О свободных подгруппах в обобщенных тетраэдральных группах типа (3,8,2,2,2,2)

В.В. Беняш-Кривец
Белорусский государственный университет
Я.А. Жуковец
Учреждение образования «Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка»

Говорят, что группа G удовлетворяет альтернативе Титса, если G содержит либо неабелеву свободную подгруппу, либо разрешимую подгруппу конечного индекса. Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление $\Gamma = \left\langle a,b,c \middle| a^{k_1} = b^{k_2} = c^{k_3} = R_{12}(a,b)^l = R_{23}(b,c)^m = R_{13}(a,c)^n = 1 \right\rangle$, где $k_1, k_2, k_3, l, m, n \geq 2$, R_{ij} – циклически редуцированное слово, которое не является собственной степенью. Розенбергер и Файн в [1] выдвинули гипотезу, что каждая обобщенная тетраэдральная группа удовлетворяет альтернативе Титса. К настоящему времени эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп (см. [1, 2]), кроме групп, имеющих копредставление $\Gamma = \left\langle a,b,c \middle| a^{k_1} = b^{k_2} = c^{k_3} = (a^\alpha b^\beta)^2 = (b^\gamma c^\delta)^{k_4} = R_{13}(a,c)^n = 1 \right\rangle$, для которого выполнено одно из условий: 1) $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{n} \geq 1, k_4 = 2$; 2) $R_{13} = a^\eta c^\theta$, $n = 3,4,5$, $k_4 = 3$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} + \frac{1}{n} \geq \frac{7}{6}$; 3) $R_{13} = a^{\eta_1} c^{\theta_1} a^{\eta_2} c^{\theta_2}$, $k_4 = 3$, $\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3} \geq \frac{2}{3}$. В данной работе мы рассмотрим группы вида $\Gamma = \left\langle a,b,c \middle| a^3 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = (a^\alpha c)^2 = (b^\beta c)^2 = 1 \right\rangle$. Без ограничения общности мы можем считать, что $\alpha = 1$ (заменив в противном случае образующую a на $a_1 = a^2$). Если β нечетно, то подходящим автоморфизмом циклической группы $\langle b \mid b^8 = 1 \rangle$ мы можем перейти к следующему копредставлению группы Γ: $\Gamma = \left\langle a,b,c \middle| a^3 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = (ac)^2 = (bc)^2 = 1 \right\rangle$. Для таких групп Γ доказывается следующая

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma = \left\langle a,b,c \middle| a^3 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle$ *– обобщенная тетраэдральная группа, где* $R(a,b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \ldots a^{k_s} b^{l_s}$, $1 \leq k_i \leq 2$, $1 \leq l_i \leq 7$. *Положим* $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$. *В следующих случаях* Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса: 1)* s *– нечетное; 2)* s *– четное и либо* $K \not\equiv 0 \pmod 3$, либо $L \not\equiv 4 \pmod 8$; *3)* $s < 12$.

Рассмотрим подгруппу Γ_1 группы Γ, порожденную элементами a, b. Тогда $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma$, индекс $[\Gamma : \Gamma_1] = 2$ и Γ_1 имеет копредставление $\Gamma_1 = \left\langle a,b \middle| a^3 = b^8 = R(a,b)^2 = R(a^{-1}, b^{-1})^2 = 1 \right\rangle$. Таким образом, если Γ_1 содержит свободную неабелеву подгруппу, то и Γ содержит такую подгруппу.

Далее мы будем обозначать через $[A]$ образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A. Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется элементарной, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Неэлементарная подгруппа H из $PSL_2(\mathbb{C})$ содержит неабелеву свободную подгруппу [3]. Там же доказано, что если H порождена двумя элементами $[A]$, $[B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда H неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой диэдра в точности тогда, когда хотя бы два из трех чисел $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr} AB$ равны нулю. Конечными подгруппами в $PSL_2(\mathbb{C})$ являются: циклические группы, группы диэдра D_n, а также A_4, S_4, A_5. Нетрудно показать, что элемент $[X] \in PSL_2(\mathbb{C})$ имеет порядок $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} X = 2\cos\dfrac{\pi u}{n}$, где $(u,n)=1$. Гомоморфизм $\rho:\Gamma' = \left\langle a,b \,\middle|\, a^k = b^l = R(a,b)^m = R(a^{-1},b^{-1})^m = 1 \right\rangle \to PSL_2(\mathbb{C})$ будем называть существенным, если образы элементов $a,\ b,\ R(a,b),\ \ R(a^{-1},b^{-1})$ имеют порядки $k,\ l,\ m, m$ соответственно. Группу Γ' будем называть псевдоконечной, если образ $\rho(\Gamma')$ конечен для любого существенного представления ρ. Идея доказательства теоремы 1 состоит в том, чтобы построить представление $\rho: G \to PSL_2(\mathbb{C})$, где G – исследуемая группа, такое, что $\rho(G)$ – неэлементарная подгруппа. Мы используем стандартные факты и обозначения из теории характеров Фрике (см., например, [4-6])

Отметим также следующий факт: пара матриц $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} ABA^{-1}B^{-1} = 2$, а это равносильно условию

$$(\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB - 4 = 0. \tag{1}$$

Рассмотрим группу $\Gamma_1 = \left\langle a,b \,\middle|\, a^3 = b^8 = R(a,b)^2 = R(a^{-1},b^{-1})^2 = 1 \right\rangle$. Пусть $Q_R(x,y,z)$ – полином Фрике элемента R. Положим $g(z) = Q_R(1, 2\cos\dfrac{\pi}{8}, z)$. Если z_0 – корень $g(z)$, то существуют матрицы $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = 1$, $\operatorname{tr} B = 2\cos\dfrac{\pi}{8}$, $\operatorname{tr} AB = z_0$ и $\operatorname{tr} R(AB) = 0$ (см. [7], лемма 2). Тогда $[A]^3 = [B]^8 = R^2([A],[B]) = 1$ и, так как

$$\operatorname{tr} R(A^{-1}, B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A^{-1}, \operatorname{tr} B^{-1}, \operatorname{tr} A^{-1}B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} AB) = g(z_0) = 0,$$

то отображение $a \to [A]$, $b \to [B]$ задает представление группы Γ_1. Пусть z_0 – некоторый корень полинома $g(z)$. Обозначим через $G(z_0)$ группу, порожденную $[A]$, $[B]$. Так как $\operatorname{tr} A = 1$ и $\operatorname{tr} B = 2\cos\dfrac{\pi}{8}$, то $G(z_0)$ не является группой диэдра, а также отлична от групп A_4, S_4, A_5 [3]. Если z_0 не является корнем уравнения $z^2 - 2\cos\dfrac{\pi}{8} z - 3 + 4\cos^2\dfrac{\pi}{8} = 0$, т.е. $z_0 \ne 2\cos\dfrac{11\pi}{24}$, $z_0 \ne 2\cos\dfrac{5\pi}{24}$, то из (1) следует, что группа $G(z_0)$ неприводима, а следовательно неэлементарна. В этом случае группа Γ_1 содержит свободную неабелеву подгруппу.

Лемма 1. *Если s – нечетное, то существует существенный гомоморфизм $\rho:\Gamma_1 \to PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом.*

Доказательство. Пусть не существует существенного гомоморфизма $\rho:\Gamma_1 \to PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. В этом случае многочлен $g(z)$ имеет вид: $g(z) = A_0\left(z - 2\cos\dfrac{11\pi}{24}\right)^{s_1}\left(z - 2\cos\dfrac{5\pi}{24}\right)^{s_2}$, где $s_1 + s_2 = s$. Пусть для определенности $s_1 > s_2$. Чтобы найти коэффициент A_0, рассмотрим полиномы $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x) = 0$, $P_0(x) = 1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x) = xP_n(x) - P_{n-1}(x)$. В [8] доказано, что если $w = g^{u_1}h^{v_1}\cdots g^{u_s}h^{v_s} \in F_2$, где $s \ge 1$, — циклически редуцированное слово, и $x = \tau_g$, $y = \tau_h$, $z = \tau_{gh}$, то полином Фрике $Q_w \in \mathbb{Z}[x,y,z]$ имеет вид $Q_w(x,y,z) = M_s(x,y)z^s + \cdots + M_0(x,y)$, где $M_s(x,y) = \prod_{i=1}^{s} P_{u_i-1}(x)P_{v_i-1}(y)$. Следовательно, $A_0 = \prod_{i=1}^{s} P_{k_i-1}(1)P_{l_i-1}\left(2\cos\dfrac{\pi}{8}\right) = \left(2\cos\dfrac{\pi}{8}\right)^{h_1}\left(\sqrt{2}+1\right)^{h_2}\left(\sqrt{2}\right)^{h_3}$, где h_1 – количество двоек, четверок и шестерок среди l_i; h_2 – количество троек и пятерок среди l_i; h_3 – количество четверок среди l_i.

Имеем $g(z) = Q_R(1, 2\cos\dfrac{\pi}{8}, z) \in K[z]$, где $K = \mathbb{Q}(2\cos\dfrac{\pi}{8})$. Запишем

$$g(z)=A_0\left(z-2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{s_1-s_2}\left(z^2-2\cos\frac{\pi}{8}z-1+\sqrt{2}\right)^{s_2}.$$

Рассмотрим коэффициент $M_{s_1+s_2-1}=A_0\left(-2\cos\frac{11\pi}{24}(s_1-s_2)-2\cos\frac{\pi}{8}s_2\right)$ при $z^{s_1+s_2-1}$. Так как $2\cos\frac{11\pi}{24}\notin K$ и $s_1-s_2\neq 0$, то $M_{s_1+s_2-1}\notin K$. Получили противоречие. Аналогичный результат получим при $s_1<s_2$. Лемма доказана.

Лемма 2. Если $g(z)=A_0\left(z-2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{s_1}\left(z-2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{s_2}$, то s четно, $s_1=s_2$ и $K\equiv 0\ (\bmod 3)$, $L\equiv 4\ (\bmod 8)$, где $K=k_1+\ldots+k_s$, $L=l_1+\ldots+l_s$.

Доказательство. Если $s_1\neq s_2$, то $g(z)$ не может иметь требуемый вид, как следует из доказательства леммы 1. Положим $A=\begin{pmatrix}\varepsilon^8 & 1\\ 0 & \varepsilon^{-8}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\varepsilon^3 & 0\\ t & \varepsilon^{-3}\end{pmatrix}$, где $\varepsilon=\cos\frac{\pi}{24}+i\sin\frac{\pi}{24}$. Тогда $\operatorname{tr}A=2\cos\frac{\pi}{3}=1$, $\operatorname{tr}B=2\cos\frac{\pi}{8}$, $\operatorname{tr}AB=t+2\cos\frac{11\pi}{24}$. Имеем равенство $\operatorname{tr}R(A,B)=\ g\left(t+2\cos\frac{11\pi}{24}\right)=A_0t^{s_1}\left(t+2\cos\frac{11\pi}{24}-2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{s_2}$. В этом случае свободный член в $g\left(t+2\cos\frac{11\pi}{24}\right)$ равен нулю.

С другой стороны, свободный член полинома $\operatorname{tr}R(A,B)$ равен $2\cos\frac{8K+3L}{24}\pi$. Следовательно, $K\equiv 0\ (\bmod 3)$, $L\equiv 4\ (\bmod 8)$.

Следствие. *Если s – нечетное или s – четное и существует существенный гомоморфизм $\rho:\Gamma_1\to PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом, то группа Γ_1 содержит неабелеву свободную подгруппу.*

Таким образом, в дальнейшем будем рассматривать группы, для которых $K\equiv 0\ (\bmod 3)$, $L\equiv 4\ (\bmod 8)$. Рассмотрим группу $H_1=\left\langle a_1,b_1\,\middle|\,a_1^3=b_1^4=R_1(a_1,b_1)^2=R_1(a_1^{-1},b_1^{-1})^2=1\right\rangle$, где $R_1(a_1,b_1)=a_1^{u_1}b_1^{v_1}\ldots a_1^{u_t}b_1^{v_t}$ – циклическая редукция слова $R(a_1,b_1)$ в свободном произведении $\left\langle a_1\mid a_1^3=1\right\rangle*\left\langle b_1\mid b_1^4=1\right\rangle$. Пусть $U=u_1+\ldots+u_t$, $V=v_1+\ldots+v_t$. Тогда $K\equiv U\ (\bmod 3)$, $L\equiv V\ (\bmod 4)$ т. е. $U=3U_1$, $V=4V_1$. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\varphi:\Gamma_1\to H_1: a\mapsto a_1, b\mapsto b_1$. Если H_1 содержит свободную неабелеву подгруппу, то этим же свойство обладает и группа Γ_1. Если $t=0$, т. е. R_1 – пустое слово, то H_1 является свободным произведением циклических групп порядка 3 и 4, а поэтому содержит неабелеву свободную подгруппу. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $t>0$.

Лемма 3. *Если $U=3U_1$, $V=4V_1$ и $t<12$, то с точностью до изоморфизма существует 5 псевдоэлементарных групп $T_i=\left\langle a_1,b_1\,\middle|\,a_1^3=b_1^4=R_{1,i}(a_1,b_1)^2=R_{1,i}(a_1^{-1},b_1^{-1})^2=1\right\rangle$. Соответствующие слова $R_{1,i}(a_1,b_1)$ имеют вид:* $R_{1,1}=a_1b_1^2a_1^2b_1^2$, $R_{1,2}=a_1b_1a_1^2b_1^2a_1^2b_1^3a_1^2b_1^2$, $R_{1,3}=a_1b_1a_1b_1^3a_1^2b_1^2a_1b_1^3a_1^2b_1a_1^2b_1^2$, $R_{1,4}=a_1b_1a_1^2b_1a_1b_1^3a_1^2b_1^2a_1b_1a_1^2b_1^3a_1b_1^3a_1^2b_1^2$, $R_{1,5}=a_1b_1a_1^2b_1a_1b_1^3a_1^2b_1^3a_1b_1^2a_1^2b_1a_1b_1^3a_1^2b_1^3a_1b_1a_1^2b_1^2$.

Псевдоконечные группы из леммы 3 найдены с помощью компьютерных вычислений с программой Maple. Следующая лемма завершает доказательство теоремы 1.

Лемма 4. *Группы T_i, $1\le i\le 5$, содержат неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. Рассмотрим факторгруппы

$T_i' = \left\langle a_{1,i}, b_{1,i} \middle| a_{1,i}^3 = b_{1,i}^2 = R_{1,i}'(a_{1,i}, b_{1,i})^2 = R_{1,i}'(a_{1,i}^{-1}, b_{1,i}^{-1})^2 = 1 \right\rangle$ групп T_i где $R_{1,i}'(a_{1,i}, b_{1,i})$ – циклическая редукция слова $R_{1,i}(a_{1,i}, b_{1,i})$ в свободном произведении $\langle a_{1,i} \mid a_{1,i}^3 = 1 \rangle * \langle b_{1,i} \mid b_{1,i}^2 = 1 \rangle$. Ясно, что группы T_i' имеют копредставление $T_i' = \left\langle a_{1,i}, b_{1,i} \middle| a_{1,i}^3 = b_{1,i}^2 = 1 \right\rangle$, т. е. являются свободным произведением циклических групп порядка 2 и 3, а поэтому содержат неабелеву свободную подгруппу. Следовательно, группы T_i также содержат неабелеву свободную подгруппу.

Рассмотрим теперь группу Γ с копредставлением

$$\Gamma = \left\langle a, b, c \middle| a^3 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = (ac)^2 = (b^{2\beta} c)^2 = 1 \right\rangle.$$

Справедлива

Теорема 2. *Группа* $\Gamma = \left\langle a, b, c \middle| a^3 = b^8 = c^2 = R(a,b)^2 = (ac)^2 = (b^{2\beta} c)^2 = 1 \right\rangle$. *содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.*

Доказательство. Пусть $R(a,b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \dots a^{k_s} b^{l_s}$, $1 \le k_i \le 2$, $1 \le l_i \le 7$. Положим $K = k_1 + \dots + k_s$, $L = l_1 + \dots + l_s$. Если либо $K \not\equiv 0 \pmod 3$, либо $L \not\equiv 4 \pmod 8$, то из леммы 2 следует, что полином Фрике $g(z) = Q_R(1, 2\cos\frac{\pi}{8}, z)$ отличен от $A_0\left(z - 2\cos\frac{11\pi}{24}\right)^{s_1}\left(z - 2\cos\frac{5\pi}{24}\right)^{s_2}$. Следовательно, группа $G = \langle a, b \mid a^3 = b^8 = R(a,b)^2 = 1 \rangle$ имеет представление ρ в $PSL_2(\mathbb{C})$ с неэлементарным образом. Пусть $\rho(a) = [A], \rho(b) = [B]$. Нетрудно показать, что найдется матрица C такая, что $\operatorname{tr} AC = \operatorname{tr} BC = 0$. Тогда справедливы соотношения

$$[A]^3 = [B]^8 = [C]^2 = R^2([A],[B]) = ([A][C])^2 = ([B]^{2\beta}[C])^2 = 1,$$

т.е. группа $\langle [A],[B],[C] \rangle$ является гомоморфным образом Γ. Поскольку подгруппа $\langle [A],[B] \rangle$ содержит неабелеву свободную подгруппу, то и Γ обладает этим свойством.

Пусть теперь $K \equiv 0 \pmod 3$, $L \equiv 4 \pmod 8$. Рассмотрим группу $\Gamma_2 = \left\langle a_1, b_1, c_1 \middle| a_1^3 = b_1^2 = c_1^2 = R_1(a_1, b_1)^2 = (a_1 c_1)^2 = 1 \right\rangle$, где $R_1(a_1, b_1) = a_1^{u_1} b_1 \dots a_1^{u_r} b_1$ – циклически редуцированное слово, получающееся из $a_1^{k_1} b_1^{l_1} \dots a_1^{k_s} b_1^{l_s}$ в свободном произведении $\langle a_1 \mid a_1^3 = 1 \rangle * \langle b_1 \mid b_1^2 = 1 \rangle$. Очевидно, группа Γ_2 является факторгруппой группы Γ. Поскольку $L \equiv 4 \pmod 8$, то r – четно. Группа Γ_2 следующим образом разлагается в свободное произведение с объединенной подгруппой:

$$\Gamma_2 = \langle a_1, b_1 \mid a_1^3 = b_1^2 = R(a_1, b_1)^2 = 1 \rangle *_{\langle a_1 \mid a_1^3 = 1 \rangle} \langle a_1, c_1 \mid a_1^3 = c_1^2 = (a_1 c_1)^2 = 1 \rangle.$$

Поскольку группа $H = \langle a_1, b_1 \mid a_1^3 = b_1^2 = R(a_1, b_1)^2 = 1 \rangle$ либо бесконечна, либо имеет порядок больше 6 (это следует из классификации конечных обобщенных треугольных групп в [10]), то индекс циклической подгруппы $\langle a_1 \mid a_1^3 = 1 \rangle$ в H отличен от 2. Хорошо известно, что в этом случае свободное произведение с объединенной подгруппой содержит неабелеву свободную подгруппу. Теорема 2 доказана.

1. Fine B., Rosenberger G. // Algebraic generalizations of discrete groups. New York, 1999. P. 274.
2. Howie J., Kopteva N. // J. Group Theory. 2006. Vol. 9. P. 173.
3. Majeed A., Masson A.W. // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19. P. 45.
4. Horowitz R. // Comm. Pure Appl. Math. 1972. Vol. 25. P. 635.
5. Magnus W. // Result. der Math. 1981. Vol. 4. P. 171.
6. Culler M., Shalen P. // Ann. of Math. 1983. V. 117. P. 109.

7. Беняш-Кривец В.В., Хуа Сюин. // Известия Гомельского госуниверситета. 2008. № 2 (74). С. 13.
8. Traina C. // Proc. Amer. Math. Soc. 1980. Vol. 79. P. 369.
9. Vinberg E.B., Kaplinsky R. // Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects. Papers from the conference, Bielefeld, 1999. Cambridge, 2004. LMS Lecture Note Series 311. P. 564.
10. Howie J., Metafsis V., Thomas R. // Trans. Amer. Math. Soc. 1995. Vol. 347. P. 3613.