В.В. БЕНЯШ-КРИВЕЦ, Я.А. ЖУКОВЕЦ

О СВОБОДНЫХ ПОДГРУППАХ В ОБОБЩЕННЫХ ТЕТРАЭДРАЛЬНЫХ ГРУППАХ ТИПА (4,6,2,2,2,2)

We consider generalized tetraedron groups Γ of tipe (4, 6, 2, 2, 2, 2). Some sufficient conditions Γ to contain a non-abelian free subgroup are found.

Обобщенные тетраэдральные группы имеют копредставление вида

$$\Gamma = \left\langle x_1, x_2, x_3 \,\middle|\, x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = R_{12}(x_1,x_2)^l = R_{23}(x_2,x_3)^m = R_{13}(x_1,x_3)^n = 1 \right\rangle,$$

где $k_1, k_2, k_3, l, m, n \geq 2$, $R_{ij}(x_i, x_j)$ – циклически редуцированное слово в свободном произведении $\left\langle x_i \,\middle|\, x_i^{k_i} = 1 \right\rangle * \left\langle x_j \,\middle|\, x_j^{k_j} = 1 \right\rangle$, которое не является собственной степенью. В [1] выдвинута гипотеза, что обобщенные тетраэдральные группы удовлетворяют альтернативе Титса, т. е. каждая такая группа содержит либо разрешимую подгруппу конечного индекса, либо свободную подгруппу ранга 2. К настоящему времени эта гипотеза доказана для всех обобщенных тетраэдральных групп, кроме групп следующих типов [1, 2]:

1. $\left\langle x_1, x_2, x_3 \,\middle|\, x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^{\alpha} x_2^{\beta})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^2 = R_{13}(x_1,x_3)^n = 1 \right\rangle$, $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} + \dfrac{1}{n} \geq 1$;
2. $\left\langle x_1, x_2, x_3 \,\middle|\, x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^{\alpha} x_2^{\beta})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^3 = (x_1^{\eta} x_3^{\theta})^n = 1 \right\rangle$, $n = 3, 4, 5$, $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} + \dfrac{1}{n} \geq \dfrac{7}{6}$;
3. $\left\langle x_1, x_2, x_3 \,\middle|\, x_1^{k_1} = x_2^{k_2} = x_3^{k_3} = (x_1^{\alpha} x_2^{\beta})^2 = (x_2^{\gamma} x_3^{\delta})^3 = (x_1^{\eta_1} x_3^{\theta_1} x_1^{\eta_2} x_3^{\theta_2})^2 = 1 \right\rangle$, $\dfrac{1}{k_1} + \dfrac{1}{k_2} + \dfrac{1}{k_3} \geq \dfrac{2}{3}$.

В данной работе мы рассматриваем группы вида $\Gamma = \left\langle a,b,c \,\middle|\, a^4 = b^6 = c^2 = R(a,b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle$. Доказывается следующая

Теорема. *Пусть* $\Gamma = \left\langle a,b,c \,\middle|\, a^4 = b^6 = c^2 = R(a,b)^2 = (bc)^2 = (ac)^2 = 1 \right\rangle$ – *обобщенная тетраэдральная группа, где* $R(a,b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \ldots a^{k_s} b^{l_s}$, $1 \leq k_i \leq 3$, $1 \leq l_i \leq 5$, $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$. *Если выполнено одно из условий:*

1) либо $2 \nmid K$, *либо* $3 \nmid L$;

2) $K = 2K_1, L = 3L_1$, $K_1, L_1 \in \mathbb{N}$, *и* $K_1 + L_1 \equiv 0 \pmod 2$;

3) $2 \mid K$ *и* $6 \mid L$;

4) $4 \mid K$, $L \equiv 3 \pmod 6$ *и* $s < 12$,

то Γ *содержит неабелеву свободную подгруппу и, следовательно, удовлетворяет альтернативе Титса.*

Рассмотрим подгруппу Γ_1 группы Γ, порожденную элементами a, b. Тогда $\Gamma_1 \triangleleft \Gamma$ и она имеет копредставление: $\Gamma_1 = \left\langle a,b \,\middle|\, a^4 = b^6 = R(a,b)^2 = R(a^{-1},b^{-1})^2 = 1 \right\rangle$, где $R(a,b) = a^{k_1} b^{l_1} a^{k_2} b^{l_2} \ldots a^{k_s} b^{l_s}$, $1 \leq k_i \leq 3$, $1 \leq l_i \leq 5$. Таким образом, если Γ_1 содержит свободную неабелеву подгруппу, то и Γ содержит такую подгруппу.

Далее мы будем обозначать через $[A]$ образ матрицы $A \in SL_2(\mathbb{C})$ в $PSL_2(\mathbb{C})$, через $\operatorname{tr} A$ – след матрицы A. Подгруппа $H \subset PSL_2(\mathbb{C})$ называется элементарной, если любые два элемента бесконечного порядка из H имеют общий ненулевой собственный вектор. Неэлементарная подгруппа H из $PSL_2(\mathbb{C})$ содержит неабелеву свободную подгруппу [3]. Там же доказано, что если H порождена двумя элементами $[A]$, $[B]$, то H неэлементарна тогда и только тогда, когда неприводима, бесконечна и отлична от бесконечной группы диэдра. При этом H является бесконечной группой диэдра в точности тогда, когда хотя бы два из трех чисел $\operatorname{tr} A$, $\operatorname{tr} B$, $\operatorname{tr} AB$ равны нулю. Конечными подгруппами в $PSL_2(\mathbb{C})$ являются: циклические группы, группы диэдра D_n, а также A_4, S_4, A_5. Нетрудно показать, что элемент $[X] \in PSL_2(\mathbb{C})$ имеет порядок $n \geq 2$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} X = 2\cos\dfrac{\pi u}{n}$, где $(u,n)=1$. Гомоморфизм $\rho:\Gamma' = \langle a,b \,|\, a^k = b^l = R(a,b)^m = R(a^{-1},b^{-1})^m = 1\rangle \to PSL_2(\mathbb{C})$ будем называть существенным, если образы элементов $a,\ b,\ R(a,b),\ \ R(a^{-1},b^{-1})$ имеют порядки $k,\ l,\ m, m$ соответственно. Группу Γ' будем называть псевдоконечной (псевдоэлементарной), если образ $\rho(\Gamma')$ конечен (псевдоэлементарен) для любого существенного представления ρ.

Идея доказательства теоремы состоит в том, чтобы построить представление $\rho: G \to PSL_2(\mathbb{C})$, где G – исследуемая группа, такое, что $\rho(G)$ – неэлементарная подгруппа в $PSL_2(\mathbb{C})$. Тогда $\rho(G)$, а, следовательно, и G, содержит неабелеву свободную подгруппу.

Для произвольного элемента $w \in F_2$, где F_2 – свободная группа с базисом g_1, g_2, рассмотрим следующую функцию:

$$\tau_w : SL_2(\mathbb{C})^2 \to \mathbb{C},\ \ \tau_w(A,B,C) = \operatorname{tr} w(A,B,C).$$

Функцию τ_w обычно называют характером Фрике. Справедливы следующие соотношения между характерами Фрике:

$$\tau_{w^{-1}} = \tau_w, \quad \tau_{uv} = \tau_u\tau_v - \tau_{u^{-1}v}.$$

В [4] доказано, что если $w = g^{u_1}h^{v_1}\cdots g^{u_s}h^{v_s}$ – циклически редуцированное слово в F_2 и $x = \tau_g,\ y = \tau_h,\ z = \tau_{gh}$, то $\tau_w = Q_w(x,y,z)$, где $Q_w \in \mathbb{Z}[x,y,z]$ – однозначно определенный многочлен с целыми коэффициентами, который называют многочленом Фрике элемента w.

Отметим также следующий факт [5]: пара матриц $A,B \in SL_2(\mathbb{C})$ порождает приводимую подгруппу тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} ABA^{-1}B^{-1} = 2$, а это равносильно условию

$$(\operatorname{tr} A)^2 + (\operatorname{tr} B)^2 + (\operatorname{tr} AB)^2 - \operatorname{tr} A \operatorname{tr} B \operatorname{tr} AB - 4 = 0. \tag{4}$$

Лемма 1 [6]. *Для любой тройки значений* $x_0, y_0, z_0 \in \mathbb{C}$ *существует пара матриц* $A_0, B_0 \in SL_2(\mathbb{C})$ *таких, что* $\operatorname{tr} A_0 = x_0, \operatorname{tr} B_0 = y_0, \operatorname{tr} A_0B_0 = z_0$.

Рассмотрим группу $\Gamma_1 = \langle a,b \,|\, a^4 = b^6 = R(a,b)^2 = R(a^{-1},b^{-1})^2 = 1\rangle$. Пусть $Q_R(x,y,z)$ – полином Фрике элемента R. Положим

$$g(z) = Q_R\left(2\cos\frac{\pi}{4},\ 2\cos\frac{\pi}{6},\ z\right). \tag{5}$$

Если z_0 – корень $g(z)$, то по лемме 1 существуют матрицы $A,B \in SL_2(\mathbb{C})$ такие, что $\operatorname{tr} A = 2\cos\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{tr} B = 2\cos\dfrac{\pi}{6}$, $\operatorname{tr} AB = z_0$ и $\operatorname{tr} R(AB) = 0$. Тогда $[A]^4 = [B]^6 = R^2([A],[B]) = 1$ и, так как $\operatorname{tr} R(A^{-1},B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A^{-1}, \operatorname{tr} B^{-1}, \operatorname{tr} A^{-1}B^{-1}) = Q_R(\operatorname{tr} A, \operatorname{tr} B, \operatorname{tr} AB) = g(z_0) = 0$, то отображение $a \to [A],\ \ b \to [B]$ задает представление группы Γ_1.

Пусть z_0 – некоторый корень полинома $g(z)$. Обозначим через $G(z_0)$ группу, порожденную $[A],\ [B]$. Так как $\operatorname{tr} A = 2\cos\dfrac{\pi}{4}$ и $\operatorname{tr} B = 2\cos\dfrac{\pi}{6}$, то $G(z_0)$ не совпадает с группами A_4, S_4, A_5 (в которых нет элементов порядка 6) и не является группой диэдра [6].

Если z_0 не является корнем уравнения

$$z^2 - \sqrt{6}z + 1 = 0, \tag{6}$$

то из (4) следует, что группа $G(z_0)$ неприводима. В этом случае $G(z_0)$ с точностью до сопряжения определена однозначно. Несложно убедиться, что $z_1 = 2\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = 2\cos\dfrac{5\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$ являются корнями уравнения (6).

Если группа $\langle [A],\ [B]\rangle$ неприводима, то она содержит свободную неабелеву группу, так как не является элементарной подгруппой в $PSL_2(\mathbb{C})$. В этом случае группа Γ_1 также содержит свободную неабелеву подгруппу.

Лемма 2. *Если для всех корней* z_0 *многочлена* $g(z)$ *группа* $G(z_0)$ *приводима, то* $K = 2K_1,\ L = 3L_1,\ K_1, L_1 \in \mathbb{N}$ *и* $K_1 + L_1 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2)$.

Доказательство. При выполнении условий леммы 2 многочлен $g(z)$ имеет корни $z_1 = 2\cos\frac{\pi}{12}$, $z_2 = 2\cos\frac{5\pi}{12}$. Следовательно, $g(z) = A_0\left(z - 2\cos\frac{\pi}{12}\right)^{s_1}\left(z - 2\cos\frac{5\pi}{12}\right)^{s_2}$, где $s_1 \neq 0$ или $s_2 \neq 0$. Пусть для определенности $s_2 \neq 0$. Положим $A = \begin{pmatrix} \varepsilon^6 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-6} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} \varepsilon^4 & 0 \\ t & \varepsilon^{-4} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{24} + i\sin\frac{\pi}{24}$. Тогда $\mathrm{tr}\,A = 2\cos\frac{\pi}{4}$, $\mathrm{tr}\,B = 2\cos\frac{\pi}{6}$, $\mathrm{tr}\,AB = t + 2\cos\frac{5\pi}{12}$. Имеем равенство $\mathrm{tr}\,R(A,B) = g\left(t + 2\cos\frac{5\pi}{12}\right) = A_0\left(t + 2\cos\frac{5\pi}{12} - 2\cos\frac{\pi}{12}\right)^{s_1} t^{s_2}$. В этом случае свободный член полинома $g(t + 2\cos\frac{5\pi}{12})$ равен нулю. С другой стороны, свободный член полинома $\mathrm{tr}\,R(A,B)$ равен $2\cos\frac{6K+4L}{24}\pi = 2\cos\frac{3K+2L}{12}\pi$, где $K = k_1 + \ldots + k_s$, $L = l_1 + \ldots + l_s$. Таким образом, $3K + 2L \equiv 6 \,(\mathrm{mod}\,12)$. Значит, $K \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)$ и $L \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\,3)$, т. е. $L = 3L_1, K = 2K_1$, и

$$K_1 + L_1 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2). \tag{7}$$

Следствие 1. *Если* $2 \nmid K$, *либо* $3 \nmid L$, *либо* $K = 2K_1$, $L = 3L_1$ *и* $K_1 + L_1 \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ 2)$, *то теорема справедлива*.

Учитывая следствие 1, в дальнейшем будем считать, что $L = 3L_1$, $K = 2K_1$ *и* $K_1 + L_1 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\ 2)$.

Вначале рассмотрим случай 3 теоремы. Пусть $L = 6L_1, K = 2K_1$. Ввиду следствия 1 K_1 нечетно. Рассмотрим группу $H_1 = \left\langle a_1, b_1 \middle| a_1^{\,2} = b_1^{\,6} = R_1(a_1,b_1)^2 = R_1(a_1^{-1}, b_1^{-1})^2 = 1 \right\rangle$, где $R_1(a_1,b_1) = a_1 b_1^{m_1} \ldots a_1 b_1^{m_r}$ – циклическая редукция слова $R(a_1,b_1)$ в свободном произведении $\left\langle a_1 \mid a_1^2 = 1 \right\rangle * \left\langle b_1 \mid b_1^6 = 1 \right\rangle$. Пусть $M = m_1 + \ldots + m_r$. Тогда $M \equiv L \,(\mathrm{mod}\,6)$, в частности, $M = 6M_1$ и $r \equiv K \,(\mathrm{mod}\,2)$, т. е. $r = 2r_1$. Отображение $\varphi : \Gamma_1 \to H_1$, $a \mapsto a_1, b \mapsto b_1$ является сюръективным гомоморфизмом. Поэтому если H_1 содержит свободную неабелеву подгруппу, то этим же свойство обладает и группа Γ_1. Отметим, что если $r = 0$, т. е. R_1 – пустое слово, то H_1 является свободным произведением циклических групп порядка 2 и 6, а поэтому содержит неабелеву свободную подгруппу. Поэтому будем считать в дальнейшем, что $r > 0$.

Пусть $\rho : H_1 \to PSL_2(\mathbb{C})$: $a_1 \mapsto [A_1]$, $b_1 \mapsto [B_1]$ – существенный гомоморфизм. Тогда $\mathrm{tr}\,A_1 = 0$, $\mathrm{tr}\,B_1 = \sqrt{3}$, и, следовательно, группа $\langle [A_1],\ [B_1] \rangle$ является неприводимой и конечной тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\,A_1B_1 = 0$, т. е. $\langle [A_1],\ [B_1] \rangle$ – группа диэдра порядка 12 [6]. Из равенства (4) следует, что $\langle [A_1],\ [B_1] \rangle$ приводима тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\,A_1B_1 = \pm 1$.

Таким образом, если $\mathrm{tr}\,A_1B_1 \notin \{0, 1, -1\}$, то группа $\langle [A_1],\ [B_1] \rangle$, а вместе с ней и группы H_1 и Γ_1 содержат неабелеву свободную подгруппу.

Пусть для любого существенного гомоморфизма $\rho : H_1 \to PSL_2(\mathbb{C})$ справедливо $\mathrm{tr}\,A_1B_1 \in \{0, 1, -1\}$. Тогда

$$\mathrm{tr}\,R_1(A_1,B_1) = A_0 \cdot (\mathrm{tr}\,A_1B_1)^{s_1} \cdot \left(\mathrm{tr}\,A_1B_1 - 1\right)^{s_2} \cdot \left(\mathrm{tr}\,A_1B_1 + 1\right)^{s_3},\ \ s_1 + s_2 + s_3 = r.$$

Лемма 4. *Если для любого существенного гомоморфизма* $\rho : H_1 \to PSL_2(\mathbb{C})$ *справедливо* $\mathrm{tr}\,A_1B_1 \in \{0, 1, -1\}$, *то* $\mathrm{tr}\,R_1(A_1, B_1) = A_0 \cdot (\mathrm{tr}\,A_1B_1)^r$.

Доказательство. Положим $A_1=\begin{pmatrix}\varepsilon^6 & 1\\ 0 & \varepsilon^{-6}\end{pmatrix}, B_1=\begin{pmatrix}\varepsilon^2 & 0\\ t & \varepsilon^{-2}\end{pmatrix}$, где $\varepsilon=\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}$. Тогда $\operatorname{tr}A_1=0$, $\operatorname{tr}B_1=2\cos\frac{\pi}{6}$, $\operatorname{tr}A_1B_1=t-1$ и

$$\operatorname{tr}R_1(A_1,B_1)=A_0\cdot(t-1)^{s_1}\cdot(t-2)^{s_2}\cdot(t)^{s_3}. \quad (8)$$

Свободный член полинома $\operatorname{tr}R_1(A_1,B_1)$ равен $2\cos\frac{6r+2M}{12}\pi=2\cos(r_1+M_1)\pi=\pm2$. В силу (8) $s_3=0$. Если рассмотреть матрицы $A_1=\begin{pmatrix}\varepsilon^6 & 1\\ 0 & \varepsilon^{-6}\end{pmatrix}$, $B_1'=\begin{pmatrix}\varepsilon^{-2} & 0\\ t & \varepsilon^{2}\end{pmatrix}$, то аналогично получим, что $s_2=0$. Лемма доказана.

Лемма 5. *Если для любого существенного гомоморфизма* $\rho: H_1\to PSL_2(\mathbb{C})$ *справедливо* $\operatorname{tr}A_1B_1=0$, *то в слове* $R_1(a_1,b_1)=a_1b_1^{m_1}...a_1b_1^{m_r}$ *среди* m_i *встречается ровно одна тройка и* $m_i\neq2$, $m_i\neq4$ *для всех* i. *В частности, полином Фрике* $\tau_{R_1}(0,\sqrt{3},z)=2z^r$.

Доказательство. Вновь положим $A_1=\begin{pmatrix}\varepsilon^6 & 1\\ 0 & \varepsilon^{-6}\end{pmatrix}$, $B_1=\begin{pmatrix}\varepsilon^2 & 0\\ t & \varepsilon^{-2}\end{pmatrix}$ с прежними обозначениями. По лемме 4 $\operatorname{tr}R_1(A_1,B_1)=A_0\cdot(\operatorname{tr}A_1B_1)^r$.

Чтобы найти коэффициент A_0, рассмотрим полиномы $P_n(x)$, которые удовлетворяют начальным условиям $P_{-1}(x)=0$, $P_0(x)=1$ и рекуррентному соотношению $P_{n+1}(x)=xP_n(x)-P_{n-1}(x)$ для $n>0$. Если $n<0$, то положим $P_n(x)=-P_{|n|-2}(x)$. В [7] доказано, что если $w=g^{u_1}h^{v_1}\cdots g^{u_s}h^{v_s}\in F_2$, где $s\geq1$, — циклически редуцированное слово, и $x=\tau_g$, $y=\tau_h$, $z=\tau_{gh}$, то полином Фрике Q_w имеет вид $Q_w(x,y,z)=N_s(x,y)z^s+\dots+N_0(x,y)$, где $N_s(x,y)=\prod_{i=1}^{s}P_{u_i-1}(x)P_{v_i-1}(y)$. В нашем случае $u_i=1, v_i\in\{1,2,3,4,5\}$. Следовательно, $A_0=\prod_{i=1}^{s}P_{k_i-1}(0)P_{l_i-1}(\sqrt{3})=(\sqrt{3})^{h_2+h_4}(2)^{h_3}$, где h_2 – количество двоек среди v_i; h_3 – количество троек среди v_i; h_4 – количество четверок среди v_i.

Свободный член полинома $\operatorname{tr}R_1(A_1,B_1)$ будет иметь вид

$$(-1)^r(\sqrt{3})^{h_2+h_4}(2)^{h_3}.$$

Из доказательства леммы 4 следует, что свободный член $\operatorname{tr}R_1(A_1,B_1)$ равен ±2. Таким образом, $(\sqrt{3})^{h_2+h_4}(2)^{h_3}=2$, из чего следует, что $h_2=h_4=0$, $h_3=1$.

Лемма 6. *Пусть* $w=ab^{m_1}\dots ab^{m_s}$ *– элемент свободной группы с образующими* a,b *и пусть* $m_i\in\{1,3,5\}$. *Тогда полином* $f(z)=\tau_w(0,\sqrt{3},z)$ *имеет целые коэффициенты. Если* s *четно и среди* m_i *встречается ровно одна тройка, то не все коэффициенты* $f(z)$ *являются четными.*

Доказательство. Индукция по s. Если $s=1$, то $f(z)=z,2z,-z$ при $w=ab,ab^3,ab^5$ соответственно. Если $s>1$, то

$$\tau_w=\tau_{ab^{m_1}}\tau_{ab^{m_2}\dots ab^{m_s}}-\tau_{ab^{m_3}\dots ab^{m_{s-1}}ab^{m_2+m_s-m_1}}.$$

Так как $m_2+m_s-m_1$ нечетно, то по предположению индукции полиномы $\tau_{ab^{m_2}\dots ab^{m_s}}(0,\sqrt{3},z)$ и $\tau_{ab^{m_3}\dots ab^{m_{s-1}}ab^{m_2+m_s-m_1}}(0,\sqrt{3},z)$ имеют целые коэффициенты. Следовательно, $f(z)$ также имеет целые коэффициенты.

Пусть теперь s четно и среди m_i встречается ровно одна тройка. Тогда можно считать, что

$m_1 = 3$. Снова используем индукцию по s. При $s = 2$ имеем

$$\tau_{ab^3ab}(0,\sqrt{3},z) = 2z^2 + 1, \quad \tau_{ab^3ab^5}(0,\sqrt{3},z) = -2z^2 + 1.$$

При $s > 2$ имеем

$$\tau_w(0,\sqrt{3},z) = 2z\tau_{ab^{m_2}\ldots ab^{m_s}}(0,\sqrt{3},z) - \tau_{ab^{m_3}\ldots ab^{m_{s-1}}ab^{m_2+m_s-3}}(0,\sqrt{3},z).$$

Выше мы уже доказали, что полиномы $\tau_{ab^{m_2}\ldots ab^{m_s}}(0,\sqrt{3},z)$ и $\tau_{ab^{m_3}\ldots ab^{m_{s-1}}ab^{m_2+m_s-3}}(0,\sqrt{3},z)$ имеют целые коэффициенты. Если $m_2 + m_s - 3 \in \{1,5\}$, то старший коэффициент полинома $\tau_{ab^{m_3}\ldots ab^{m_{s-1}}ab^{m_2+m_s-3}}(0,\sqrt{3},z)$ равен ± 1, а если $m_2 + m_s - 3 = 3$, то по предположению индукции, не все коэффициенты полинома $\tau_{ab^{m_3}\ldots ab^{m_{s-1}}ab^{m_2+m_s-3}}(0,\sqrt{3},z)$ четные. В обоих случаях не все коэффициенты $f(z)$ являются четными. Лемма доказана.

Следствие 2. *Группа* $H_1 = \left\langle a_1, b_1 \middle| a_1^{\,2} = b_1^{\,6} = R_1(a_1,b_1)^2 = R_1(a_1^{-1},b_1^{-1})^2 = 1 \right\rangle$, *где* $R_1(a_1,b_1) = a_1 b_1^{m_1} \ldots a_1 b_1^{m_r}$, $M = m_1 + \ldots + m_r \equiv 0 \pmod 6$ *и* r *четно, не является псевдоэлементарной. Значит, при* $K \vdots 2$ *и* $L \vdots 6$ *теорема справедлива.*

Остался нерассмотренным случай $K = 4K_1$ и $L \equiv 3 \pmod 6$. Рассмотрим группу $H_2 = \left\langle a_2, b_2 \middle| a_2^{\,4} = b_2^{\,3} = R_2(a_2,b_2)^2 = R_2(a_2^{-1},b_2^{-1})^2 = 1 \right\rangle$, где $R_2(a_2,b_2) = a_2^{\,u_1} b_2^{v_1} \ldots a_2^{\,u_t} b_2^{v_t}$ – циклическая редукция слова $R(a_2,b_2)$ в свободном произведении $\langle a_2 \mid a_2^4 = 1\rangle * \langle b_2 \mid b_2^3 = 1\rangle$. Пусть $U = u_1 + \ldots + u_t$, $V = v_1 + \ldots + v_t$. Тогда $L \equiv V \pmod 3$, $U \equiv K \pmod 4$, т. е. $V = 3V_1$, $U = 4U_1$. Рассмотрим сюръективный гомоморфизм $\varphi : \Gamma_1 \to H_2 : a \mapsto a_2, b \mapsto b_2$. Если H_2 содержит свободную неабелеву подгруппу, то этим же свойство обладает и группа Γ_1. Если $t = 0$, т. е. R_2 – пустое слово, то H_2 является свободным произведением циклических групп порядка 4 и 3, а поэтому содержит неабелеву свободную подгруппу. Поэтому в дальнейшем будем считать, что $t > 0$.

Пусть $\rho : H_2 \to PSL_2(\mathbb{C})$: $a_2 \mapsto [A_2]$, $b_2 \mapsto [B_2]$, – существенный гомоморфизм. Тогда $\mathrm{tr}\, A_2 = \sqrt{2}$, $\mathrm{tr}\, B_2 = 1$, и, следовательно, группа $\langle [A_2], [B_2] \rangle$ –конечная тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\, A_2 B_2 = 0$ или $\mathrm{tr}\, A_2 B_2 = \sqrt{2}$ [6]. Из равенства (4) следует, что $\langle [A_2], [B_2] \rangle$ приводима тогда и только тогда, когда $\mathrm{tr}\, A_2 B_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\pm\sqrt{3} - 1\right)$.

Таким образом, если $\mathrm{tr}\, A_2 B_2 \notin \left\{0, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\sqrt{3}-1\right)\right\}$, то группа $\langle [A_2], [B_2] \rangle$, а вместе с ней и группы H_2 и Γ_1 содержат неабелеву свободную подгруппу.

Пусть для любого существенного гомоморфизма $\rho : H_2 \to PSL_2(\mathbb{C})$ справедливо $\mathrm{tr}\, A_2 B_2 \in \left\{0, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\right\}$. Тогда

$$\mathrm{tr}\, R_2(A_2,B_2) = A_0 \cdot (\mathrm{tr}\, A_2 B_2)^{s_1} \cdot \left(\mathrm{tr}\, A_2 B_2 - \sqrt{2}\right)^{s_2} \cdot \left(\mathrm{tr}\, A_2 B_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right)\right)^{s_3} \cdot \left(\mathrm{tr}\, A_2 B_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\right)^{s_4},$$

$$s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = t.$$

Лемма 7. *Если для любого существенного гомоморфизма* $\rho : H \to PSL_2(\mathbb{C})$ *справедливо* $\mathrm{tr}\, A_2 B_2 \in \left\{0, \sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+\sqrt{3}\right), \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\right\}$, *то* $\mathrm{tr}\, R_2(A_2,B_2) = A_0 \cdot (\mathrm{tr}\, A_2 B_2)^{s_1} \cdot \left(\mathrm{tr}\, A_2 B_2 - \sqrt{2}\right)^{s_2}$, $s_1 + s_2 = t$.

Доказательство. Положим $A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^4 & 0 \\ t & \varepsilon^{-4} \end{pmatrix}$, где $\varepsilon = \cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}$. Тогда $\operatorname{tr} A_2 = \sqrt{2}$, $\operatorname{tr} B_2 = 1$, $\operatorname{tr} A_2B_2 = t - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)$ и

$$\operatorname{tr} R_2(A_2, B_2) = A_0 \cdot \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\right)^{s_1} \cdot \left(t - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)\right)^{s_2} \cdot \left(t-\sqrt{6}\right)^{s_3} \cdot (t)^{s_4}. \tag{9}$$

Свободный член полинома $\operatorname{tr} A_2B_2$ равен $2\cos\frac{3U+4V}{12}\pi = 2\cos(U_1+V_1)\pi = \pm 2.$

В силу (9) $s_4 = 0$. Если рассмотреть матрицы $A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}$, $B_2' = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-4} & 0 \\ t & \varepsilon^{4} \end{pmatrix}$, то аналогично получим, что $s_3 = 0$. Лемма доказана.

Лемма 8. *Если для любого существенного гомоморфизма* $\rho : H_2 \to PSL_2(\mathbb{C})$ *справедливо* $\operatorname{tr} A_2B_2 \in \left\{0, \sqrt{2}\right\}$, *то* t *– четное и в слове* $R_2(a_2, b_2) = a_2^{u_1} b_2^{v_1} \ldots a_2^{u_t} b_2^{v_t}$ среди u_i встречается ровно две двойки.

Доказательство. Вновь положим $A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^3 & 1 \\ 0 & \varepsilon^{-3} \end{pmatrix}$, $B_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon^4 & 0 \\ t & \varepsilon^{-4} \end{pmatrix}$ с прежними обозначениями. По условию $\operatorname{tr} R_2(A_2, B_2) = A_0 \cdot (\operatorname{tr} A_2B_2)^{s_1} \cdot \left(\operatorname{tr} A_2B_2 - \sqrt{2}\right)^{s_2}$.

Коэффициент A_0 найдем таким же образом, как и в доказательстве леммы 5. Получим $A_0 = \left(\sqrt{2}\right)^{h_2}$, где h_2 – количество двоек среди u_i.

Свободный член полинома $\operatorname{tr} R_2(A_2, B_2)$ будет иметь вид

$$(-1)^s \left(\sqrt{2}\right)^{h_2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{s} \cdot (2)^{s_1} \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)^{s_2 - s_1}.$$

Из доказательства леммы 7 следует, что свободный член $\operatorname{tr} R_2(A_2, B_2)$ равен ± 2. Таким образом, $\left(\sqrt{2}\right)^{2s_1 + h_2 - s} \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)^{s_2 - s_1} = 2$. Рассмотрим два случая:

1) $s_1 = s_2$. Тогда $\left(\sqrt{2}\right)^{h_2} = 2$, т. е. $h_2 = 2$ и s – четное;

2) $s_1 \neq s_2$ $(s_2 = s_1 + k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0)$. В этом случае $\left(\sqrt{3}+1\right)^{k} = 2 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^{k-h_2}$. Так как $\left(\sqrt{2}\right)^{k-h_2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\left(\sqrt{3}+1\right)^{k} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\left(\sqrt{3}+1\right)^{k} \notin \mathbb{Q}$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \cap \mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}$, то равенство невозможно.

Лемма 9. *Если* $V = 3V_1$, $U = 4U_1$ *и* $t < 12$, *то с точностью до изоморфизма существует 5 псевдоконечных групп* $H_2^i = \left\langle a_2, b_2 \,\middle|\, a_2^4 = b_2^3 = R_{2,i}(a_2, b_2)^2 = R_{2,i}(a_2^{-1}, b_2^{-1})^2 = 1 \right\rangle$. *Соответствующие слова* $R_{2,i}(a_2, b_2)$ *имеют вид:* $R_{2,2} = a_2^2 b_2 a_2^2 b_2^2$, $R_{2,4} = a_2^2 b_2 a_2 b_2^2 a_2^2 b_2^2 a_2^3 b_2^2$, $R_{2,6} = a_2^2 b_2 a_2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2^2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2 b_2^2$, $R_{2,8} = a_2^2 b_2 a_2 b_2^2 a_2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2^2 b_2 a_2 b_2^2 a_2^3 b_2 a_2^3 b_2^2$, $R_{2,10} = a_2^2 b_2 a_2 b_2^2 a_2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2^3 b_2 a_2^2 b_2^2 a_2 b_2 a_2^3 b_2^2 a_2^3 b_2 a_2 b_2^2$,

Псевдоконечные группы из леммы 9 найдены с использованием леммы 8 и с помощью компьютерных вычислений с программой Maple.

Лемма 10. *Группы* H_2^i, $1 \le i \le 10$, *содержат неабелеву свободную подгруппу.*

Доказательство. Рассмотрим факторгруппы $H_{2,i} = \left\langle a_{2,i}, b_{2,i} \,\middle|\, a_{2,i}{}^2 = b_{2,i}{}^3 = R_{2,i}'(a_{2,i}, b_{2,i})^2 = R_{2,i}'(a_{2,i}{}^{-1}, b_{2,i}{}^{-1})^2 = 1 \right\rangle$ групп H_2^i, где $R_{2,i}'(a_{2,i}, b_{2,i})$ –

циклическая редукция слова $R_{2,i}(a_{2,i}, b_{2,i})$ в свободном произведении $\langle a_2 \mid a_2^2 = 1\rangle * \langle b_2 \mid b_2^3 = 1\rangle$. Ясно, что группы $H_{2,i}$ имеют копредставление $H_{2,i} = \langle a_{2,i}, b_{2,i} \mid {a_{2,i}}^2 = {b_{2,i}}^3 = 1\rangle$, т. е. являются свободным произведением циклических групп порядка 2 и 3, а поэтому содержат неабелеву свободную подгруппу. Следовательно, группы H_2^i также содержат неабелеву свободную подгруппу.

1. Fine B., Rosenberger G. Algebraic generalizations of discrete groups. A path to combinatorial group theory through one-relator products. New York, 1999.
2. Howie J., Kopteva N. // J. Group Theory. 2006. Vol. 9. P. 173.
3. Majeed A., Masson A.W. // Glasgow Math. J. 1978. Vol. 19. P. 45.
4. Horowitz R. // Comm. Pure Appl. Math. 1972. Vol. 25. P. 635.
5. Magnus W. // Result. der Math. 1981. Vol. 4. P. 171.
6. Беняш-Кривец В.В., Хуа Сюин. // Изв. ГГУ. 2008. № 2 (74). С. 13.
7. Beniash-Kryvets V.V. // Proceedings of the International Conference on Mathematics and its Application (ICMA 2004). Kuwait, 2004. P. 59.
8. Vinberg E.B., Kaplinsky R. // Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects. Papers from the conference, Bielefeld, 1999. Cambridge, 2004. LMS Lecture Note Series. Vol. 311. P. 564.