МЕТОДЫКА ВЫКЛАДАННЯ МАТЭМАТЫКІ

УДК 517.925:[378.147.091.32:517.1]

С. И. Василец,
кандидат физико-математических наук,
заведующий кафедрой математического анализа БГПУ;
И. В. Кирюшин,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математического анализа БГПУ

ИЗУЧЕНИЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА НА ИНТЕГРАЦИОННОЙ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Введение. Раздельное изучение физических и математических дисциплин при подготовке физиков и инженеров формирует соответствующие знания, умения и навыки, так же существующие отдельно друг от друга. Они позволяют решать лишь относительно простые практические задачи, а решение сложных задач требует интеграции частных знаний и умений в сложные психологические образования – компетенции. Следовательно, предметное структурирование содержания образовательных программ противоречит деятельностному определению их целей [1, с. 7]. Перспективы разрешения данного противоречия, на наш взгляд, открываются на пути развития межпредметной интеграции, в частности интеграции математики и физики в курсах математических дисциплин, через проблемное обучение. Вопросы организационно-методического обеспечения реализации интеграции теории и практики в обучении для повышения качества математической подготовки студентов были рассмотрены в монографии [2].

Анализ работ по формированию интеграционных (межпредметных) связей математики и физики в обучении математическому анализу студентов физических специальностей вузов (Н. А. Байгазова, В. Р. Беломестнова, Л. В. Васяк, М. Л. Груздева, В. А. Далингер, О. Г. Князева, С. Х. Мухаметдинова, Т. И. Федотова, В. А. Шершнева и др.) показал, что интеграцией охвачен, в основном, уровень практики математики (решение прикладных задач). Было доказано, что межпредметные связи обеспечивают рост мотивации студентов к изучению анализа, формирование навыков математического моделирования и повышение успеваемости по предмету. Интеграция на уровне математической теории выражена еще слабо, хотя именно теоретический курс обеспечивает формирование теоретического мышления, приобретение глубоких математических знаний и является основой успешной практики.

В свою очередь, проблемное обучение (С. Л. Рубинштейн, А. В. Брушлинский, Т. В. Кудрявцев, И. Я. Лернер, А. М. Матюшкин, М. И. Махмутов, В. Оконь, М. Н. Скаткин и др.) повышает познавательную активность и развивает творческое мышление, в которых так остро нуждается современный специалист. В вузе проблемная лекция относится к системе контекстного обучения, приближающего результаты учебы к потребностям профессиональной практики [3, с. 129, 136].

В этой связи *цель статьи* – создание методических основ межпредметной интеграции и проблемного обучения при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в теоретическом курсе математического анализа при подготовке инженеров и физиков. Для этого потребовалось: 1) разработать алгоритм введения понятия о математическом методе на основе решения задач интеграционного (физического) содержания на лекции проблемного типа по математике и 2) конкретизировать этот алгоритм при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Алгоритм введения понятия о математическом методе. В результате проведенных теоретических и экспериментальных исследований нами был создан алгоритм решения задач интеграционного содержания, позволяющий вводить понятие о математическом методе на проблемной лекции по математике. При этом мы отталкивались от методики лекции проблемного типа, обоснованной А. А. Вербицким [4, с. 103]. Алгоритм состоит из семи основных этапов: 1) описание физического явления (структуры) на языке физики и постановка физической задачи, решение которой требует нового математического метода (при этом лучше использовать несколько физических задач); 2) построение математической модели физического явления и выполнение такого ее преобразования, которое обнажило бы противоречия и позволило затем перейти к проблемной ситуации; 3) переход к проблемной ситуации, обычно связанной с противоречием между: а) усвоенными знаниями и новыми требованиями или фактами, б) теоретически возможным способом решения задачи и его практической нецелесообразностью или в) усвоенными знаниями и новыми условиями их использования; 4) задание студентам проблемных и информационных вопросов, выдвижение гипотез, совместный с ними поиск путей решения проблемы; 5) переход общего вида к математическому выражению, ведущему непосредственно к решению любой задачи данного типа; 6) фиксация выделенного перехода в качестве отдельного математического метода; 7) вскрытие таких свойств данного метода, благодаря которым находится способ решения физической задачи. Далее решаются аналогичные задачи, выполняется обобщение и даются развернутые математические определения.

Проблемными называют такие вопросы, которые «указывают на существо учебной проблемы и на область поиска неизвестного проблемной ситуации. Проблемные вопросы как бы направлены в будущее... Информационные вопросы ставятся с целью актуализировать уже имеющиеся у студентов знания, необходимые для понимания существа проблемы и начала умственной работы по ее разрешению. Информационные вопросы как бы направлены в прошлое...» [4, с. 109].

1. Уравнения с разделяющимися переменными. Сначала по алгоритму разбираем на лекции задачу. 1. Тело температуры T_0 в момент времени $t=0$ поместили в среду с постоянной температурой T_c ($T_0 > T_c$), и оно стало охлаждаться. Найдите закон зависимости температуры тела T от времени, если скорость его охлаждения прямо пропорциональна разности температур тела и среды. 2. Скорость охлаждения равна

$$T'(t) = -k\left(T(t) - T_c\right),$$

или (1)

$$dT = -k\left(T - T_c\right)dt,$$

где k – коэффициент. 3. Следовательно, мы знаем изменение $dT(t)$ температуры за *бесконечно малый* промежуток dt в любой момент времени. Но мы не знаем пока, насколько понизится температура тела за *конечный* промежуток времени: функция $T'(t) = f(T)$ известна, а функция $T = T(t)$ – нет. Проблемная ситуация связана с противоречием между усвоенными знаниями и новыми требованиями. 4. *Проблемные вопросы*: можно ли, зная зависимость $T'(t) = f(T)$, найти функцию $T = T(t)$? Можно ли по углу наклона касательной к графику функции $T = T(t)$ в каждой точке области ее определения найти вид этого графика? Какая математическая операция суммирования бесконечно малых величин вам известна? *Информационные вопросы*: каков геометрический смысл производной и дифференциала? В каких пределах может изменяться угол наклона касательной к графику функции в точке? Что такое интегральная сумма? 5. Запишем исходное уравнение в виде: $dT/\left(T - T_c\right) = -kdt$. 6. Назовем эту операцию разделением переменных T и t, а исходное выражение – дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными. 7. Чтобы получить решение, суммируем соответствующие бесконечно малые величины, то есть проинтегрируем последнее уравнение:

$$\int_{T_0}^{T} \frac{dT}{T - T_c} = -k\int_0^t dt,$$

откуда (2)

$$T(t) = T_c + \left(T_0 - T_c\right)e^{-kt}.$$

В аналогичном порядке рассматриваем две другие задачи. 1. *Определите мгновенное значение силы тока $I(t)$ в момент времени t после замыкания электрической цепи с индуктивностью L, если приложенное к ней напряжение равно U, а полное сопро-*

тивление цепи равно R. Отметим, что закон Ома для этой цепи имеет вид:

$$I(t)R = U - LdI(t)/dt,$$

где $(-LdI(t)/dt)$ – электродвижущая сила самоиндукции. 2. *Парашютист, масса которого со снаряжением составляет m = 100 кг, делает затяжной прыжок с начальной скоростью $v_0 = 0$. Найдите зависимость скорости $v(t)$ от времени t, если сила сопротивления воздуха прямо пропорциональна скорости падения: $F_c = -kv$, где $k = 20$ (кг/с). Установите максимальную скорость парашютиста.* Здесь из второго закона Ньютона получим уравнение для неизвестной функции $v(t)$: $mdv(t)/dt = mg - kv(t)$, где $g = 9{,}8$ (м/с^2). Максимальное значение скорости $v_{\max} = mg/k$ составляет 50 м/с. Наконец, после разбора всех задач проводим обобщение и вводим формальное понятие дифференциального уравнения и метод разделения переменных.

2. Линейные уравнения. Рассматриваем на лекции задачу. 1. Тело температуры T_0 поместили в среду, температура T_c которой зависит от времени *t* по закону

$$T_c(t) = T_0 \exp(-\alpha t),$$

где α – постоянная (α > 0). Найдите температуру тела *T*(*t*) в произвольный момент времени, если скорость охлаждения тела прямо пропорциональна разности $T - T_c$. 2. Из условия задачи получим:

$$dT(t)/dt + kT(t) = kT_c(t). \qquad (3)$$

Если бы температура среды T_c не зависела от времени, то уравнение легко решилось бы методом разделения переменных (см. выражение (2)). 3. Возникла проблемная ситуация, связанная с противоречием между усвоенными знаниями и новыми требованиями: известно, как решить уравнение вида (1), но не ясно, как решить уравнение (3) с правой частью, зависящей от *t*. 4. *Проблемные вопросы*. Решение уравнения (3) с правой частью, равной некоторому числу, зависит от времени как $T = Ce^{-kt}$, где $C = T_0 - T_c$ – постоянная. Если же температура среды от времени зависеть будет ($T_c = T_c(t)$), можно ли предположить, что от времени станет зависеть и множитель *C*, то есть зависимость от времени усложнится? Иначе говоря, можно ли записать общее решение в виде $T = C(t)e^{-kt}$? *Информационные вопросы*: чему равна производная произведения функций $u(x)v(x)$? производная функции от функции, например $f(g(t))$? 5. Ищем решение уравнения (3) в виде $T(t) = C(t)e^{-kt}$. 6. Назовем этот подход методом *вариации постоянной*, а уравнение (3) – линейным дифференциальным уравнением. 7. Подставим последнее выражение в уравнение (3):

$$C'(t) = kT_c(t)\exp(kT),$$

а значит,

$$C(t) = \frac{kT_0 e^{(k-\alpha)t}}{(k-\alpha)} + C_1 \ (C_1 \text{ – постоянная}).$$

Тогда:

$$T(t) = C(t)e^{-kt} = kT_0 e^{(k-\alpha)t} / (k-\alpha) + C_1 e^{-kt}.$$

Найденное решение состоит из двух слагаемых: второе является *общим* решением *однородного* уравнения, а первое – *частным* решением *неоднородного* уравнения (3). C_1 определим из начального условия: $T(0) = T_0$, что дает: $C_1 = -\alpha T_0/(k-\alpha)$.

В таком же порядке решаем другую задачу. *Определите мгновенное значение силы тока I после замыкания электрической цепи, содержащей индуктивность L, если полное сопротивление цепи равно R, а приложенное внешнее напряжение зависит от времени t по закону $U = U_0 \exp(-\alpha t)$, где α, U_0 – постоянные ($\alpha, U_0 > 0$). В начальный момент времени $I(0) = 0$.* После замыкания цепи в ней кроме внешнего напряжения *U* действует электродвижущая сила самоиндукции, препятствующая нарастанию тока и равная $(-LdI/dt)$. Тогда по закону Ома получим:

$$IR = U - LdI/dt.$$

Решение ищем в виде:

$$I(t) = C(t)\exp(-Rt/L).$$

Найдем, что

$$I(t) = U_0 e^{-\alpha t}/(R-\alpha L) + C_1 e^{-Rt/L},$$

где $C_1 = -U_0/(R-\alpha L)$ (из начального условия).

Далее проводим обобщение материала и вводим формально метод вариации постоянной. Заметим, что в условии двух последних задач вместо экспоненциальной функции можно использовать зависимости вида αt или $\sin\alpha t$, однако при этом вычисление интеграла несколько усложнится.

3. Уравнения с однородной правой частью. Решаем задачу из геометрической оптики.

1. Найдите форму зеркала, отражающего все лучи, выходящие из точки *O*, параллельно заданному направлению *Ox*.

2. Начало системы координат *Oxy* поместим в точку *O*. Пусть луч падает на зер-

кало в произвольной точке $M(x,y)$. Рассмотрим сечение зеркала плоскостью Oxy, проходящей через точку M (рисунок). Проведем касательную AM к линии l сечения поверхности зеркала в точке M. Поскольку угол падения β (между отрезком OM и перпендикуляром QM к AM в точке M) равен углу отражения, то треугольник AOM – равнобедренный, и

$$\mathrm{tg}\,\alpha = y' = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}. \qquad (4)$$

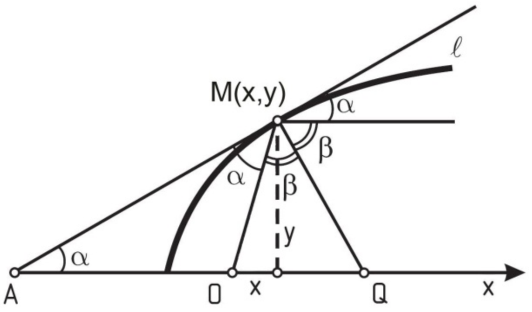

Рисунок – К определению формы зеркала

3. Переходим к проблемной ситуации, вызванной противоречием между усвоенными знаниями и новыми требованиями: полученное уравнение не решается уже известными студентам способами.

4. *Проблемные вопросы*: какая особенность данного уравнения бросается в глаза? Можно ли для решения воспользоваться тем, что степень y в числителе равна степени x и y в знаменателе правой части (и равна единице)? Если для упрощения разделить и числитель, и знаменатель на переменную x (в той же первой степени), а затем ввести обозначение $y/x = u$? *Информационные вопросы*: чему равна производная произведения двух функций одного аргумента? Что такое разделение переменных? В чем суть метода подстановки при интегрировании? Какие свойства логарифма вы знаете?

5. Разделим и числитель, и знаменатель правой части уравнения (4) на x и введем новую переменную:

$$y/x = u;$$
$$y' = (ux)' = u'x + u.$$

Тогда получим: $u'x + u = \dfrac{u}{1+\sqrt{1+u^2}}$.

6. Назовем уравнение (4) дифференциальным уравнением с однородной правой частью (первой степени однородности), а замену $y/x = u$ отнесем к обыкновенному способу его решения.

7) Разделение переменных и упрощение дает: $du\big/u\sqrt{1+u^2} + du/u = -dx/x$. Интегрируем с помощью подстановки $\sqrt{1+u^2} = p$:

$$\int du\big/u\sqrt{1+u^2} = 0{,}5\cdot\ln\left|(p-1)/(p+1)\right|.$$

После простых преобразований получим (C – произвольная постоянная):

$$\ln(p-1) = \ln\left(C/|x|\right)$$

и, следовательно,

$$\sqrt{x^2+y^2} = x + C\text{, или } y^2 = 2Cx + C^2$$

(семейство парабол).

Затем вводим обобщенное понятие однородного дифференциального уравнения и метод замены для его решения.

4. Уравнения в полных дифференциалах. Можно разобрать следующую задачу.

1. Дано плоское электрическое поле с потенциалом $\varphi = \varphi(x,y)$. Кривая $\varphi(x,y) = C$ называется эквипотенциальной кривой (C – произвольная постоянная) и для точек на ней $d\varphi(x,y) = 0$. Пусть теперь эквипотенциальные кривые определяются уравнением (k – постоянная)

$$\frac{kxdx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{kydy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = 0. \qquad (5)$$

Найдите потенциал $\varphi(x,y)$ и представление вида $\varphi(x,y) = C$ указанных кривых.

2. Проверим, является ли левая часть уравнения (5) полным дифференциалом $d\varphi(x,y)$. Введем обозначения:

$$kx/\left(x^2+y^2\right)^{3/2} = M(x,y),$$
$$ky/\left(x^2+y^2\right)^{3/2} = N(x,y).$$

Для того чтобы выражение

$$M(x,y)dx + N(x,y)dx$$

было полным дифференциалом, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось:

$$\partial M(x,y)/\partial y = \partial N(x,y)/\partial x.$$

Показываем, что это условие истинно, и, следовательно,

$$d\varphi(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy =$$

$$= \frac{kxdx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} + \frac{kydy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = M(x,y), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = N(x,y).$$

3. Проблемная ситуация связывается с противоречием между усвоенными знаниями и новыми требованиями: известен

полный дифференциал функции, но нет алгоритма для вычисления самой функции.

4) *Проблемные вопросы*. Как находят функцию по ее дифференциалу в случае зависимости от одной переменной? При вычислении частной производной функции двух переменных другая переменная величина рассматривается как постоянная. Можно ли этот прием применить и при интегрировании уравнений (6) для вычисления $\varphi(x,y)$? Может ли при этом постоянная интегрирования зависеть не от той переменной, по которой ведется интегрирование, а от другой? Чему может быть равен интеграл первого из уравнений (6)? Второго? Что можно предпринять затем? *Информационный вопрос*: чему равна производная от неопределенного интеграла по переменной интегрирования?

5) Интегрируем первое из уравнений (6):

$$\varphi(x,y)=\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx=\int\frac{kxdx}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=$$

$$=-\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}+C(y).$$

Подставим полученное выражение для $\varphi(x,y)$ во второе из уравнений (6):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2}}+C'(y)=$$

$$=\frac{ky}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}+C'(y)=N(x,y).$$

Следовательно, $C'(y)=0$ и $C(y)=C_1$, где C_1 – произвольная постоянная.

6) Отнесем уравнение (5) к уравнениям в *полных дифференциалах*, а представленную в п. 5 основную последовательность действий – к обыкновенному способу его решения.

7) Таким образом, потенциал равен $\varphi(x,y)=-k/\sqrt{x^2+y^2}+C_1$. С точностью до величины C_1 это выражение совпадает с потенциалом точечного заряда. Уравнение эквипотенциальных кривых $\varphi(x,y)=C$ примет вид:

$$k/\sqrt{x^2+y^2}=C_1-C=C_2,$$

или $$x^2+y^2=\left(k/C_2\right)^2=C_3$$

(семейство окружностей).

Для введения понятия о методе интегрирующего множителя: 1) рассмотрим задачу о параболическом зеркале, которая решалась выше; 2) получив уравнение (4), освободимся от иррациональности в знаменателе и представим его в виде:

$$xdx+ydy=\sqrt{x^2+y^2}dx\,; \qquad (7)$$

3) проблемная ситуация вызвана противоречием между имеющимися знаниями и новыми требованиями: легко видеть, что выражение слева от знака равенства в последнем уравнении есть полный дифференциал (функции $x^2/2+y^2/2$), который интегрируется легко, но найти интеграл от правой части уравнения не так просто.

4) *Проблемный вопрос*: как преобразовать уравнение (7), на какое выражение его следует умножить, чтобы новое уравнение решалось достаточно легко? При этом правая часть должна стать как можно более простой. *Информационные вопросы*: что необходимо учитывать при умножении уравнения на какой-либо множитель с точки зрения области определения уравнения и числа решений? Чему равен интеграл полного дифференциала $\int df(x,y)$? Чему равен интеграл $\int dx$?

5) Умножим уравнение (7) на $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$:

$$\frac{xdx}{\sqrt{x^2+y^2}}+\frac{ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=dx\,. \qquad (8)$$

В точке $(0;0)$ знаменатель нашего множителя обращается в нуль, поэтому проверяем, не является ли она решением уравнения (7). Наконец, легко убедиться, что левая часть уравнения (8) есть полный дифференциал.

6) Множитель $1/\sqrt{x^2+y^2}$ называется *интегрирующим множителем*. Подчеркнем, что, вообще, умножение на интегрирующий множитель может привести к появлению лишних решений, которые обращают его в нуль.

7) Интегрируя уравнение (8), находим:

$$\sqrt{x^2+y^2}=x+C\ \ (C=const),$$

или

$$y^2=2Cx+C^2.$$

Отмечаем, что точка $(0;0)$ в полученное решение входит. Затем вводим формальное определение интегрирующего множителя.

5. Уравнение Бернулли. Разбираем задачу по алгоритму.

1) Тело массы m движется в газовой среде, сила сопротивления которой равна $\alpha v+\beta v^n$, где v – скорость тела, $\alpha,\beta,n=\mathrm{const}$. Найдите зависимость скорости от времени, если в момент времени $t=0$ скорость равна v_0.

2. По второму закону Ньютона (уравнение движения): $mv_t' = -\alpha v - \beta v^n$,

$$dv / dt + (\alpha / m) v = -(\beta / m) v^n, \qquad (9)$$

$$v^{-n} dv / dt + (\alpha / m) v^{1-n} = -\beta / m. \qquad (10)$$

3. Переходим к проблемной ситуации, связанной с противоречием между усвоенными знаниями и новыми требованиями: уравнение не решается уже известными способами.

4. *Проблемные вопросы*: как преобразовать уравнение (10), какую ввести замену переменной, чтобы свести его к известному типу? Какая замена лучше: $v^{-n} = z$ или $v^{1-n} = z$? *Информационные вопросы*: чему равны производные от этих двух выражений по переменной *t*? Как обычно решается линейное дифференциальное уравнение?

5. Используем замену: $v^{1-n} = z$. Тогда

$$(1-n) v^{-n} v_t' = z_t'$$

и, следовательно,

$$dz / dt - (n-1)(\alpha z + \beta) / m = 0.$$

Взамен уравнения (10) мы получили линейное однородное уравнение.

6. Уравнение (9) является уравнением Бернулли, а замена $v^{1-n} = z$ относится к обыкновенному способу его решения.

7. Разделяя переменные в последнем уравнении, найдем решение задачи, для которой было получено уравнение Бернулли.

Заключение. Таким образом, 1) нами предложен алгоритм введения понятия о математическом методе на интеграционной лекции проблемного характера по математике, опирающийся на решение физико-технических задач; 2) алгоритм конкретизирован применительно к изучению методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Можно полагать, что предложенная методика создает условия для усиления интереса к содержанию математики и роста профессиональной мотивации, для глубокого, творческого усвоения будущими инженерами и физиками теоретических знаний в области математики, развития теоретического мышления, а также для приобретения умений и навыков математического моделирования, связанных с компетенциями по специальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Методические рекомендации по разработке и реализации на основе деятельностно-компетентностного подхода образовательных программ ВПО, ориентированных на ФГОС третьего поколения / Т. П. Афанасьева [и др.]. – М. : МГУ, 2007. – 96 с.
2. *Бровка, Н. В.* Интеграция теории и практики обучения математике как средство повышения качества подготовки студентов / Н. В. Бровка. – Минск : БГУ, 2009. 243 с.
3. *Вербицкий, А. А.* Личностный и компетентностный подходы в образовании: проблемы интеграции / А. А. Вербицкий, О. Г. Ларионова. – М. : Логос, 2011. – 336 с.
4. *Вербицкий, А. А.* Активное обучение в высшей школе: контекстный подход: метод. пособие / А. А. Вербицкий. – М. : Высшая школа, 1991. – 207 с.

SUMMARY

For the first time, the technique of the introduction of a new concept is proposed. For the solution of ordinary differential simple equations at an the integrative problem lecture on mathematical analysis. The technique based on the material of phisical tasks and the authors algorithm: 1)the description of physical phenomenon; 2) the construction of a mathematical model and its transformation modification of it; 3) the actualization of a problem situation; 4) the statement of problem and of information questions joint, problem-solving search together with the students; 5) the transformation of a general model; 6) its fixation as the method of solution solving; 7) detection of the properties that allow to solve the problem. The proposed technique is assumed to make conditions for creative assimilation of the notions of ordinary differential simple equations by the students of physical and engineering specialities, the development of theoretical thinking and acquisition of the skill habits in mathematical modeling which are connected with competencies on the specialties.

Поступила в редакцию 15.05.2014 г.