УДК 512.81

П. А. Дубовик,
аспирант кафедры математики
и методики преподавания математики БГПУ

ЛЕВОИНВАРИАНТНЫЕ f-СТРУКТУРЫ НА СПЕЦИАЛЬНОЙ 5-МЕРНОЙ НИЛЬПОТЕНТНОЙ ГРУППЕ ЛИ

1. Метрические f-структуры на многообразиях

Приведем кратко некоторые сведения из обобщенной эрмитовой геометрии, относящиеся к метрическим *f*-структурам на гладких многообразиях. Как известно, аффинорной структурой на многообразии называется тензорное поле типа (1, 1) или, что эквивалентно, поле эндоморфизмов, действующих в его касательном расслоении.

Мы рассматриваем так называемые *f*-структуры, то есть аффинорные структуры *f*, которые удовлетворяют равенству

$$f^3+f=0 \ \ [1].$$

Такие структуры обобщают широко известные почти комплексные структуры J ($J^2=-1$).

Пусть *M* – *f*-многообразие, ***B***(*M*) – модуль гладких векторных полей на *M*. Тогда

$$\boldsymbol{B}(M) = Im\, f \oplus Ker\, f \ [2],$$

где *Im f* и *Ker f* – взаимно дополнительные распределения, которые обычно называют первым и вторым фундаментальным распределением *f*-структуры соответственно. Заметим, что сужение *F* заданной *f*-структуры на *Im f* есть почти комплексная структура, то есть $F^2=-id$.

Тензор Нейенхейса для *f*-структуры определяется формулой [1]:

$$N(X,Y)=[fX,fY]-f[X,fY]-f[fX,Y]+f^2[X,Y], \quad (1)$$

где $X, Y \in \boldsymbol{B}(M)$. При этом критерием интегрируемости *f*-структуры является условие $N(X, Y) = 0$ для всех X, Y $\in \boldsymbol{B}(M)$ [1].

Напомним, что f-структура на римановом многообразии $(M, g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$ называется метрической *f*-структурой, если

$$\langle fX,Y\rangle+\langle X,fY\rangle=0,$$

где $X, Y \in \boldsymbol{B}(M)$ [2]. В этом случае тройка (*M, g, f*) называется метрическим *f*-многообразием.

Далее через ∇ будем обозначать связность Леви-Чивита риманова многообразия $(M, g=\langle\cdot,\cdot\rangle)$. Тогда для *f*-структуры *f* имеем:

$$\nabla_X(f)Y=\nabla_X fY-f\nabla_X Y. \quad (2)$$

Тензор T типа (2,1) на *f*-многообразии, определенный формулой [2]

$$T(X,Y)=\frac{1}{4}f(\nabla_{fX}(f)fY-\nabla_{f^2X}(f)f^2Y), \quad (3)$$

$X, Y \in \boldsymbol{B}(M)$,

называется *композиционным тензором*.

Будем рассматривать далее класс **Hf** эрмитовых *f*-структур, определяемых условием $T(X,Y) = 0$ для любых $X, Y \in \boldsymbol{B}(M)$ [2; 3]. Заметим, что $\mathbf{Hf} \subset \mathbf{Kf}$, где **Kf** – класс келеровых *f*-структур ($\nabla f=0$).

2. Однородные Ф-пространства

Здесь мы кратко сформулируем некоторые основные определения и результаты, относящиеся к однородным Ф-пространствам и каноническим структурам на них. Более подробную информацию можно найти в [4; 3].

Пусть *G* – связная группа Ли, Ф – ее (аналитический) автоморфизм. Обозначим через G^{Φ} подгруппу всех неподвижных точек автоморфизма Ф, а через G_o^{Φ} – связную компоненту единицы подгруппы G^{Φ}. Предположим, что замкнутая подгруппа *H* группы *G* удовлетворяет условию

$$G_o^{\Phi} \subset H \subset G^{\Phi}.$$

Тогда *G/H* называется *однородным Ф-пространством*.

Однородные Ф-пространства содержат однородные симметрические пространства ($\Phi^2 = id$) и, более общо, *однородные Ф-пространства порядка k* ($\Phi^k = id$) (см., например, [5]) или, в иной терминологии, *однородные k-симметрические пространства* [6].

Пусть *G/H – однородное* Ф-пространство *порядка k* ($k \geq 2$), $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{h}$ – соответствующие алгебры Ли, $\varphi = d\Phi_e$ – автоморфизм алгебры Ли $\boldsymbol{g}$. Рассмотрим линейный оператор

$$A = \varphi - id.$$

Известно [6], что любое однородное Ф-пространство *порядка k* редуктивно, при этом соответствующее редуктивное разложение алгебры Ли $\boldsymbol{g}$ имеет вид: $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h} \oplus \boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{m} = A(\boldsymbol{g})$. Такое разложение называется *каноническим редуктивным разложением* алгебры Ли $\boldsymbol{g}$ однородного Ф-пространства *G/H*. Заметим, что однородные *k*-симметрические пространства входят в более широкий класс регулярных Ф-пространств [4; 3].

Обозначим через θ ограничение φ на $\boldsymbol{m}$, где $\boldsymbol{m}$ отождествим с касательным пространством $T_o(G/H)$ в точке $o = H$. Пусть *F* – инвариантная аффинорная структура на однородном многообразии *G/H*. Тогда *F* вполне определяется своим значением F_o в точке o, где F_o инвариантно относительно $Ad(H)$. Для удобства всюду в дальнейшем мы будем обозначать одинаково любую инвариантную структуру на *G/H* и ее значение в точке o.

Напомним далее, что инвариантная аффинорная структура *F* на регулярном Ф-пространстве *G/H* называется *канонической* [4], если ее значение в точке $o = H$ является полиномом от θ.

Отметим, что все канонические структуры классического типа (в том числе и *f*-структуры) на регулярных Ф-пространствах полностью описаны [4]. В частности, для однородных *k*-симметрических пространств предъявлены точные вычислительные формулы. Приведем основной результат для *f*-структур. Пусть *G/H* – однородное *k*-симметрическое пространство. Используем следующее обозначение:

$$u = \begin{cases} n, & \text{если } k = 2n+1 \\ n-1, & \text{если } k = 2n. \end{cases}$$

Теорема 1 [4]. Пусть *G/H* – однородное Ф-пространство порядка *k.* Тогда все нетривиальные канонические *f*-структуры на *G/H* могут быть заданы операторами

$$f = \frac{2}{k}\sum_{m=1}^{u}\left(\sum_{j=1}^{u}\zeta_j \sin\frac{2\pi mj}{k}\right)(\theta^m - \theta^{k-m}),$$

где $\zeta_j \in \{-1:0:1\}$, $j = 1, 2, \ldots, u$, причем не все коэффициенты ζ_j равны нулю.

Следствие 1 [4]. Пусть *G/H* – однородное Ф-пространство порядка 3. Единственной (с точностью до знака) канонической *f*-структурой на *G/H* является классическая почти комплексная структура

$$J = \frac{1}{\sqrt{3}}(\theta - \theta^2).$$

Отметим, что данная каноническая почти комплексная структура была впервые обнаружена в конце 1960-х гг. Н. А. Степановым и независимо Дж. Вольфом и А. Греем.

Следствие 2 [4]. Пусть *G/H* – однородное Ф-пространство порядка 4. Единственная (с точностью до знака) каноническая *f*-структура на *G/H* имеет вид:

$$f = \frac{1}{2}(\theta - \theta^3).$$

Следствие 3. Пусть *G/H* – однородное Ф-пространство порядка 6. Имеются (с точностью до знака) только следующие канонические *f*-структуры на *G/H*:

$$f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\theta - \theta^2 + \theta^4 - \theta^5),$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\theta + \theta^2 - \theta^4 - \theta^5),$$

$$f_3 = f_1 + f_2,$$

$$f_4 = f_1 - f_2.$$

Укажем важный частный случай однородных Ф-пространств. Если $G^\Phi = \{e\}$, то $H = \{e\}$ и $G/H = G$. В этом случае группу Ли *G* можно рассматривать как однородное Ф-пространство порядка *k* ($\Phi^k = id$). Тогда $\boldsymbol{m} = A(\boldsymbol{g}) = \boldsymbol{g}$ – алгебра Ли группы Ли *G* и $\theta = \varphi$.

Пусть *G/H* – однородное редуктивное пространство, $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{h} \oplus \boldsymbol{m}$ – редуктивное разложение алгебры Ли **g**, $g = \langle\cdot,\cdot\rangle$ – инвариантная риманова метрика на *G/H*. Тогда связность Леви-Чивита ∇ на римановом многообразии (*G/H, g*) определяется формулой [7, с. 187]:

$$\nabla_X Y = \frac{1}{2}[X,Y]_m + U(X,Y), \qquad (4)$$

где U – симметрическое билинейное отображение из ***m*** × ***m*** в ***m***, определенное формулой:

$$2\langle U(X,Y),Z\rangle = \langle X,[Z,Y]_m\rangle + \langle [Z,X]_m,Y\rangle, \quad \forall X,Y,Z \in \boldsymbol{m}. \qquad (5)$$

3. Левоинвариантные f-структуры на специальной 5-мерной нильпотентной группе Ли

Пусть *G* – связная и односвязная группа Ли с алгеброй Ли L_5^1, которая определяется следующими коммутационными соотношениями (из классификации В. В. Морозова [10])

$$[e_1,e_2] = e_3,\ [e_1,e_4] = e_5.$$

Алгебра L_5^1 нильпотентна. Первый идеал нижнего центрального ряда имеет базис e_3, e_5. Второй равен нулю.

Рассмотрим на L_5^1 евклидову метрику, определенную тем условием, что базис $e_i,\ i=\overline{1,5}$ является ортонормированным. Определим линейное преобразование φ алгебры L_5^1 равенствами:

$$\varphi(e_1) = -e_1,\quad \varphi(e_2) = -e_4,$$
$$\varphi(e_3) = e_5,\quad \varphi(e_4) = e_2,$$
$$\varphi(e_5) = -e_3.$$

Легко видеть, что φ – автоморфизм алгебры Ли L_5^1, имеет порядок 4 и согласован с указанной выше евклидовой метрикой. Также очевидно, что автоморфизм φ не имеет неподвижных ненулевых векторов. Так как *G* – связная и односвязная группа Ли, то [8] существует ее автоморфизм Φ такой, что $d\Phi_e = \varphi$. Поскольку подгруппа неподвижных точек автоморфизма Φ связна [9], то в нашем случае подгруппа G^Φ группы Ли *G* тривиальна. Это означает, что группу Ли *G* можно рассматривать как однородное Φ-пространство порядка 4. Согласно следствию 2, единственная (с точностью до знака) каноническая f-структура задается формулой:

$$f = \frac{1}{2}(\varphi - \varphi^3). \qquad (6)$$

Поскольку φ – изометрический автоморфизм относительно выбранной на L_5^1 евклидовой метрики, то *f* является метрической *f*-структурой [3]. Используя формулу (6), легко вычислить значения канонической *f*-структуры на базисных векторах алгебры L_5^1:

$f(e_1) = 0,\qquad f(e_2) = -e_4,$
$f(e_3) = e_5,\qquad f(e_4) = e_2,$
$f(e_5) = -e_3.$

Теорема 2. Пусть на группе Ли *G* с алгеброй Ли L_5^1 задана левоинвариантная *f*-структура *f* такая, что $e_1 \in Ker\, f$. Тогда f является эрмитовой *f*-структурой на *G.*

Доказательство. Легко видеть, что в данном случае

$$[fX,fY] = f(U(fX,fY)) = 0\ \ \forall X,Y \in L_5^1. \qquad (7)$$

Вычислим композиционный тензор *T*, используя (2) и (3). Для выражения $\nabla_{fX}(f)fY$ с учетом равенств (4) и (7) получим:

$$\nabla_{fX}(f)fY = \nabla_{fX}(f^2Y) - f\nabla_{fX}fY =$$
$$= \frac{1}{2}[fX,f^2Y] + U(fX,f^2Y) - f\left(\frac{1}{2}[fX,fY] + U(fX,fY)\right) =$$
$$= U(fX,f^2Y).$$

Аналогично получим:

$$\nabla_{f^2X}(f)f^2Y = -U(f^2X,fY).$$

Следовательно, композиционный тензор *T* имеет вид:

$$T(X,Y) = \frac{1}{4}f(U(fX,f^2Y) + U(f^2X,fY)).$$

Откуда, в силу равенства (7), следует, что $T(X,Y) = 0$ для любых $X, Y \in L_5^1$.

Теорема доказана.

Теорема 3. Каноническая *f*-структура, определенная равенством (6), является эрмитовой *f*-структурой на *G*.

Доказательство. Очевидно, что

$$e_1 \in Ker\, f.$$

Теорема доказана.

Теорема 4. Тензор Нейенхейса *N*(*X, Y*) для канонической *f*-структуры, определенной равенством (6), имеет на *G* следующий вид:

$N(X, Y) = -2[X, Y]$ для любых $X, Y \in L_5^1$.

Следовательно, данная *f*-структура не является интегрируемой.

Доказательство. Легко видеть, что $[fX,fY] = 0\ \ \forall X,Y \in L_5^1$. Тензор Нейенхейса примет вид:

$$N(X,Y) = -f[X,fY] - f[fX,Y] + f^2[X,Y].$$

Пусть $X = \sum_{i=1}^{5} \alpha_i e_i$, $Y = \sum_{i=1}^{5} \beta_i e_i$ – разложение векторов X и Y по базису e_i алгебры Ли L_5^1. Тогда

$$fX = \alpha_4 e_2 - \alpha_5 e_3 - \alpha_2 e_4 + \alpha_3 e_5,$$

$$fY = \beta_4 e_2 - \beta_5 e_3 - \beta_2 e_4 + \beta_3 e_5.$$

Вычислим скобку Ли

$$f[X, fY] = \alpha_1\beta_2 e_3 + \alpha_1\beta_4 e_5.$$

Аналогично, вычисляя скобки Ли

$$f[fX, Y] \text{ и } f^2[X, Y],$$

получим:

$$f[fX, Y] = -\alpha_2\beta_1 e_3 - \beta_1\alpha_4 e_5,$$

$$f^2[X, Y] = -(\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2)e_3 - (\alpha_1\beta_4 - \beta_1\alpha_4)e_5.$$

Таким образом, тензор Нейенхейса примет вид:

$$N(X, Y) = $$

$$= -2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)e_3 - 2(\alpha_1\beta_4 - \alpha_4\beta_1)e_5 =$$

$$= -2[X, Y].$$

Теорема доказана.

Аналогично, представим группу G как однородное Ф-пространство порядка 6. Рассмотрим следующий автоморфизм ψ алгебры Ли L_5^1:

$$\psi(e_1) = -e_1,$$

$$\psi(e_2) = -\frac{1}{2}e_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}e_4,$$

$$\psi(e_3) = \frac{1}{2}e_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_5,$$

$$\psi(e_4) = \frac{\sqrt{3}}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_4,$$

$$\psi(e_5) = -\frac{\sqrt{3}}{2}e_3 + \frac{1}{2}e_5.$$

В данном случае $\psi_6 = id$. Отметим, что автоморфизм ψ также согласован с евклидовой метрикой на L_5^1. Воспользуемся формулами для канонических f-структур следствия 3. Имеем 4 канонические f-структуры:

$$f_1 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\psi - \psi^2 + \psi^4 - \psi^5),$$

$$f_2 = \frac{\sqrt{3}}{6}(\psi + \psi^2 - \psi^4 - \psi^5), \quad (8)$$

$$f_3 = f_1 + f_2, \; f_4 = f_1 - f_2.$$

Следующая теорема доказывается аналогично теореме 3.

Теорема 5. Канонические f-структуры f_1, f_2, f_3, f_4 являются эрмитовыми f-структурами на G.

Теорема 6. Тензор Нейенейса $N(X, Y)$ для f-структур f_1, f_2, f_3, f_4 равен соответственно:

$$N_{f_1}(X, Y) = 0,$$

$$N_{f_2}(X, Y) = -[X, Y],$$

$$N_{f_3}(X, Y) = -2[X, Y],$$

$$N_{f_4}(X, Y) = 0, \quad \forall X, Y \in L_5^1.$$

Таким образом, структуры f_1 и f_4 являются интегрируемыми, в то время как структуры f_2 и f_3 таковыми не являются.

Доказательство. Докажем соответствующее равенство для f-структуры f_2. Легко видеть, что

$$f_2[X, Y] = [fX, fY] = 0 \;\; \forall X, Y \in L_5^1.$$

Тензор Нейенхейса, определенный для f-структур формулой (1), примет вид:

$$N_{f_2}(X, Y) = f_2^2[X, Y] = -[X, Y].$$

Аналогично доказываются соответствующие равенства для f-структур f_1, f_3, f_4.

Теорема доказана.

Литература

1. *Яно, К.* CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях / К. Яно, М. Кон. – М. : Наука, 1990. – С. 192.
2. *Кириченко, В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий / В. Ф. Кириченко // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – ВИНИТИ АН СССР. – 1986. – Т. 18. – С. 25–71.
3. Однородные пространства: теория и приложения: монография / В. В. Балащенко [и др.]. – Ханты-Мансийск : Полиграфист, 2008. – С. 280.
4. *Балащенко, В. В.* Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах / В. В. Балащенко, Н. А. Степанов // Мат. сб. – 1995. – Т. 186. – № 11. – С. 3–34.
5. *Степанов, Н. А.* Основные факты теории φ-пространств / Н. А. Степанов // Известия вузов. – Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.
6. *Ковальский, О.* Обобщенные симметрические пространства / О. Ковальский. – М. : Мир, 1984. – С. 240.
7. *Кобаяси, Ш.* Основы дифференциальной геометрии / Ш. Кобаяси, К. Номидзу. – М. : Наука, 1981. – Т. 2. – С. 414.

8. *Шевалле, К.* Теория групп Ли / К. Шевалле. – М. : ИЛ, 1948. – Т. 1. – С. 315.
9. *Рашевский, П. К.* Теорема о связности подгруппы односвязной группы Ли, перестановочной с каким-либо ее автоморфизмом / П. К. Рашевский // Труды ММО. – 1974. – Т. 30. – С. 3–22.
10. *Морозов, В. В.* Классификация нильпотентных алгебр Ли шестого порядка / В. В. Морозов // Известия вузов. Математика. – 1958. – № 4. – С. 161–171.

Summary

In this paper, special f-structures (in the sense of K. Yano) on the 5-dimensional Li group G. are discussed We represent the group G as a Riemannian homogeneous -symmetric space in two ways, namely, as 4- and 6-symmetric homogeneous spaces. Using the theory of canonical structures on homogeneous k-symmetric spaces, the corresponding left-invariant canonical f-structures on these spaces have peen constructed. It have been proved that all these structures are Hermitian f-structures on G. Besides, we calculate the Nijenhuis tensors of these f-structures and indicate those canonical f-structures which are integrable.

Поступила в редакцию 20.10.2015 г.