УДК 517.926

Н. Г. Серебрякова,
кандидат педагогических наук,
заведующий кафедрой прикладной информатики БГАТУ;
А. Ф. Касабуцкий,
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики БГАТУ

ВЗАИМООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ГЕНЕРАЛЬНЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Введение. Рассмотрим линейную дифференциальную систему

$$\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \qquad (1)$$

размерности $n \geq 2$ с кусочно-непрерывной и равномерно ограниченной ($\sup\limits_{t \geq 0}\|A(t)\| < +\infty$) на временно́й полуоси $t \geq 0$ матрицей коэффициентов. Класс всех таких систем обозначается через M_n. Отождествляя систему (1) с ее матрицей коэффициентов, будем писать $A \in M_n$. Через $X_A(\cdot,\cdot)$ обозначим матрицу Коши системы (1).

Верхний $\Omega^0(A)$ и нижний $\omega_0(A)$ генеральные (особые) показатели системы (1) задаются равенствами [1, с. 172; 2, с. 110]

$$\Omega^0(A) = \overline{\lim_{t-\tau\to+\infty}} \frac{1}{t-\tau} \ln \| X_A(t,\tau) \|$$

и (2)

$$\omega_0(A) = \lim_{t-\tau\to+\infty} \frac{1}{t-\tau} \ln \| X_A^{-1}(t,\tau) \|^{-1}.$$

Иногда, как, например, в [1, с. 172] или [3, с. 89], при вычислении пределов в соотношениях (2) к условию $t-\tau \to +\infty$ добавляют еще дополнительное условие $\tau \to +\infty$. Доказательство того, что это дополнительное условие не изменяет (по меньшей мере для систем из класса M_n) величин (2), приведено в доказательстве теоремы 1 работы [4].

Показатели (2) (точнее, первый из них) введены П. Г. Болем [5] (см. также 6, с. 461]) и независимо из других соображений К. П. Персидским [7; 8, с. 94] (см. также [1, с. 172; 2, с. 109–111]). Позже к понятию генеральных показателей, обобщая результаты А. М. Ляпунова по устойчивости движения на системы в банаховом пространстве, пришел М. Г. Крейн [9; 10; 1, с. 213]. Для (нелинейной) системы отрицательность верхнего генерального показателя ее системы первого приближения, если последняя принадлежит классу M_n, является [5] необходимым и достаточным условием устойчивости при постоянно действующих возмущениях, а также [7] необходимым и достаточным условием равномерной устойчивости по первому приближению. Отрицательность верхнего генерального показателя системы – достаточное условие ее равномерной устойчивости и необходимое и достаточное условие равномерной устойчивости всех систем из некоторой ее окрестности (в метрике равномерной сходимости на полуоси матриц коэффициентов систем из M_n). Кроме того, точная верхняя грань показателей Ляпунова всех обобщенных решений линейной дифференциальной системы с равномерно непрерывной матрицей коэффициентов совпадает с верхним генеральным показателем [11]. Важная характеризация показателей (2) получена в работе [12]: в частности, верхний генеральный показатель $\Omega^0(A)$ системы (1) есть точная верхняя грань верхних показателей Боля ненулевых решений системы (1) при малых возмущениях ее матрицы коэффициентов. Аналогичные утверждения (с соответствующими изменениями) справедливы и для нижнего генерального показателя $\omega_0(A)$. Приведенные свойства величин (2) делают их одними из основных асимптотических характеристик линейных дифференциальных систем.

Так как для произвольной невырожденной $n \times n$-матрицы X справедливы соотношения

$$\max_{\mathbb{R}^n \ni \xi \neq \{0\}} \frac{\| X\xi \|}{\| \xi \|} = \| X \|$$

и (3)

$$\min_{\mathbb{R}^n \ni \xi \neq \{0\}} \frac{\| X\xi \|}{\| \xi \|} = \| X^{-1} \|^{-1}$$

(норма вектора евклидова), т. е. $\| X \|$ и $\| X^{-1} \|^{-1}$ – это, соответственно, большая и малая полуоси $(n-1)$-мерного эллипсоида $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \| X^{-1}\xi \| = 1\}$, порождаемого линейным отображением X. Поэтому с геометрической точки зрения верхний $\Omega^0(A)$ и нижний $\omega_0(A)$ генеральные показатели системы (1) – это асимптотически точные при $t-\tau\to+\infty$ крайние границы изменения в логарифмической шкале полуосей семейства эллипсоидов, порождаемых семейством линейных отображений $X_A(t,\tau)$ (показатель $\Omega^0(A)$ – точная верхняя граница больших полуосей, а показатель $\omega_0(A)$ – точная нижняя граница малых полуосей этого семейства эллипсоидов). С этой точки зрения представляется естественным наряду с величинами (2) рассмотреть также величины

$$\Omega_0(A)=\varliminf_{t-\tau\to+\infty}\frac{1}{t-\tau}\ln\|X_A(t,\tau)\|$$

и (4)

$$\omega^0(A)=\varlimsup_{t-\tau\to+\infty}\frac{1}{t-\tau}\ln\|X_A^{-1}(t,\tau)\|^{-1},$$

дающие, соответственно, асимптотически точные при $t-\tau\to+\infty$ нижнюю границу изменения больших полуосей и верхнюю границу изменения малых полуосей в логарифмической шкале семейства эллипсоидов, порождаемых семейством линейных отображений $X_A(t,\tau)$. Определения (4) введены в работах [13–14]. Хотя для величин (4) к настоящему времени не известно каких-либо столь же важных свойств, как свойства, приведенные выше для величин (2), тем не менее, с формально-логической точки зрения, определение величин (2) не обладает никакими преимуществами перед определением величин (4). Более того, совместное рассмотрение величин (2) и (4), поскольку они взаимно дополняют друг друга, устанавливая точные двусторонние оценки изменения норм $\|X_A(t,\tau)\|$ и $\|X_A^{-1}(t,\tau)\|$ при $t-\tau\to+\infty$, представляется естественным и необходимым. Показатели $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$ называются [13–14] соответственно старшим нижним и младшим верхним генеральными (особыми) показателями; по этой же терминологии показатели $\Omega^0(A)$ и $\omega_0(A)$ – это старший верхний и младший нижний генеральные (особые) показатели.

Из определений (2) и (4) очевидно вытекает, что генеральные показатели $\Omega^0(A)$, $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$, $\omega_0(A)$ удовлетворяют следующим неравенствам

$$\Omega_0(A)\le\Omega^0(A)$$

и (5)

$$\omega_0(A)\le\omega^0(A),$$

а из определений (2) и (4) и соотношений (3) – неравенствам

$$\omega^0(A)\le\Omega^0(A)$$

и (6)

$$\omega_0(A)\le\Omega_0(A).$$

Неравенства (5) вытекают из того, что верхний предел не меньше нижнего предела, если эти пределы берутся по одному и тому же множеству, а неравенства (6) – простое следствие вытекающего из соотношений (3) неравенства $\|X_A^{-1}(t,\tau)\|^{-1}\le\|X_A(t,\tau)\|$, а также возрастания функции $\ln(\cdot)$ на положительной полуоси и положительности разности $t-\tau$. Неравенства (5) и (6) более компактно можно записать в следующем равносильном виде

$$\max\{\omega^0(A),\Omega_0(A)\}\le\Omega^0(A)$$

и (7)

$$\omega_0(A)\le\min\{\omega^0(A),\Omega_0(A)\}.$$

Естественно возникает вопрос: дают ли неравенства (5) и (6) или, что то же самое, неравенства (7), все возможные соотношения между генеральными показателями систем класса M_n? В частности, имеются ли какие-либо соотношения между показателями (4) $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$? Ответ на сформулированные вопросы дает теорема работы, которая показывает, что никаких других соотношений между генеральными показателями на классе M_n систем не существует и, в частности, что показатели $\Omega_0(A)$ и $\omega^0(A)$ вообще не связаны между собою никакими соотношениями.

Основная часть. **Теорема.** *Для каждого натурального* $n\ge 2$ *и четверки вещественных чисел* $(\alpha,\beta,\gamma,\delta)$ *тогда и только тогда найдется система* $A\in M_n$, *для которой выполнены равенства*

$$\omega_0(A)=\alpha,$$
$$\omega^0(A)=\beta,$$
$$\Omega_0(A)=\gamma, \qquad (8)$$
$$\Omega^0(A)=\delta,$$

когда для этих чисел выполняются неравенства

$$\max\{\beta,\gamma\}\le\delta$$

и (9)

$$\alpha\le\min\{\beta,\gamma\}.$$

Доказательство. 1. *Необходимость* условий теоремы – неравенства (7) – установлена выше в постановке задачи.

2. *Достаточность.* Построим вначале нужную систему при $n=2$. Зафиксируем какую-либо последовательность $(T_m)_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\uparrow+\infty$

точек временной полуоси, удовлетворяющую условиям: $T_0 = 0$ и

$$\lim_{m\to+\infty}(T_{m+1} - T_m) = +\infty. \qquad (10)$$

Определим на полуоси функции $a(\cdot)$ и $b(\cdot)$ равенствами:

$$a(t) = \begin{cases} \delta, \text{ если } t \in [T_{2k-2}, T_{2k-1}), \\ \beta, \text{ если } t \in [T_{2k-1}, T_{2k}) \end{cases}$$

и (11)

$$b(t) = \begin{cases} \gamma, \text{ если } t \in [T_{2k-2}, T_{2k-1}), \\ \alpha, \text{ если } t \in [T_{2k-1}, T_{2k}), \end{cases}$$

где $k \in \mathbb{N}$. Диагональную матрицу

$$\mathrm{diag}[a(t), b(t)], \quad t \geq 0,$$

обозначим через $D(t)$ и докажем, что для генеральных показателей системы

$$\dot{x} = D(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad t \geq 0, \qquad (12)$$

справедливы равенства:

$$\omega_0(D) = \alpha, \quad \omega^0(D) = \gamma,$$
$$\text{к}\Omega_0(D) = \beta, \quad \Omega^0(D) = \delta. \qquad (13)$$

Поскольку матрица коэффициентов системы (12) диагональна, то для матрицы Коши $X_D(\cdot,\cdot)$ этой системы очевидно представление

$$X_D(t,\tau) = \mathrm{diag}\,[\exp\int_\tau^t a(s)ds, \exp\int_\tau^t b(s)ds], \quad t,\tau \geq 0, \qquad (14)$$

а значит,

$$\|X_D(t,\tau)\| = \max\{\exp\int_\tau^t a(s)ds, \exp\int_\tau^t b(s)ds\}.$$

Следовательно, так как в силу определений (11) и выбора постоянных α, β, γ, δ при всех $t \geq 0$ выполнено неравенство $a(t) \geq b(t)$, то

$$\|X_D(t,\tau)\| = \exp\int_\tau^t a(s)ds, \quad t \geq \tau \geq 0, \qquad (15)$$

а значит, вследствие определения коэффициента $a(\cdot)$ имеет место двойное неравенство

$$\exp\{\beta(t-\tau)\} \leq \|X_D(t,\tau)\| \leq \exp\{\delta(t-\tau)\}, \quad t \geq \tau \geq 0. \qquad (16)$$

Из оценок (16) в силу первых равенств в определениях (2) и (4) получаем соответственно неравенства:

$$\Omega^0(D) \leq \delta \text{ и } \Omega_0(D) \geq \beta. \qquad (17)$$

С другой стороны, вследствие равенства (15) и определения коэффициента $a(\cdot)$ очевидны равенства

$$\|X_D(T_{2k-1}, T_{2k-2})\| = \exp\{\delta(T_{2k-1} - T_{2k-2})\}$$

и

$$\|X_D(T_{2k}, T_{2k-1})\| = \exp\{\beta(T_{2k} - T_{2k-1})\}, \; k \in \mathbb{N}.$$

Другими словами,

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{T_{2k-1} - T_{2k-2}}\ln\|X_D(T_{2k-1}, T_{2k-2})\| = \delta,$$
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{T_{2k} - T_{2k-1}}\ln\|X_D(T_{2k}, T_{2k-1})\| = \beta,$$

а так как по выбору последовательности (T_m) верны соотношения

$$T_{2k-1} - T_{2k-2} \to +\infty \text{ и } T_{2k} - T_{2k-1} \to +\infty \text{ при } k \to +\infty,$$

то имеют место неравенства, противоположные неравенствам (17), что и доказывает справедливость двух последних равенств в соотношениях (13).

Докажем два первых равенства в соотношениях (13). Вследствие представления (14) и неравенства $a(t) \geq b(t)$, $t \geq 0$, получаем, что

$$\|X_D^{-1}(t,\tau)\|^{-1} = \exp\int_\tau^t b(s)ds, \quad t \geq \tau \geq 0, \qquad (18)$$

а значит, в силу определения коэффициента $b(\cdot)$ имеет место двойное неравенство

$$\exp\{\alpha(t-\tau)\} \leq \|X_D^{-1}(t,\tau)\|^{-1} \leq \exp\{\gamma(t-\tau)\}, \quad t \geq \tau \geq 0. \qquad (19)$$

Из оценок (19) в силу вторых равенств в определениях (2) и (4) получаем соответственно неравенства:

$$\omega^0(D) \leq \gamma$$

и (20)

$$\omega_0(D) \geq \alpha.$$

С другой стороны, вследствие равенства (18) и определения коэффициента $b(\cdot)$ очевидны равенства

$$\|X_D^{-1}(T_{2k-1}, T_{2k-2})\|^{-1} = \exp\{\gamma(T_{2k-1} - T_{2k-2})\},$$
$$\|X_D^{-1}(T_{2k}, T_{2k-1})\|^{-1} = \exp\{\alpha(T_{2k} - T_{2k-1})\},$$

$k \in \mathbb{N}$.

Поэтому

$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{T_{2k-1} - T_{2k-2}}\ln\|X_D^{-1}(T_{2k-1}, T_{2k-2})\|^{-1} = \gamma,$$
$$\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{T_{2k} - T_{2k-1}}\ln\|X_D^{-1}(T_{2k}, T_{2k-1})\|^{-1} = \alpha,$$

а значит, поскольку

$$T_{2k-1} - T_{2k-2} \to +\infty \text{ и } T_{2k} - T_{2k-1} \to +\infty \text{ при } k \to +\infty$$

согласно выбору последовательности (T_m), имеют место неравенства, противоположные неравенствам (20), что и доказывает справедливость двух первых равенств в соотношениях (13).

Теорема в случае $n = 2$ доказана.

Докажем теорему для $n>2$. Рассмотрим диагональную матрицу

$$\dot{x}=B(t)x,\quad x\in\mathbb{R}^n,\quad t\ge 0,\qquad (21)$$

с матрицей $B(t)\equiv \mathrm{diag}[a(t),\ldots,a(t),b(t)]$, $t\ge 0$. Так как для матрицы Коши $X_B(\cdot,\cdot)$ системы (21) в силу определения ее матрицы коэффициентов очевидны тождества

$$\|X_B(t,\tau)\|=\|X_D(t,\tau)\|$$

и

$$\|X_B(t,\tau)\|=\|X_D(t,\tau)\|,\quad t,\tau\ge 0,$$

то ее генеральные показатели совпадают с одноименными генеральными показателями системы (12). Теорема доказана.

Из доказанной теоремы вытекает, в частности, что старший нижний $\Omega_0(A)$ и младший верхний $\omega^0(A)$ генеральные показатели систем $A\in M_n$ не связаны, вообще говоря, между собой никакими неравенствами. В самом деле, выбирая в доказательстве теоремы постоянные $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ удовлетворяющими соотношениям $\alpha\le\beta<\gamma\le\delta$ (неравенства (9) очевидно выполнены), получим неравенство $\Omega_0(A)<\omega^0(A)$. Выбирая же их такими, чтобы $\alpha\le\gamma<\beta\le\delta$ (неравенства (9) очевидно выполнены), получим обратное неравенство $\omega^0(A)<\Omega_0(A)$. В случае же если $\alpha\le\beta=\gamma\le\delta$, имеем равенство этих показателей $\omega^0(A)=\Omega_0(A)$.

Литература

1. *Далецкий, Ю. Л.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн. – М. : Наука, 1970. – 536 с.
2. *Былов, Б. Ф.* Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости / Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман [и др.]. – М. : Наука, 1966. – 576 с.
3. *Розенвассер, Е. Н.* Показатели Ляпунова в теории линейных систем управления / Е. Н. Розенвассер. – М. : Наука, 1977. – 344 с.
4. *Барабанов, Е. А.* Равномерные показатели линейных систем дифференциальных уравнений / Е. А. Барабанов, А. В. Конюх // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, 10. – С. 1665–1676.
5. *Bohl, P.* Über Differentialungleichungen // J. reine und angew. Math. 1913. Bd 144, Hf 4. – S. 284–318.
6. *Боль, П.* Собрание трудов / П. Боль. – Рига : Зинатне, 1974. – 519 с.
7. *Персидский, К. П.* К теории устойчивости интегралов системы дифференциальных уравнений. Часть первая / К. П. Персидский // Изв. физ.-мат. об-ва при Казанск. ун-те. – 1936–1937. – 3 сер. – Т. VIII. – С. 47–85.
8. *Персидский, К. П.* Избранные труды: в 2 т. / К. П. Персидский. Т. 1. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. Теория вероятностей. – Алма-Ата : «Наука» Каз. ССР, 1976. – 272 с.
9. *Крейн, М. Г.* О некоторых вопросах, связанных с кругом идей Ляпунова в теории устойчивости / М. Г. Крейн // Успехи мат. наук. – 1948. – Т. 3, вып. 3. – С. 166–169.
10. *Крейн, М. Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве / М. Г. Крейн. – Киев : Изд-во АН УССР, Ин-т математики, 1964. – 186 с.
11. *Миллионщиков, В. М.* К спектральной теории неавтономных линейных систем дифференциальных уравнений / В. М. Миллионщиков // Труды Моск. матем. об-ва. 1968. – Т. 18. – С. 147–168.
12. *Vinograd, R. É.* Simultaneous attainability of central Lyapunov and Bohl exponents for ODE linear systems / R. É. Vinograd // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. Vol. 88, № 4. – P. 595–601.
13. *Barabanov, E. A.* Bohl exponents of linear differential systems / E. A. Barabanov, A. V. Konuch // Memoirs on Diff. Eq. and Math. Phys. 2001. Vol. 24. – P. 151 – 158.
14. *Барабанов, Е.А.* Показатели Боля линейных дифференциальных систем при убывающих возмущениях / Е.А. Барабанов, С.В. Кузнецов // Докл. НАН Беларуси. – 2001. – Т. 45, 3. – С. 7–10.

Summary

We have described of the set of all relations between the general parameters $\Omega^0(A)$, $\omega_0(A)$, $\Omega_0(A)$, $\omega^0(A)$ linear differential systems $\dot{x}=A(t)x, x\in\mathbb{R}^n, t\ge 0$ with piecewise continuous and bounded on a temporary half-axis coefficient matrices.

From this theorem it has been shown that the lower a senior $\Omega_0(A)$ and a junior high $\omega^0(A)$ general performance systems $A\in M_n$ are not linked with any inequalities.

Поступила в редакцию 12.11.2014 г.