ПОДГОТОВКА СЛУШАТЕЛЕЙ К ПРОВЕДЕНИЮ ФАКУЛЬТАТИВНЫХ ЗАНЯТИЙ В ШКОЛЕ

Петровская И.Г.
Шалик Э.В.
Белорусский государственный педагогический
университет имени М. Танка
г. Минск

Факультативные занятия являются одной из форм организации учебных занятий в школе. Они призваны углублять, расширять и корректировать знания учащихся по учебным предметам, повышать качество образования учащихся, готовить их к централизованному тестированию и к олимпиадам. Немаловажное значение имеет возможность приобщать обучающихся к научно-исследовательской деятельности. Особую роль в школьном курсе играет математика как учебный предмет. Именно на уроках математики ученики осваивают методы познания окружающего мира – анализ, дедукцию, индукцию, обобщения, аналогии. Метаматематические знания являются необходимыми при изучении учебных предметов естественного цикла. Роль факультативных занятий по математике в этом смысле переоценить трудно. В связи с этим, нам представляется важным обращать внимание слушателей факультета переподготовки специалистов образования на возможности применения математического анализа при решении школьных задач.

Математический анализ является, по существу, фундаментом математических знаний. С помощью классических теорем анализа можно решать многочисленные школьные задачи алгебры и геометрии. Очень широка, например, область применения производной при преобразовании алгебраических выражений, вычислении сумм, разложении на множители, доказательстве тождеств, решении уравнений, неравенств, систем, доказательстве неравенств, решении задач с параметрами, исследовании функций.

Приведем несколько примеров из разработанной нами системы задач, которую можно предложить слушателям для проведения факультативных занятий по математике и при подготовке школьников к олимпиадам достаточно высокого уровня.

Задача. Разложить на множители выражение $xy(x-y)+yz(y-z)+xz(z-x)$.
Решение. Считая x переменной величиной, рассмотрим функцию $f(x)=xy(x-y)+yz(y-z)+xz(z-x)$. Тогда $f'(x)=2xy-y^2+z^2-2xz=(y-z)(2x-y-z)$ Так как $(x^2-(y+z)x)'=2x-y-z$, $((y-z)(x^2-(y+z)x)'=(y-z)(2x-y-z)$, и функции, имеющие равные производные отличаются на константу, то $f(x)=(y-z)(x^2-(y+z)x)+C$, где C не зависит от x, но зависит, вообще говоря, от y и от z. Так как последнее равенство верно при любом x, то пусть $x=0$. Тогда получим, что $c=yz(y-z)$. Таким образом, $f(x)=(y-z)(x^2-(y+z)x)+yz(y-z)=(y-z)(x-z)(x-y)$.

Аналогично можно упрощать алгебраические выражения, например, такие $(x+y+z)^3-(x+y-z)^3-(z+x-y)^3$; $\frac{(y-z)^3}{(z-x)(x-y)}+\frac{(z-x)^2}{(x-y)(y-z)}+\frac{(x-y)^2}{(y-z)(z-x)}$.

Пользуясь признаком постоянства функции можно легко вывести формулы, известные из элементарной математики. Например, докажем, что $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$. Для этого рассмотрим функцию $f(x)=\sin^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x,\ x\in\mathrm{R}$. Вычислим ее производную $f'(x)=2\sin x\cos x-\sin 2x=0$. Следовательно, $f(x)=C$, то есть $\sin^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x=C$. Определив $C=\frac{1}{2}$, имеем $\sin^2 x+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{1}{2}$, то есть $\sin^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$.

Применение производной к решению уравнений, неравенств и систем, а также к доказательству неравенств основано на связи между возрастанием или убыванием функции на некотором промежутке и знаком её производной. Докажем, например, неравенство $\cos x\ge 1-\frac{x^2}{2}$ при $x\ge 0$. Для доказательства рассмотрим функцию $f(x)=\cos x+\frac{x^2}{2}-1$. Так как $f(0)=0$ и функция $f(x)$ непрерывна, то для доказательства неравенства достаточно доказать, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $(0;+\infty)$, то есть достаточно доказать, что $f'(x)=-\sin x+x>0$ при $x>0$. Так как $\sin x<x$ при $x>0$, то справедливость неравенства доказана.

С помощью теории экстремумов можно достаточно просто доказывать неравенства типа: $|3x-x^2|\le 2$ при $x\le 2$; $|a\sin x+b\cos x|\le\sqrt{a^2+b^2}$; $x^m(a-x)^m\le\frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+1}}a^{m+n}$, $\mathrm{m}>0, \mathrm{n}>0, 0\le \mathrm{x}\le \mathrm{a}$.

Особенно интересны приложения математического анализа в геометрии. Только геометрический смысл производной дает возможность решать многочисленные задачи геометрии. Например, можно легко доказать, что кривая, обладающая тем свойством, что все ее нормали проходят через постоянную точку есть окружность.

Применение простейших понятий математического анализа в решении задач с параметрами позволит повысить математическую культуру учащихся в рамках школьного курса. Например, интересной для школьников может быть следующая задача: при каких значениях параметров a и b функция $f(x)=\frac{ax^2+bx+1}{x^2+bx+a}$ является периодической с любым периодом.

Мы считаем, что такая система задач позволяет сделать преподавание математического анализа для слушателей факультета переподготовки специалистов образования специальности «Математика» практико-ориентированным.