УДК 517.9

Ф. В. Чумаков,
кандидат физико-математических наук, доцент;
С. И. Василец,
кандидат физико-математических наук, доцент, БГПУ

РЕШЕНИЕ В ЯВНОЙ ФОРМЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА ПЕРВОГО РОДА С ЯДРОМ $\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}$ И ВНУТРЕННИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ НА СИММЕТРИЧНОМ ОТРЕЗКЕ

Интегральные уравнения типа Вольтерра часто встречаются при решении многих практических задач, обладающих свойством симметрии. В данной работе мы дадим в замкнутой форме решение одного такого уравнения

$$\int_{-x}^{x} a(t)\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt+\int_{-x}^{x} b(t)\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt=f(x), \quad (1)$$

где переменные x и t изменяются на отрезке [–1, 1], заданные функции $a(x)$, $b(x)$ непрерывны на этом отрезке и удовлетворяют условию

$$\Delta(t)=\begin{vmatrix} a(t)+b(t) & a(-t)+b(-t) \\ b(t)-a(t) & a(-t)-b(-t) \end{vmatrix}\neq 0.$$

Будем предполагать без ограничения общности, что $x > 0$. Решение уравнения $\varphi(x)$ будем искать в классе функций, обеспечивающих существование интегралов в формуле (1) как несобственных. Для этого достаточно, чтобы искомое решение $\varphi(x)$ допускало представление

$$\varphi(x)=\frac{\varphi^{*}(x)}{(1-x^{2})^{\frac{1}{2}-\varepsilon}}\ (\varepsilon>0),$$

$\varphi^{*}(x)$ – непрерывная функция. Отсюда следует с необходимостью, что функция $f(x)$ должна обращаться в точке $x = 0$ в нуль порядка не меньшего единицы, то есть допускать представление $f(x) = xf^{*}(x)$. Будем предполагать, что функция $f^{*}(x)$ дифференцируема на отрезке [–1, 1]. При сделанных предположениях уравнение (1) имеет единственное решение, допускающее требуемое представление.

Изложим схему решения приведенного уравнения. Для этого предположим, что решение уравнения уже получено, то есть равенство (1) выполняется. Тогда в силу симметрии должно выполняться также равенство, полученное в результате подстановки $-x$ вместо x в исходное уравнение (1), то есть равенство

$$\int_{x}^{-x} a(t)\sqrt{\frac{-x-t}{-x+t}}\varphi(t)\,dt+\int_{x}^{-x} b(t)\sqrt{\frac{-x+t}{-x-t}}\varphi(t)\,dt=f(-x),$$

или, что то же самое,

$$\int_{-x}^{x} b(t)\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt+\int_{-x}^{x} a(t)\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt=-f(-x).$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-x}^{x} a(t)\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt+\int_{-x}^{x} b(t)\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt=f(x), \\ \displaystyle\int_{-x}^{x} b(t)\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt+\int_{-x}^{x} a(t)\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt=-f(-x). \end{cases}$$

Сначала складывая уравнения системы, а затем вычитая из первого равенства второе, получим новую систему

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{-x}^{x} (a(t)+b(t))\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt+ \\ \displaystyle\quad+\int_{-x}^{x} (a(t)+b(t))\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt=f(x)-f(-x), \\ \displaystyle\int_{-x}^{x} (a(t)-b(t))\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt+ \\ \displaystyle\quad+\int_{-x}^{x} (b(t)-a(t))\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt=f(x)+f(-x), \end{cases}$$

которую запишем в виде

$$\begin{cases} \int\limits_{-x}^{x}(a(t)+b(t))\left(\sqrt{\dfrac{x-t}{x+t}}+\sqrt{\dfrac{x+t}{x-t}}\right)\varphi(t)\,dt = \\ \quad = f(x)-f(-x), \\ \int\limits_{-x}^{x}(a(t)-b(t))\left(\sqrt{\dfrac{x-t}{x+t}}-\sqrt{\dfrac{x+t}{x-t}}\right)\varphi(t)\,dt = \\ \quad = f(x)+f(-x). \end{cases}$$

Преобразуем полученную систему, учитывая, что $x - t > 0$, $x + t > 0$,

$$\begin{cases} \int\limits_{-x}^{x}(a(t)+b(t))\dfrac{|x-t|+|x+t|}{\sqrt{x^2-t^2}}\varphi(t)\,dt = \\ \quad = f(x)-f(-x), \\ \int\limits_{-x}^{x}(a(t)-b(t))\dfrac{|x-t|-|x+t|}{\sqrt{x^2-t^2}}\varphi(t)\,dt = \\ \quad = f(x)+f(-x). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_{-x}^{x}(a(t)+b(t))\dfrac{x-t+x+t}{\sqrt{x^2-t^2}}\varphi(t)\,dt = \\ \quad = f(x)-f(-x), \\ \int\limits_{-x}^{x}(a(t)-b(t))\dfrac{x-t-(x+t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\varphi(t)\,dt = \\ \quad = f(x)+f(-x). \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \int\limits_{-x}^{x}(a(t)+b(t))\dfrac{\varphi(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt = \\ \quad = \dfrac{1}{2x}(f(x)-f(-x)), & (2) \\ \int\limits_{-x}^{x}(b(t)-a(t))\dfrac{t\varphi(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt = \\ \quad = \dfrac{1}{2}(f(x)+f(-x)). & (3) \end{cases}$$

Очевидно, полученная система уравнений (2) и (3) является равносильной исходному уравнению (1), так как от нее легко перейти к исходному уравнению (1), и наоборот. Преобразуем последовательно уравнения этой системы к виду, более удобному для их решения. Итак, для уравнения (2) имеем

$$\int\limits_{-x}^{x}(a(t)+b(t))\frac{\varphi(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt =$$

$$= \int\limits_{-x}^{0}(a(t)+b(t))\frac{\varphi(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt +$$

$$+ \int\limits_{0}^{x}(a(t)+b(t))\frac{\varphi(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{x}(a(-t)+b(-t))\frac{\varphi(-t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt +$$

$$+ \int\limits_{0}^{x}(a(t)+b(t))\frac{\varphi(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt =$$

$$= \int\limits_{0}^{x}\frac{(a(t)+b(t))\varphi(t)+(a(-t)+b(-t))\varphi(-t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt.$$

Аналогично преобразуем уравнение (3) и приходим к равенству

$$\int\limits_{0}^{x}\frac{(b(t)-a(t))t\varphi(t)-(b(-t)-a(-t))t\varphi(-t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}(f(x)+f(-x)).$$

Имеем систему

$$\begin{cases} \int\limits_{0}^{x}\dfrac{\lambda(t)}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt = \dfrac{1}{2}\left(f^*(x)+f^*(-x)\right), & (4) \\ \int\limits_{0}^{x}\dfrac{\mu(t)t}{\sqrt{x^2-t^2}}\,dt = \dfrac{1}{2}x\left(f^*(x)-f^*(-x)\right), & (5) \end{cases}$$

где

$$\begin{cases} \lambda(t) = (a(t)+b(t))\varphi(t)+ \\ \quad +(a(-t)+b(-t))\varphi(-t), & (6) \\ \mu(t) = (b(t)-a(t))\varphi(t)- \\ \quad -(b(-t)-a(-t))\varphi(-t). & (7) \end{cases}$$

Каждое из уравнений системы (4), (5) сводим к решению уравнения Абеля. Для этого вводим новые переменные

$$u = t^2, \upsilon = x^2, t = \sqrt{u}, x = \sqrt{\upsilon},$$

в которых уравнение (4) примет вид

$$\int\limits_{0}^{\upsilon}\frac{\lambda\left(\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}}\frac{du}{\sqrt{\upsilon-u}} = f^*\left(\sqrt{\upsilon}\right)+f^*\left(-\sqrt{\upsilon}\right).$$

По условию правая часть является дифференцируемой функцией, поэтому решение этого уравнения можно найти, применяя формулу (54.3), которая приведена в книге [1, § 54].

$$\frac{\lambda\left(\sqrt{\upsilon}\right)}{\sqrt{\upsilon}} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{f^*\left(\sqrt{0}\right)+f^*\left(-\sqrt{0}\right)}{\sqrt{\upsilon}} + \right.$$

$$\left. + \int\limits_{0}^{\upsilon}\frac{\left(f^*\left(\sqrt{u}\right)+f^*\left(-\sqrt{u}\right)\right)' du}{\sqrt{\upsilon-u}}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda(x)=\frac{1}{\pi}\left(f^*(x)_{x=0}+f^*(-x)_{x=0}+\right.$$

$$\left.+x\int_0^x \frac{f^*(t)'+f^*(-t)'\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\right). \qquad (8)$$

Аналогично находится решение уравнения (5)

$$\mu(x)=\frac{1}{\pi}\left(f^*(x)_{x=0}-f^*(-x)_{x=0}+\right.$$

$$\left.=+\int_0^x \frac{\left(t\left(f^*(t)-f^*(-t)\right)\right)'}{\sqrt{x^2-t^2}}dt\right). \qquad (9)$$

Из системы

$$\begin{cases}(a(x)+b(x))\varphi(x)+(a(-x)+b(-x))\varphi(-x)=\lambda(x),\\ (b(x)-a(x))\varphi(x)-(b(-x)-a(-x))\varphi(-x)=\mu(x)\end{cases}$$

находим решение исходного уравнения (1)

$$\varphi(x)=\frac{a(-x)-b(-x)}{\Delta(x)}\lambda(x)-\frac{a(-x)+b(-x)}{\Delta(x)}\mu(x), \qquad (10)$$

где $\Delta(x)=\begin{vmatrix}a(x)+b(x) & a(-x)+b(-x)\\ b(x)-a(x) & a(-x)-b(-x)\end{vmatrix}$. (11)

Заметим, что функция

$$\varphi(-x)=\frac{a(x)-b(x)}{\Delta(-x)}\lambda(-x)-\frac{a(x)+b(x)}{\Delta(-x)}\mu(-x) \qquad (12)$$

является решением уравнения

$$\int_{-x}^x a(-t)\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(-t)\,dt+$$

$$+\int_{-x}^x b(-t)\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(-t)\,dt=f(x), \qquad (13)$$

которое легко получить, заменяя переменную интегрирования t в уравнении (1) на $-t$. Уравнение (12) будем называть уравнением, сопутствующим уравнению (1).

Рассмотрим примеры.

Пример 1. Решить уравнение

$$\int_{-x}^x 2\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt+\int_{-x}^x \sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt=$$

$$=x(x+1).$$

Решение. Здесь

$$a(t)=2,\ b(t)=1,\ f^*(x)=x+1.$$

Находим по формуле (8)

$$\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\left(f^*(x)+f^*(-x)+x\int_0^x\frac{f^*(t)'+f^*(-t)'\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((0+1)+(-0+1)+x\int_0^x\frac{(t+1)'+(-x+1)'}{\sqrt{x^2-t^2}}\right)dt=\frac{2}{\pi},$$

по формуле (9) находим

$$\mu(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(f^*(x)_{x=0}-f^*(-x)_{x=0}+\int_0^x\frac{\left(t\left(f^*(t)-f^*(-t)\right)\right)'}{\sqrt{x^2-t^2}}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left((x+1)_{x=0}-(-x+1)_{x=0}+\int_0^x\frac{\left(t(t+1)-t(-t+1)\right)'}{\sqrt{x^2-t^2}}dt\right)=$$

$$=\frac{4}{\pi}x,$$

так как $\int_0^x\frac{t}{\sqrt{x^2-t^2}}dt=x$.

По формуле (11) находим $\Delta x = 6$.

Подставляем в формулу (10) известные величины и определяем решение исходного уравнения $\varphi(x)=\frac{1}{6}\frac{2}{\pi}-\frac{3}{6}\frac{4}{\pi}x=\frac{1}{3\pi}-\frac{2}{\pi}x$.

Проверка. Подставляем в формулу (1) функцию $\varphi(x)=\frac{1}{3\pi}-\frac{2}{\pi}x$ и получаем

$$\int_{-x}^x 2\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\left(\frac{1}{3\pi}-\frac{2}{\pi}t\right)dt+\int_{-x}^x\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\left(\frac{1}{3\pi}-\frac{2}{\pi}t\right)dt=$$

$$\frac{2}{3\pi}\int_{-x}^x\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}dt-\frac{4}{\pi}\int_{-x}^x\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}tdt+$$

$$+\frac{1}{3\pi}\int_{-x}^x\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}dt-\frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}tdt=$$

$$\frac{2}{3\pi}\cdot\pi x-\frac{4}{\pi}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}x^2\right)+\frac{1}{3\pi}\cdot\pi x-\frac{2}{\pi}\cdot\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)=$$

$$=x^2+x.$$

Следовательно, решение найдено правильно.

Пример 2. Решить уравнение

$$\int_{-x}^x 2\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt+\int_{-x}^x t\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt=x.$$

Решение. Здесь

$$a(t)=2,\ b(t)=t,\ f^*(x)=1.$$

Находим по формуле (8)

$$\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\left(f^*(x)+f^*(-x)+\right.$$

$$\left.+x\int_0^x\frac{f^*(t)'+f^*(-t)'\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(1+1+x\int_0^x\frac{(1)'+(1)'}{\sqrt{x^2-t^2}}dt\right)=\frac{2}{\pi},$$

по формуле (9) определяем

$$\mu(x)=\frac{1}{\pi}\left(f^*(x)_{x=0}-f^*(-x)_{x=0}+\right.$$

$$\left.+\int_0^x\frac{\left(t\left(f^*(t)-f^*(-t)\right)\right)'}{\sqrt{x^2-t^2}}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(1-1+\int_0^x\frac{(t-t)'}{\sqrt{x^2-t^2}}dt\right)=0.$$

Далее,

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}2+x & 2-x\\ x-2 & 2+x\end{vmatrix}=2x^2+8$$

по формуле (11). Подставляем в формулу (10) известные величины и определяем решение исходного уравнения

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\frac{2+x}{x^2+4}.$$

Пример 3. Решить уравнение

$$\int_{-x}^x(t+1)\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}\varphi(t)\,dt+\int_{-x}^x t\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\varphi(t)\,dt=x.$$

Решение. Здесь

$$a(t)=t+1,\ b(t)=t,\ f^*(x)=1.$$

Находим по формуле (8)

$$\lambda(x)=\frac{1}{\pi}\left(f^*(x)+f^*(-x)+\right.$$

$$\left.+x\int_0^x\frac{f^*(t)'+f^*(-t)'\,dt}{\sqrt{x^2-t^2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(1+1+x\int_0^x\frac{(1)'+(1)'}{\sqrt{x^2-t^2}}dt\right)=\frac{2}{\pi},$$

по формуле (9) определяем

$$\mu(x)=\frac{1}{\pi}\left(f^*(x)_{x=0}-f^*(-x)_{x=0}+\right.$$

$$\left.+\int_0^x\frac{\left(t\left(f^*(t)-f^*(-t)\right)\right)'}{\sqrt{x^2-t^2}}dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(1-1+\int_0^x\frac{(t-t)'}{\sqrt{x^2-t^2}}dt\right)=0.$$

Далее,

$$\Delta(x)=\begin{vmatrix}2t+1 & 1-2t\\ -1 & 1\end{vmatrix}=2$$

по формуле (11).

Значит $\varphi(t)=\frac{1}{\pi}$.

Проверка. Подставляем в данное уравнение функцию

$$\varphi(x)=\frac{4}{\pi}$$

и получаем

$$\frac{1}{\pi}\int_{-x}^x(t+1)\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-x}^x t\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}dt=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-x}^x\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}dt+\frac{1}{\pi}\left(\int_{-x}^x t\left(\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}+\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\right)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-x}^x\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}dt+\frac{1}{\pi}\left(\int_{-x}^x t\left(\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}+\sqrt{\frac{x+t}{x-t}}\right)dt\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\pi x+\frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x^2-\frac{\pi}{2}x^2\right)=x.$$

Литература

1. *Гахов, Ф. Д.* Краевые задачи / Ф. Д. Гахов. – М.,1977. – 640 с.
2. *Самко, С. Г.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения / С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев. – Минск, 1987. – 688 с.
3. *Hardy, G. H.,* Littlewood J. E. Some properties of fractional,1, Math. Z. 27, 1928. – P. 565–606.
4. *Сакалюк, К. Д.* ДАН СССР, 131, № 4, 1960. – С. 748–751.

Summary

The article is devoted to the closed form solution of the integral equation of Volterra type with the kernel $\sqrt{\frac{x-t}{x+t}}$. *Similar equations are common in solving various practical problems..*

Поступила в редакцию 20.10.2015 г.