

УДК 517.93

Е. И. Федорако,старший преподаватель кафедры
«Высшая математика № 3» БНТУ**НЕПРЕРЫВНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ЗАДАННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

Известно, что дифференциальные уравнения интегрируются в квадратурах лишь в исключительных случаях. Поэтому для исследования свойств их решений применяются методы аналитической и качественной теории, а также численные и приближенные методы.

Два первых метода дают общую характеристику решений целого класса дифференциальных уравнений, но не всегда эффективно применимы к каждому конкретному уравнению. Иногда для исследования вполне заданного уравнения приходится создавать собственный метод, как, например, в [1].

Численные и приближенные методы позволяют получить свойства конкретных решений конкретного уравнения, но, чаще всего, не позволяют судить о виде общего решения и о решениях уравнений, структурно близких к исследуемым.

Целью настоящей работы является демонстрация на конкретных задачах возможностей методов групп непрерывных преобразований, описанных в [2]. Эти методы позволяют построить однопараметрическое семейство решений по одному известному (найденному аналитически, численно или приближенно) решению уравнения и, в некоторых случаях, общее решение исследуемого уравнения, а также установить связь между решениями разных уравнений, как это сделано в [3] и [4].

Предложение 1. Важное в приложениях уравнение

$$y'' + \alpha y' + 8e^y + 2\alpha^2 = 0 \quad (1)$$

(α – постоянная), являющееся частным случаем уравнения сверхизлучательной лавины, допускает двухпараметрическую группу преобразований

$$x^* = -\frac{1}{\alpha} \ln |C_1 + \exp(-\alpha(x + C_2))|,$$

$$y^* = y + 2\alpha(x + C_2) + 2 \ln |C_1 + \exp(-\alpha(x + C_2))|,$$

где C_1 и C_2 – произвольные константы.

Если $y_1(x)$ – частное решение уравнения (1), то его общее решение имеет вид

$$y = -2\alpha(x + C_2) - 2 \ln |C_1 + \exp(-\alpha(x - C_2))| + \\ + y_1 \left(-\frac{1}{\alpha} \ln |C_1 + \exp(-\alpha(x + C_2))| \right).$$

Предложение 2. Дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + f(x)y' + Ke^y + F(x) = 0$$

(K – постоянная) допускает два преобразования переменных:

а) при условии, что $f(x) = \alpha$, $F(x) = \gamma$,

где α и γ – константы

$$x^* = x + c,$$

$$y^* = y + c_1,$$

$$z^* = z,$$

б) для произвольных функций $f(x)$ и $F(x)$

$$x^* = x,$$

$$y^* = y + c,$$

$$z^* = z.$$

Таким образом, доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если $y_1(x)$ – решение уравнения

$$y'' + \alpha y' + Ke^y + \gamma = 0,$$

то уравнение

$$y'' + \alpha y' + K\mu e^y + \gamma = 0$$

имеет семейство решений $y = y_1(x + c) - \ln \mu$, где c – произвольная постоянная.

Теорема 2. Если $y_1(x)$ – решение уравнения

$$y'' + f(x)y' + Ke^y + F(x) = 0,$$

то уравнение

$$y'' + f(x)y' + K\mu e^y + F(x) = 0$$

имеет решение $y = y_1(x) - \ln \mu$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y_{xx} + f(x, z)y_x + \Phi(y, z) + F(x, z) = 0 \quad (2)$$

с непрерывно дифференцируемыми по своим аргументам функциями f , Φ и F , где $y = y(x, z)$ – неизвестная функция переменных x и z .

Это уравнение является естественным обобщением уравнений, исследованных в [4] и [5] методами группового анализа. Знание непрерывной группы преобразований, допускаемой уравнением, позволяет по одному решению уравнения построить однопараметрическую группу решений и, в некоторых случаях, общее решение. Метод исследования, примененный в [4], оказался эффективным только в случае $\Phi(y, z) = K \exp(\mu y)$, где K и μ – константы.

Цель данной работы – показать, что уравнение (2) может допускать непрерывную группу преобразований и при других специализациях функций $f(x, z)$, $\Phi(y, z)$ и $F(x, z)$.

Следуя [6], будем искать инфинитезимальный оператор группы, допускаемой данной системой, в виде

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial y}.$$

Так как (2) является дифференциальным уравнением второго порядка, то будем действовать на него оператором группы продолженных преобразований X_2 , который имеет вид

$$X_2 = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial z} + \eta \frac{\partial}{\partial y} + \zeta_1 \frac{\partial}{\partial y'_x} + \zeta_2 \frac{\partial}{\partial y'_z} + \zeta_{11} \frac{\partial}{\partial y''_{xx}},$$

где

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \eta_x + y_x \eta_y - y_x \xi_x^1 - y_x^2 \xi_y^1 - y_z \xi_x^2 - y_x y_z \xi_y^2, \\ \zeta_{11} &= \eta_{xx} + 2y_x \eta_y + y_{xx} \eta_y + y_x^2 \eta_{yy} - 2y_{xx} \xi_x^1 - \\ &- y_x \xi_{xx}^1 - 2y_x^2 \xi_{xy}^1 - 3y_x y_{xx} \xi_y^1 - y_x^3 \xi_{yy}^1 - 2y_{xz} \xi_x^2 - \\ &- y_z \xi_{xx}^2 - 2y_x y_z \xi_{xy}^2 - \xi_y^2 (y_z y_{xx} + 2y_x y_{zx}) - y_x^2 y_z \xi_{yy}^2. \end{aligned}$$

В результате действия оператором X_2 на уравнение (2), получим следующее определяющее уравнение:

$$\xi^1 (f_x y_x + F_x) + \xi^2 (f_z y_x + \Phi_z + F_z) + \eta \Phi_y + \zeta_1 f + \zeta_{11} = 0. \quad (3)$$

Подставив в уравнение (3) значения ζ_1 ; ζ_{11} и y'' из уравнения (2), имеем

$$\begin{aligned} &\xi^1 (f_x y_x + F_x) + \xi^2 (f_z y_x + \Phi_z + F_z) + \eta \Phi_y + \\ &+ f (\eta_x + y_x \eta_y - y_x \xi_x^1 - y_x^2 \xi_y^1 - y_z \xi_x^2 - y_x y_z \xi_y^2) + \\ &+ \eta_{xx} + 2y_x \eta_y - \eta_y (f_y x + F + \Phi) + y_x^2 \eta_{yy} + \\ &+ 2\xi_x^1 (f_y x + F + \Phi) - y_x \xi_{xx}^1 - 2y_x^2 \xi_{xy}^1 + \\ &+ 3y_x \zeta_{11} (f_y x + F + \Phi) - y_x^3 \xi_{yy}^1 - 2y_{xz} \xi_x^2 - y_z \xi_{xx}^2 - \\ &- 2y_x y_z \xi_{xy}^2 - \xi_y^2 (2y_x y_{xz} - y_z (f_y x + F + \Phi)) - \\ &- y_x^2 y_z \xi_{yy}^2 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Приравнявая к нулю коэффициенты при переменных y_x^3 , y_x^2 , $y_x y_z$, $y_x y_z$, $y_x y_{xz}$, y_{xz} ,

y_x , y_z и свободный член уравнения (4), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \xi_{yy}^1 = 0, \\ \xi_x^2 = 0, \\ \xi_y^2 = 0, \\ 2\xi_y^1 f + \eta_{yy} - 2\xi_{xy}^1 = 0, \\ \xi^1 f_x + \xi^2 f_z + f \xi_x^1 + 2\eta_{xy} - \xi_{xx}^1 + 3\xi_y^1 (F + \Phi) = 0, \\ f \xi_x^2 + \xi_{xx}^2 - \xi_y^2 (F + \Phi) = 0, \\ \xi^1 F_x + \xi^2 \Phi_z + \xi_2 F_z + \eta \Phi_y + f \eta_x + \\ + \eta_{xx} - \eta_y (F + \Phi) + 2\xi_x^1 (F + \Phi) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Из первых трех уравнений системы получаем, что

$$\begin{aligned} \xi^1 &= A^1(x, z)y + B^1(x, z), \\ \xi^2 &= A^2(z). \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что функция ξ^2 обращает шестое уравнение системы (5) в тождество. Подставив ξ^1 и ξ^2 в четвертое из уравнений системы, имеем

$$2fA^1(x, z) + \eta_{yy} - 2A^1_x(x, z) = 0,$$

одним из решений которого, очевидно, является функция

$$\eta = A^3(x, z)y + B^3(x, z). \quad (7)$$

Подставив полученные значения ξ^1 , ξ^2 и η в пятое и седьмое из уравнений системы (5), получим

$$\begin{aligned} &A^2 f_z + f_x A^1 y + f_x B^1 + f^2 A^1 y + f B^1_x + 2A^3_x - \\ &- f_x A^1 y - f^2 A^1 y - B^1_{xx} + 3A^1 f + 3A^1 \Phi = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

и

$$\begin{aligned} &(A^1 y + B^1) F_x + A^1 (F_z + \Phi_z) + \\ &+ \Phi_y (A^3 y + B^3) + f (A^3_x y + B^3_x) + \\ &+ A^3_{xx} y + B^3_{xx} - A^3 (F + \Phi) + \\ &+ 2(A^1_x y + B^1_x) (F + \Phi) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Теорема. Дифференциальное уравнение (2) допускает группу непрерывных по параметру преобразований тогда и только тогда, когда одновременно выполняются соотношения (8) и (9). При этом можно найти функции ξ^1 , ξ^2 и η , обеспечивающие существование такого преобразования переменных, относительно которого будет инвариантно дифференциальное уравнение (2).

Покажем, что множество решений системы уравнений (8) и (9) не пусто. Положим $A^1 = B^1 = A^3 = 0$, тогда $\xi^1 = \eta_y = 0$ и система уравнений (8) и (9) примет вид:

$$\begin{cases} A^2 f_z = 0, \\ B^3 \Phi_y + B^3_x + B^3_{xx} = 0. \end{cases}$$

Полученные соотношения, например, будут верны при выполнении следующих условий: $f(x, z) = f(x)$, $\eta = B^3(z)$, $\Phi(y, z) = \Phi(z)$.

Таким образом, окончательно имеем, что $\xi^1 = 0$, $\xi^2 = A^2(z)$, $\eta = B^3(z)$. В частности, можно положить $\xi^2 = \eta = \text{const.}$

Тогда уравнение (2) инвариантно относительно преобразования

$$\begin{aligned}x^* &= x, \\z^* &= z + C_1, \\y^* &= y + C_2,\end{aligned}\quad (10)$$

где C_1 и C_2 – параметры.

Впрочем, последнее легко проверяется непосредственно по виду уравнения.

Таким образом, с использованием теории групп непрерывных преобразований, показано, что рассмотренное уравнение (2), описывающее при определенных специализациях функций $f(x, z)$, $\Phi(y, z)$ и $F(x, z)$ конкретные физические процессы, допускает непрерывное по произвольным параметрам преобразование переменных (10) при выполнении соотношений (8) и (9).

Существование такой группы позволяет по одному решению уравнения построить двухпараметрическую группу решений и, в некоторых случаях, общее решение.

Так, например, используя соотношение (10), можно утверждать, что если функция $y = y(x, z)$ является решением уравнения (2), то и любая функция вида

$$y^* = y(x, z + C_1) + C_2,$$

где C_1 и C_2 – параметры, – также решение данного уравнения.

Решение $y = y(x, z)$ можно получить, например, с использованием численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Еругин, Н. П. Проблема Римана / Н. П. Еругин. – М. : Наука и техника, 1982. – 336 с.
2. Ибрагимов, Н. Х. Группы преобразований в математической физике / Н. Х. Ибрагимов. – М. : Знание, 1982. – 279 с.
3. Самодуров, А. А. О связи уравнения Лиувилля с уравнением сверхизлучательной лавины / А. А. Самодуров // Дифференциальные уравнения. – 1989. – № 2. – С. 337.
4. Самодуров, А. А. О решениях одного уравнения нелинейной оптики / А. А. Самодуров, В. М. Чудновский // Дифференциальные уравнения. – 1987. – № 5. – С. 911–913.
5. Самодуров, А. А. О связи между решениями двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка / А. А. Самодуров, Е. И. Федорако // Доклады БГУИР. – 2011. – № 8(62). – С. 5–8.
6. Ибрагимов, Н. Х. Азбука группового анализа / Н. Х. Ибрагимов // Математика. Кибернетика. М. : Знание, 1989. – № 8. – 47с.

SUMMARY

Different methods of the research and solutions of differential equations exist. The method of the continuous transformation groups is one of them. It allows, for example, to construct the family of solutions using a single solution of the differential equation.

In this article the author provides an analysis of the nonlinear differential equation. The conditions of the existence of the symmetry of solutions are obtained. The solutions of equations are constructed.

Поступила в редакцию 25.09.2014 г.