического поля и создается всеми ионами, которые возникли в результате работы ионизатора в газе, заключенном между электродами. На рис. 231 этому условию соответствует участок *BC*. При промежуточных значениях разности потенциалов между анодом и катодом происходит плавный переход от линейной зависимости *I* от *U* к насыщению (участок *AB*). Если разность потенциалов больше значения, соответствующего точке *C*, то наблюдается резкий рост тока, что объясняется возникновением так называемых электронных лавин. Образованные внешним ионизатором электроны в электрическом поле успевают приобрести кинетическую энергию, превосходящую работу ионизации молекулы газа. При столкновении этих электронов с молекулами освобождаются новые электроны, которые снова разгоняются полем и при новых столкновениях снова ионизируют молекулы. Происходит лавинообразное размножение электронов и ионов. Разряд при этом остается несамостоятельным (участок *CD*). После прекращения действия внешнего ионизатора он продолжается до тех пор, пока все электроны не достигнут анода. Чтобы разряд стал самостоятельным, разность потенциалов между электродами должна быть достаточной для разгона ионов до значений энергий, превосходящих работу ионизации. На рис. 231 – участок кривой, расположенный правее точки *D*.

**Виды самостоятельных газовых разрядов.** *Тлеющий разряд* возникает в газах при низких давлениях. Для его наблюдения используют разрядные стеклянные трубки с впаянными электродами, на которые подается напряжение для осуществления разряда (рис. 232).

Из трубки предусмотрена откачка воздуха. При напряжении на электродах в тысячу вольт и при давлениях, близких к атмосферному, ток в газе практически не наблюдается. При давлениях порядка 6500 Па в трубке появляется светящийся извилистый шнур, который соединяет катод и анод. После понижения давления до 500 Па трубка заполняется однородным свечением – возникает тлеющий разряд. В простейшем случае выделяют четыре основные области разряда:

- *1* – первое катодное свечение, или катодная пленка;
- *2* – темное катодное пространство, называемое круксовым (по имени английского физика У. Крукса (1832–1919));
- *3* – отрицательное или тлеющее свечение, в которое плавно переходит темное пространство Крукса;
- *4* – фарадеево темное пространство. Граница между фарадеевым пространством и тлеющим свечением размыта;
- *5* – положительный столб разряда (создает иллюзию однородности свечения всей разрядной трубки, поскольку его объем намного больше объема первых трех частей разряда, относящихся к его катодной части).

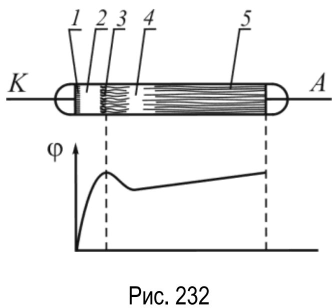

Рис. 232

При давлении в 133 Па (1 мм рт. ст.) положительный столб начинает распадаться на чередующиеся темные и светлые изогнутые слои, которые называются *стратами*.

Основные процессы, которые поддерживают разряд, происходят в катодном темном пространстве и в области отрицательного свечения. Распределение потенциала вдоль длины трубки, которое можно измерить с помощью впаянных в трубку электродов-зондов, представлено на рис. 232. Почти все падение потенциала приходится на область катодного темного пространства. Здесь катионы, образовавшиеся в результате ударной ионизации молекул в области отрицательного свечения и отчасти в положительном столбе и двигающиеся к катоду, разгоняются до значений энергии, позволяющих при достижении катода выбивать из его поверхности электроны (вторичная электронная эмиссия). Эмитированные же электроны движутся в сторону анода, область катодного темного пространства проходят практически без столкновений с молекулами газа. Ширина этого пространства приблизительно равна длине свободного пробега электронов и увеличивается с уменьшением давления газа в разрядной трубке. При столкновении с молекулами газа уже в зоне тлеющего разряда происходит ионизация молекул. Образующиеся при этом катионы вначале имеют значительно меньшую скорость, чем освободившиеся электроны. Поэтому на границе зон *2* и *3* концентрация положительных ионов значительно выше концентрации электронов. Здесь возникает положительный пространственный заряд, который вызывает появление катодного падения потенциала. Часть образовавшихся ионов рекомбинируют с электронами, в результате чего возникает свечение, а часть движется к катоду, и процесс повторяется. Освобожденные при этом электроны и потерявшие в процессе ионизации энергию эмитированные ускоряются в фарадеевом пространстве и попадают в область положительного столба. В этой области концентрации катионов и электронов близки. Электроны постоянно часть молекул возбуждают, а часть ионизируют. Параллельно происходит рекомбинация и переход возбужденных молекул в основное состояние. Оба процесса сопровождаются излучением света, причем при переходе молекул из возбужденного состояния в основное у каждого газа излучению соответствует определенная длина волны. Поэтому свечение каждого газа имеет свой цвет.

Доказательством того, что основные процессы, поддерживающие разряд, происходят в его катодной части, является опыт с движущимся анодом. Если в газоразрядной трубке катод придвигать к аноду, то катодные части разряда остаются без изменений, а длина положительного столба уменьшается до полного исчезновения. При дальнейшем движении исчезает фарадеево пространство и сокращается тлеющее свечение. Его граница с катодным темным пространством остается неподвижной. В непосредственной близости анода к этой границе разряд прекращается.

Тлеющий разряд широко используется в самых разнообразных осветительных приборах (газосветные трубки, лампы дневного света, неоновые лампы, лампы вспышки и т. д.).

*Дуговой разряд* был открыт в 1802 г. русским физиком В.В. Петровым (1761–1834). Он происходит при большой плотности тока и при напряжении между электродами в несколько десятков вольт, может протекать при низком давлении (несколько сот Па) и при высоком давлении (до $10^8$ Па). Основным процессом, поддерживающим разряд, является эмиссия электронов с поверхности раскаленного катода. В лабораторных условиях получить разряд проще всего, если подключить два приведенных в соприкосновение угольных электрода к источнику постоянного тока, а затем медленно развести. Между электродами вспыхивает ослепительно яркое свечение. Бомбардировка электронами анода создает в нем углубление, называемое кратером дуги. При атмосферном давлении температура в кратере достигает 4000 К. Для сравнения температура на поверхности Солнца 6000 К. Устойчивую дугу всегда можно получить при высокой температуре катода. В тлеющем разряде катионы, бомбардирующие катод, не только выбивают электроны, но и разогревают его. Если увеличивать силу тока в тлеющем разряде, катод может разогреться до температуры, при которой начнется заметная термоэлектронная эмиссия, и тлеющий разряд превратится в дуговой. В таком разряде исчезает катодное падение потенциала.

В отличие от описанного выше разряда существует дуга с холодным катодом. Электродами в такой дуге служит жидкая ртуть, помещенная в баллон, из которого откачан воздух. Разряд происходит в парах ртути. Температура электродов не превышает нескольких сотен градусов, поэтому термоэлектронная эмиссия не играет заметной роли. Разряд существует за счет автоэлектронной эмиссии. Это означает, что электроны с поверхности катода эмитируют за счет сильного электрического поля. Поле же создается положительным пространственным зарядом, образованным ионами. Ионизация молекул, как и в тлеющем разряде, происходит за счет электронных лавин.

Дуговой разряд используется в качестве мощных источников света в разного рода осветительных и проекционных приборах, для резки и сварки металлов. Автоэлектронные дуги с ртутным катодом применяются для выпрямления переменного тока.

*Искровой разряд* – неустойчивый разряд, который возникает в газе между двумя электродами при атмосферном давлении в мощных, относительно однородных электрических полях ($E \cong 10^6$ В/м). Напряженность электрического поля, при которой возникает разряд, называется напряженностью пробоя или критической напряженностью. Разряд имеет вид прерывистых, ярких, зигзагообразных, разветвленных каналов ионизированного газа. Каналы пронизывают разрядный промежуток, исчезают, появляются вновь, сменяя друг друга. Разряд сопровождается выделением большого количества теплоты, ярким свечением и шумовым эффектом. Максимальная сила тока в мощных искровых разрядах достигает значений порядка нескольких сотен кА. В природных условиях искровой разряд наблюдается в виде молний.

Развитие разряда объясняет стримерная теория электрического пробоя газов, согласно которой возникновению ярко светящегося канала искры предшествует появление слабо светящихся скоплений ионизированных частиц (стримеров). В газоразрядном промежутке стримеры образуют электропроводящие мостики, по которым движутся мощные потоки электронов в процессе развития разряда. Возникновение стримеров объясняется наряду с образованием электронных лавин посредством ударной ионизации еще и фотоионизацией, т. е. ионизацией газа излучением, возникающим в самом разряде. При быстром расширении в стримерах скачкообразно повышается давление, что приводит к возникновению ударных волн на их границах. Этим и объясняется шумовой эффект, воспринимаемый как треск, а в случае молнии – как гром.

Схема развития разряда представлена на рис. 233.

Практически одновременно с электронной лавиной, которая зародилась у катода, возникают и развиваются лавины далеко впереди от вершины конуса первой лавины (на схеме лавины представлены в виде конусов). Причина возникновения новых лавин – фотоионизация (на схеме излучение, вызывающее фотоионизацию, показано волнистой линией). При таком развитии разряда общий путь, проходимый стримером, намного больше пути, который проходит одна лавина.

Искровой разряд широко применяется в технике и науке. С его помощью инициируют взрывы и процессы горения, измеряют высокие напряжения, используют в спектральном анализе, в переключателях электрических цепей, для обработки металлов и т. д.

*Коронный разряд* – газовый разряд, который можно наблюдать при атмосферном давлении в сильно неоднородных электрических полях. Такие поля создаются электродами с большой кривизной поверхности (острия, провода и т. д.). Если в непосредственной близости у электродов значения напряженности достигают величин $E \geq 3 \cdot 10^6$ В/м, то вокруг них возникает светящийся ореол – корона.

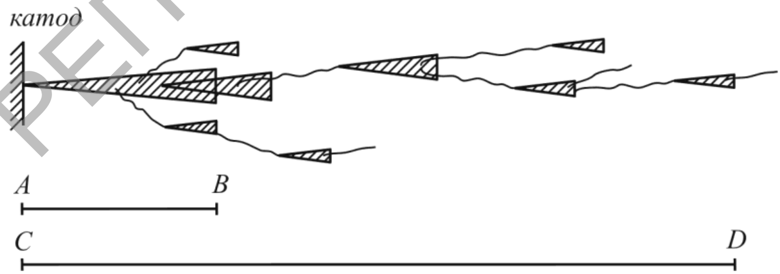


Рис. 233

Второй электрод может быть любой формы и должен быть расположен достаточно далеко, чтобы не развивался искровой разряд. По своей сути коронный разряд – не полностью развитый искровой разряд. Если корона возникает вокруг отрицательного электрода, то ее называют отрицательной, а если вокруг положительного, то – положительной. В случае отрицательной короны после достижения напряженностью электрического поля значения, превышающего напряженность пробоя, у поверхности электрода зарождаются электронные лавины, которые двигаются в сторону от электрода. На своем пути они ионизируют молекулы газа. Возникшие положительные ионы ускоряются полем и, попадая на катод, выбивают новые электроны. Эти электроны, отталкиваясь от катода, порождают новые электронные лавины. На некотором расстоянии электронные лавины обрываются, потому что в силу неоднородности поля его напряженность убывает очень быстро. Расстояние, на которое распространяются электронные лавины, представляет собой толщину короны. Потерявшие свою энергию электроны присоединяются к нейтральным молекулам газа и продолжают двигаться к аноду за пределами светящейся части разряда. Таким образом, внутри короны разряд обеспечивается носителями зарядов обоих знаков (положительные ионы и электроны), а за ее пределами – носителями зарядов одного знака (отрицательные ионы, или электроны).

В случае положительной короны электронные лавины зарождаются на внешней части короны и, двигаясь по направлению к аноду, ионизируют газ. Внутри положительной короны имеются носители зарядов обоих знаков, а за ее пределами – только положительные ионы. В обоих случаях за пределами короны газовый разряд является несамостоятельным.

Коронный разряд можно наблюдать в природе, когда под влиянием атмосферного электричества он появляется на верхушках деревьев, корабельных матч и т. д. Это явление получило название огней святого Эльма.

Коронный разряд может возникать вокруг проводов линий электропередач и вызывать потери электроэнергии, поэтому провода высоковольтных линий не должны быть слишком тонкими.

Коронный разряд применяется в электрофильтрах для очистки газов, при нанесении лакокрасочных и порошковых покрытий (электронно-ионные технологии).

Все описанные выше разряды возможны и при переменном напряжении на электродах. А при частотах электрического поля $10^7$ Гц и выше осуществление разрядов облегчается.

*Плазма* – это полностью или частично ионизированный, электрически нейтральный газ. Электрическая нейтральность означает, что число зарядов противоположных знаков в плазме одинаковое. Плазма подчиняется газовым законам, однако качественно отличается от газа, состоящего из нейтральных частиц.

Во-первых, между частицами плазмы существует кулоновское взаимодействие. Это означает, что взаимодействуют не только соседние частицы при столкновениях, а одновременно огромное их число.

Во-вторых, на плазму оказывают сильное влияние электрическое и магнитное поля.

Из-за этих отличий плазму считают четвертым агрегатным состоянием вещества. Плазма характеризуется степенью ионизации $\alpha$, под которой понимают отношение числа ионизированных атомов к полному их числу в единице объема. Различают слабо-, сильно- и полностью ионизированную плазму. Электропроводность сильно ионизированной плазмы сравнима с электропроводностью металлов. Например, плазма в дуговом разряде сильно ионизирована, и ее электропроводность превосходит электропроводность некоторых металлов.

В состоянии плазмы находится подавляющая часть вещества Вселенной. Горячие звезды, такие, как наше Солнце, состоят из полностью ионизированной плазмы. В космосе вокруг Земли плазма существует в виде солнечного ветра. Процессами в околоземной плазме объясняется возникновение магнитных бурь и полярных сияний.

Плазму используют при прямом превращении молекулярно-тепловой энергии в электрическую в магнитогидродинамических генераторах тока (МГД). С высокотемпературной плазмой связаны надежды на осуществление управляемого термоядерного синтеза.

*Катодные лучи* впервые наблюдал У. Крукс в 1879 г. При уменьшении давления в газоразрядных трубках до значений 1–0,1 Па длина свободного пробега электронов возрастает, и они без столкновений достигаю анода. Исчезает свечение газа, но стенки трубок начинают светиться зеленоватым светом. Однако природа этого явления была открыта французским физиком Ж. Перреном (1870–1942) только в 1895 г. Он установил, что свечение вызывает поток отрицательно заряженных частиц. Позже, после открытия в 1897 г. Дж.Дж. Томсоном электрона, было выяснено, что это поток электронов. Этот поток электронов и назвали катодными лучами. Многие твердые вещества под действием катодных лучей флюоресцируют. При этом разные вещества светятся только им присущим цветом. Явление получило название катодолюминесценции и нашло широкое применение (экраны телевизоров, осциллографов, мониторы первых компьютеров и т. п.). Катодные лучи возникают при бомбардировке катодов положительными ионами. Если в плоском катоде сделать маленькое отверстие, то в пространстве за катодом можно наблюдать слабо светящиеся пучки. Эти пучки, представляющие собой потоки положительных ионов, назвали каналовыми лучами. Изучение каналовых лучей внесло определенный вклад в создание современной теории строения вещества.

## 12.5. Вакуум. Электрический ток в вакуумном диоде. Зависимость тока насыщения от температуры. Использование диода. Вакуумный триод

**Вакуум. Электрический ток в вакуумном диоде.** Выше был рассмотрен случай, когда при уменьшении давления в газоразрядной трубке электроны от катода без столкновений достигают анода. Такая же ситуация может наблюдаться и с молекулами или ионами газа. Они также могут без столкновений пролетать от стенки к стенке сосуда, в котором находятся.

Состояние газа, при котором длина свободного пробега молекул или ионов сравнима или больше линейных размеров сосуда, в котором он находится, называют *вакуумом*.

Даже при давлениях в газе порядка $10^{-7}$–$10^{-6}$ Па, что соответствует высокому вакууму, концентрация молекул составляет $10^{14}$ м$^{-3}$. Эти молекулы не могут быть ионизированными, поскольку они не сталкиваются друг с другом. Для получения электрического тока в вакууме туда надо внести каким-то образом носители зарядов. Как правило, такими носителями являются электроны, а удобнее всего для изучения электрического тока в вакууме использовать электронные лампы, в частности *вакуумный диод* (рис. 234).

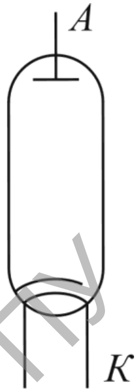

Рис. 234

В основе работы электронной лампы лежит явление термоэлектронной эмиссии, открытое американским изобретателем Т. Эдисоном (1847–1931) в 1883 г. Суть явления заключается в том, что при нагревании металла электроны приобретают кинетическую энергию, большую, чем работа их выхода из металлов. В вакуумном диоде имеется два электрода: катод и анод. Раскаленная металлическая нить является источником электронов и одновременно катодом. Нить расположена на оси металлического полого цилиндра, который является анодом. Электроды помещены в стеклянный или металлический баллон, давление в котором составляет $10^{-6}$–$10^{-5}$ Па. Чаще всего катод изготавливается из вольфрама, интенсивная электронная эмиссия из которого начинается при разогреве до 1700 K. Для уменьшения температуры накала катод покрывается слоем какого-либо вещества с небольшой работой выхода электронов. Например, изготовленные из никеля катоды покрывают оксидами щелочноземельных металлов ($BaO$, $SrO$ и т. д.). Эмиссия в таком случае наблюдается уже при температурах 500–600 K. На рис. 235 представлена электрическая схема для изучения зависимости силы термоэлектронного тока от разности потенциалов между анодом и катодом (анодного напряжения).

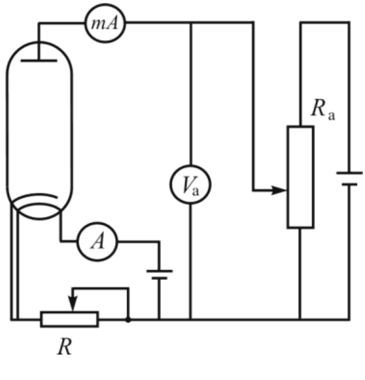

Рис. 235

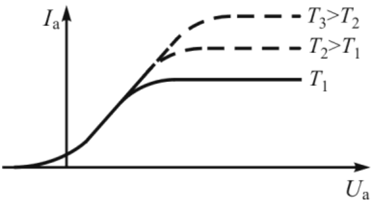


Рис. 236

В этой схеме реостат $R$ регулирует ток накала и, соответственно, температуру катода, $R_a$ – анодное напряжение, вольтметр $V_a$ измеряет анодное напряжение, а миллиамперметр $mA$ – анодный (термоэлектронный) ток. Ток в цепи отсутствует при холодном катоде, что естественно (холодный катод не эмитирует). Если катод раскален до определенной температуры $T_1$, то в цепи присутствует небольшой ток при отсутствии анодного напряжения и даже при небольшом его отрицательном значении (рис. 236).

Объяснить наличие такого тока можно тем, что начальная кинетическая энергия высвободившегося электрона оказывается достаточной для преодоления задерживающего электрического поля между катодом и анодом. При положительном значении потенциала на аноде величина термоэлектронного тока прямо пропорциональна анодному напряжению в степени $\frac{3}{2}$:

$$I = kU^{\frac{3}{2}}. \tag{12.24}$$

Формула (12.34) носит название *закона Богуславского – Ленгмюра* или *закона «трех вторых»*. С.А. Богуславский (1883–1923) – русский физик-теоретик, И. Ленгмюр (1881–1957) – американский физик и химик. Однако, начиная с некоторого значения анодного напряжения, закон «трех вторых» перестает выполняться. Сила тока достигает максимального значения и перестает изменяться. Горизонтальный участок зависимости $I = f \; U$ на рис. 236 говорит о том, что все электроны, вылетающие из катода при заданной температуре, достигают анода.

Максимальный термоэлектронный ток, возможный при данной температуре катода, называют *током насыщения*.

Если увеличить температуру катода до некоторого значения $T_2$, то увеличится и значение тока насыщения $I_S$.

**Зависимость тока насыщения от температуры.** Плотность термоэлектронного тока зависит от количества выпущенных катодом электронов согласно выражению

$$j = n_1 e\,, \tag{12.25}$$

где $n_1$ – количество электронов, испускаемых единицей площади поверхности катода в единицу времени, $e$ – заряд электрона.

Для определения $n_1$ рассмотрим кусок какого-либо металла, разогретого до некоторой температуры $T$ и помещенного в замкнутую емкость с той же температурой. С поверхности металла будут исходить электроны, и наоборот, часть электронов, находящихся за пределами металла, будут в процессе хаотичного теплового движения встречать поверхность и возвращаться в металл. В состоянии равновесия, когда число выпущенных электронов будет равно числу вернувшихся, над поверхностью металла будет существовать электронное облако. Скорость испускания электронов можно рассчитать из следующих соображений.

Поскольку тепловое движение электронов в облаке хаотичное, то из $\nu$ электронов, находящихся в единице объема электронного облака, одна третья часть движется перпендикулярно к поверхности металла. А из этой части половина движется к поверхности металла и половина – от поверхности. Поэтому если $\bar{\upsilon}$ – средняя скорость теплового движения электронов, то

$$n_1 = \frac{1}{6}\nu\bar{\upsilon}\,. \tag{12.26}$$

Концентрацию электронов в электронном облаке $\nu$ можно выразить через их концентрацию в металле $n_0$. Средняя энергия свободного электрона больше энергии электрона внутри металла на величину работы выхода, поэтому для определения зависимости $\nu$ $n_0$ можно использовать распределение Больцмана для молекул идеального газа, находящихся в силовом поле. Тогда

$$\nu = n_0 \exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right). \tag{12.27}$$

Подставив (12.26) и (12.27) в (12.25), получим:

$$j_n = \frac{1}{6}\nu\bar{\upsilon}e = \frac{1}{6}n_0\bar{\upsilon}e\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right). \tag{12.28}$$

Средняя скорость хаотичного движения электронов пропорциональна корню квадратному из температуры:

$$\bar{\upsilon} = C\sqrt{T}\ .$$

Тогда

$$j_n = \frac{1}{6}n_0 eC\sqrt{T}\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right). \tag{12.29}$$

Введем обозначение:

$$\frac{1}{6}n_0 eC = B \tag{12.30}$$

и подставим эту величину в (12.29):

$$j_n = B\sqrt{T}\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right). \tag{12.31}$$

Постоянная *B* зависит от $n_0$, поэтому ее значения для разных металлов различны. Формула (12.31) получена с использованием классической теории электропроводности металлов в 1901 г. английским физиком Ричардсоном (1879–1959) и носит его имя. В 1923 г. на основании квантовой теории электропроводности металлов Дешман получил выражение для тока насыщения:

$$j_n = AT^2\exp\left(-\frac{e\varphi}{kT}\right). \tag{12.32}$$

Разница между формулами (12.31) и (12.32) не является существенной, поскольку зависимость тока насыщения от температуры в основном определяется экспоненциальной функцией. В формуле Дешмана постоянная *A* не зависит от рода металла и равна:

$$A = 1{,}2\cdot 10^6\ \text{А/(м}^2\cdot\text{К}^2).$$

Однако опытные значения *A* для многих металлов не совпадают с теоретическим (например, для вольфрама $A = 0{,}6\cdot 10^6$ А/(м$^2$·К$^2$)).

Формула (12.32) позволяет определять работу выхода электронов из металлов. Разделив левую и правую части выражения на $T^2$ и прологарифмировав его, получим:

$$\ln\frac{j_n}{T^2} = \ln A - \frac{e\varphi}{kT}.$$

Строится экспериментальный график зависимости $\ln\frac{j_n}{T^2} = f\left(\frac{1}{T}\right)$ (рис. 237).

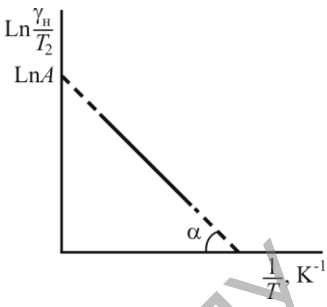


Рис. 237

По углу наклона прямой $\alpha$ можно определить работу выхода электрона из металла и коэффициент $A$. При $T \to \infty$ $\ln\frac{j_n}{T^2} = \ln A$.

**Использование диода.** Поскольку ток в цепи вакуумного диода возможен только тогда, когда катод соединен с отрицательным полюсом источника, его можно использовать в качестве выпрямителя переменного тока. Если на катод подать положительный потенциал, все электроны возвращаются внутрь катода и ток в лампе отсутствует. На рис. 238 представлена схема простейшего выпрямителя.

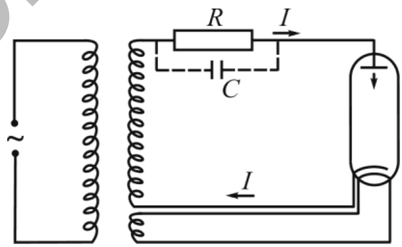


Рис. 238

Первичная обмотка трансформатора включена в сеть переменного тока. Одна из вторичных обмоток питает нить накала катода. Концы еще одной вторичной обмотки соединены с катодом и анодом лампы. Ток в цепи анода течет только в одну сторону.

В результате синусоидальный ток (рис. 239, *а*) превращается в пульсирующий (рис. 239, *б*). Если параллельно сопротивлению $R$ в схему включить конденсатор $C$, то пульсации можно сгладить, так как во время отсутствия тока в цепи конденсатор разряжается через сопротивление $R$ (рис. 239, *в*).

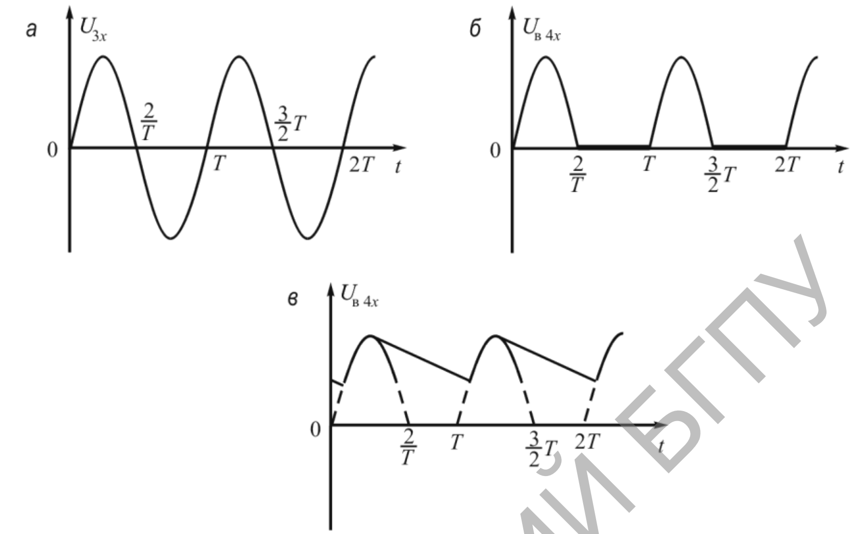


Рис. 239

**Вакуумный триод.** Если в двухэлектродной лампе между катодом и анодом поместить третий электрод, то получится лампа, которая называется *триодом*. Чаще всего третий электрод, называемый *управляющей сеткой* (или просто *сеткой*), размещается ближе к катоду. Его конструкция позволяет электронам беспрепятственно пролетать от катода к аноду. Схема подключения лампы в сеть представлена на рис. 240.

В отсутствие разности потенциалов между сеткой и катодом ($U_c = 0$) лампа работает, как обыкновенный диод. Если разность потенциалов между сеткой и катодом положительная ($U_c > 0$), то электроны ускоряются сеткой и анодный ток возрастает. Если разность потенциалов между сеткой и катодом отрицательная ($U_c < 0$), то анодный ток уменьшается и при определенном значении $U_c$ прекращается. В таком случае говорят, что лампа запирается. В общем случае

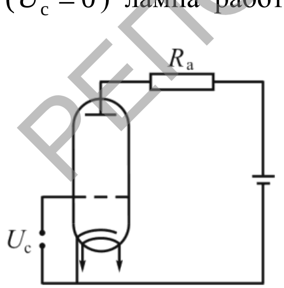


Рис. 240

анодный ток является функцией как анодного напряжения, так и сеточного $I_a = f(U_c, U_k)$.

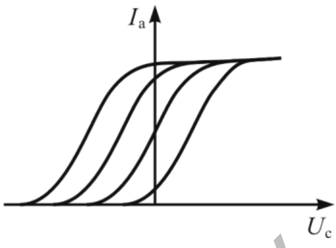


Рис. 241

Зависимость анодного тока от напряжения на управляющей сетке при определенном заданном напряжении на аноде называется *сеточной характеристикой триода*.

Система нескольких сеточных характеристик, соответствующих разным анодным напряжениям, называется *семейством сеточных характеристик триода*. На рис. 241 представлено семейство сеточных характеристик триода.

При повышении сеточного напряжения анодный ток возрастает. Чем больше анодное напряжение, тем больше анодный ток при одном и том же напряжении на сетке. На кривой зависимости $I_a = f(U_{ck})$ имеется достаточно большой участок, на котором сила анодного тока прямо пропорциональна напряжению на сетке. Это означает, что если на сетку лампы подавать напряжение, которое изменяется по произвольному закону и при этом его величина не выходит за пределы прямолинейного участка кривой, то и анодный ток изменяется по тому же закону.

Напряжение на анодной нагрузке $R_a$ равно:

$$U_R = I_a R_a. \tag{12.33}$$

Из равенства (12.33) следует, что напряжение на анодной нагрузке изменяется по тому же закону, что и сеточное, однако может превосходить его в разы. Следовательно, ламповый триод можно использовать в качестве усилителя напряжения. Во второй половине XX в. электронные лампы очень широко использовались для усиления и генерирования сигналов в радиотехнике, однако с развитием полупроводниковой элементной базы радиоэлектронной промышленности применение их значительно сократилось.