БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Шалик Элла Владимировна

ВЫДЕЛЕНИЕ КЛАССОВ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО И ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКОВ, ДОПУСКАЮЩИХ ЛИШЬ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОДВИЖНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

01.01.02 - дифференциальные уравнения

Автореферат диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Минск - 93

Работа выполнена на кафедре математического анализа Минского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук, профессор Яблонский А.И.

Официальные оппоненты - доктор физико-математических наук, профессор Кондратеня С.Г.
кандидат физико-математических наук, доцент Мататов В.И.

Ведущая организация - Гродненский государственный университет

Защита состоится 17 сентября 1993 года в 10 часов на заседании специализированного Совета К 056.03.10 в Белорусском государственном университете (220080, г.Минск, проспект Ф.Скорины, 4; главный корпус, комната 206).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан 17 августа 1993 года

Ученый секретарь
специализированного Совета
доцент В.И.Корзюк

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Проблема изучения свойств функций, определенных дифференциальными уравнениями и их системами, является одной из основных математических задач. Большинство систем дифференциальных уравнений, возникающих в практике, рациональны относительно искомых функций и имеют постоянные, непрерывные или аналитические коэффициенты. Решения таких нелинейных систем имеют, как правило, подвижные особые точки. Исследование характера и конфигурации подвижных особых точек является одной из составных частей аналитической теории дифференциальных уравнений. Такие исследования вызывают особенно большие трудности. Выявления требуют вопросы существования подвижных особых точек, а при их наличии, вопросы определения их качества, структуры решений в окрестности подвижной особой точки, расположение этих решений в пространстве.

Начало теории подвижных особых точек было положено Брио и Буке. Затем исследования были продолжены Пенлеве, Фуксом, Пуанкаре, Пикаром и др. Во многих случаях изучение свойств решений дифференциальных уравнений и систем сводится к их классификации по характеру подвижных особых точек или к выделению тех классов, особые точки которых представлены определенной аналитической характеристикой. Такие исследования можно встретить в работах Н.П.Еругина, А.И.Яблонского, С.Г.Кондратени и др.

Интерес к изучению особых точек решений дифференциальных уравнений и систем в немалой степени определяется тем, что многие процессы физики, экономики, биологии, техники и др. описываются математическими моделями, среди которых большое место занимают модели, описываемые дифференциальными уравнениями и системами.

В диссертационной работе проводится исследование в окрестности подвижной особой точки систем дифференциальных уравнений второго и третьего порядков, которые являются моделями процессов биологи, генетики и др., а также выделению классов систем второго порядка с однозначными подвижными особыми точками.

Цель работы. Установление существования подвижных особых точек исследуемых систем дифференциальных уравнений второго и третьего порядков и нахождение аналитических представлений решений систем в окрестности подвижных особых точек.

Выделение классов исследуемых систем второго порядка, решения которых не содержат многозначных подвижных особых точек.

Метод исследования. Для рассматриваемых систем дифференциальных уравнений строятся соответсвующие им системы дифференциальных уравнений Брио и Буке и иследование решений исходных систем в окрестности подвижной особой точки сводится к исследованию решений систем Брио и Буке в окрестности неподвижной особой точки. В основу выделения систем с однозначными решениями положен подход, предложенный Пенлеве и Гарнье.

Научная новизна. Основные результаты являются новыми. Найдены аналитические представления решений исследуемых систем в окрестности подвижных особых точек. Установлены необходимые и достаточные условия существования таких представлений. Найдены достаточные условия однозначности решений неавтономной системы Вольтерра-Лотки и выделены классы таких систем с однозначными решениями.

Теоретическая и практическая ценность. Разработан метод выделения классов систем Вольтерра-Лотки второго порядка с однозначными решениями. Получены необходимые условия существования у исследуемых систем решений, представимых в окрестности подвижной особой точки в виде рядов. Полученные результаты могут быть использованы при изучении некоторых процессов биологии, экономики, техники и др.

На защиту выносятся следующие результаты:

1. Доказательство существования подвижных особых точек систем дифференциальных уравнений Вольтерра-Лотки второго порядка в автономном и неавтономном случаях и системы дифференциальных уравнений третьего порядка, являющейся моделью процессов генетики.

2. Аналитические представления решений в окрестности подвижных особых точек рассматриваемых систем.

3. Метод выделения классов неавтономных систем Вольтерра-Лотки второго порядка, решения которых не содержат многозначных подвижных особых точек.

4. Классификация неавтономных систем Вольтерра-Лотки, решения которых не содержат многозначных подвижных особых точек.

Апробация. Основные результаты диссертации докладывались на Всесоюзной конференции "Герценовские чтения" в г.Ленинграде (1991г.), на межреспубликанской конференции творческой молодежи в БГУ им.В.И.Ленина (1992г.), на семинаре "Дифференциальные уравнения" под руководством А.И.Яблонского.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 научных работы, перечень которых приведен в конце реферата.

Структура и объем работы. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, списка литературы и включает 96 страниц машинописного текста. Список литературы содержит 55 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении излагается краткая история вопроса, обосновывается актуальность темы диссертации и излагаются основные результаты работы.

В первой главе в §§ 1,2 проводится аналитическое исследование решений системы Вольтерра-Лотки в автономном случае с произвольными комплексными коэффициентами

$$\frac{dx}{dz} = a_1x + b_1x^2 + c_1xy, \qquad (1)$$
$$\frac{dy}{dz} = a_2y + b_2xy + c_2y^2.$$

В окрестности подвижной особой точки z_0 (в силу автономности системы подвижной особой точкой может быть точка $z_0=0$), где решения системы (1) $(x(z),y(z))$ [21] обладают свойством

$$|x(z)| + |y(z)| \to \infty \quad \text{при } z\to z_0.$$

Здесь найдены возможные решения системы (1) с указанным свойством, которые имеют вид

$$x(z) = z^{n_1}(\alpha_0+ \varphi_1(z)), \qquad (2)$$
$$y(z) = z^{n_2}(\beta_0+ \varphi_2(z)),$$

где n_1, n_2 - некоторые числа, причем хотя бы одно из них отрицательное, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ - аналитические функции z со свойством $\varphi_k(z)\to 0$, $z\varphi_k(z)\to 0$ при $z\to z_0$ $(z_0=0)$, $k=1,2$, по крайней мере вдоль пути L, лежащего в ограниченном секторе

$$-\infty < \alpha < \operatorname{Arg} z < \beta < +\infty.$$

Установлено, что условия

$$\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (c_2-c_1)(b_2-b_1) \neq 0$$

являются необходимыми и достаточными для существования у системы (1) решений следующих видов

$$
\begin{aligned}
x(z) &= z^{-1}\Big(\alpha_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \alpha_\sigma z^\sigma\Big),\\
y(z) &= z^{-1}\Big(\beta_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \beta_\sigma z^\sigma\Big);
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
x(z) &= z^{-1}\Big(\alpha_0 + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} a^{(\sigma_1,\sigma_2)} z^{\sigma_1+\lambda_2\sigma_2}\Big),\\
y(z) &= z^{-1}\Big(\beta_0 + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} b^{(\sigma_1,\sigma_2)} z^{\sigma_1+\lambda_2\sigma_2}\Big);
\end{aligned}
\tag{4}
$$

где $a^{(0,1)}$ - произвольная постоянная;

$$
\begin{aligned}
x(z) &= z^{-1}\Big[\alpha_0 + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} c^{(\sigma_1,\sigma_2)} z^{\sigma_1}(z^{\lambda_2}\ln z)^{\sigma_2}\Big],\\
y(z) &= z^{-1}\Big[\beta_0 + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} d^{(\sigma_1,\sigma_2)} z^{\sigma_1}(z^{\lambda_2}\ln z)^{\sigma_2}\Big],
\end{aligned}
\tag{5}
$$

где $c^{(\lambda_2,0)}$ - произвольная постоянная.

В §3 установлено, что условия $b_2=-\omega b_1$, $b_1\neq 0$, $\omega>-1$ являются необходимыми и достаточными для того, чтобы система (1) в окрестности подвижной особой точки имела решение вида

$$
\begin{aligned}
x(z) &= z^{-1}\Big(-\frac{1}{b_1} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \alpha_\sigma z^\sigma\Big),\\
y(z) &= z^{\omega}\Big(\beta_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \beta_\sigma z^\sigma\Big),
\end{aligned}
\tag{6}
$$

где β_0 - параметр, и решение вида

$$
\begin{aligned}
x(z) &= z^{-1}\Big[-\frac{1}{b_1} + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} a^{(\sigma_1,\sigma_2)} z^{\sigma_1+\lambda_3\sigma_2}\Big],\\
y(z) &= z^{\omega}\Big[\beta_0 + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} b^{(\sigma_1,\sigma_2)} z^{\sigma_1+\lambda_3\sigma_2}\Big],
\end{aligned}
\tag{7}
$$

где β_0 - параметр.

Условия $c_1=-\nu c_2$, $c_2\neq 0$, $\nu>-1$ необходимы и достаточны для существования решений вида

$$x(z) = z^{\nu}\Big(\alpha_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \alpha_{\sigma} z^{\sigma}\Big),$$
$$y(z) = z^{-1}\Big(\beta_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \beta_{\sigma} z^{\sigma}\Big), \qquad (8)$$

где α_0 – параметр, и

$$x(z) = z^{\nu}\left\{\alpha_0 + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} a^{(\sigma_1,\sigma_2)} z^{\sigma_1+\lambda_3\sigma_2}\right\},$$
$$y(z) = z^{-1}\left\{-\frac{1}{c_1} + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} b^{(\sigma_1,\sigma_2)} z^{\sigma_1+\lambda_3\sigma_2}\right\}, \qquad (9)$$

где α_0 – параметр.

В §4 показано, что если в (2) $n_2=\omega=0$ ($n_1=\nu=0$), то систему (1) можно проинтегрировать, найдено ее общее решение.

В §§5,6 исследуется вопрос о решениях в окрестности подвижной особой точки z_0 системы Вольтерра-Лотки в неавтономном случае

$$\frac{dx}{dz} = a_1(z)x + b_1(z)x^2 + c_1(z)xy,$$
$$\frac{dy}{dz} = a_2(z)y + b_2(z)xy + c_2(z)y^2, \qquad (10)$$

где коэффициенты являются аналитическими функциями z в области D_1 комплексной плоскости.

Из всех решений системы (10), обладающих свойством

$$|x(z)| + |y(z)| \to \infty \quad \text{при } z\to z_0,$$

выделены те, которые имеют вид

$$x(z) = (z-z_0)^{n_1}(\alpha_0+\varphi_1(z)),$$
$$y(z) = (z-z_0)^{n_2}(\beta_0+\varphi_2(z)), \qquad (11)$$

где n_1, n_2 – некоторые числа, хотя бы одно из которых отрицательное, $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$ – аналитические функции z со свойством $\varphi_1(z)\to 0$, $\varphi_2(z)\to 0$ при $z\to z_0$ вдоль некоторого пути L.

Доказано, что в области $D \subsetneq D_1$, которая определяется условиями

$$\begin{vmatrix} b_1(z) & c_1(z) \\ b_2(z) & c_2(z) \end{vmatrix} \neq 0, \quad (c_2(z)-c_1(z))(b_2(z)-b_1(z)) \neq 0, \qquad (12)$$

система (10) имеет решения

$$x(z) = (z-z_0)^{-1}(\alpha_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \alpha_\sigma (z-z_0)^\sigma),$$
$$y(z) = (z-z_0)^{-1}(\beta_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \beta_\sigma (z-z_0)^\sigma), \qquad (13)$$

если $\lambda_2 = \dfrac{(b_1(z)-b_2(z))(c_2(z)-c_1(z))}{b_2(z)c_1(z)-b_1(z)c_2(z)}$ не является целым положительным числом. Если $\mathrm{Re}\lambda_2<0$, то такое решение единственное. Если $\mathrm{Re}\lambda_2>0$, то кроме решения (13) система (10) имеет решение

$$x(z) = (z-z_0)^{-1}\Big(\alpha_0 + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} a^{(\sigma_1,\sigma_2)} (z-z_0)^{\sigma_1+\lambda_2\sigma_2}\Big),$$
$$y(z) = (z-z_0)^{-1}\Big(\beta_0 + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} d^{(\sigma_1,\sigma_2)} (z-z_0)^{\sigma_1+\lambda_2\sigma_2}\Big). \qquad (14)$$

Если λ_2 - целое положительное число, то при некоторых условиях на коэффициенты система (10) будет иметь решение вида

$$x(z)=(z-z_0)^{-1}\Big(\alpha_0+\sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} c^{(\sigma_1,\sigma_2)}(z-z_0)^{\sigma_1+\lambda_2\sigma_2} \ln^{\sigma_2}(z-z_0)\Big),$$
$$y(z)=(z-z_0)^{-1}\Big(\beta_0+\sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} d^{(\sigma_1,\sigma_2)}(z-z_0)^{\sigma_1+\lambda_2\sigma_2} \ln^{\sigma_2}(z-z_0)\Big). \qquad (15)$$

В §7 доказано, что в области $D \subseteq D_1$, которая определяется условиями

$$\mathrm{Re}\frac{b_2(z)}{b_1(z)}<1, \quad b_1(z) \neq 0, \quad b_2(z) = -\omega b_1(z),$$

система (10) имеет либо однопараметрическое семейство решений

$$x(z) = (z-z_0)^{-1}\Big(-\frac{1}{b_1(z_0)} + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} a^{(\sigma_1,\sigma_2)}(z-z_0)^{\sigma_1+\lambda_3\sigma_2}\Big),$$
$$y(z) = (z-z_0)^{\omega}\Big(\beta_0 + \sum_{\sigma_1+\sigma_2=1}^{\infty} b^{(\sigma_1,\sigma_2)}(z-z_0)^{\sigma_1+\lambda_3\sigma_2}\Big), \qquad (16)$$

где β_0 - параметр, если $T(z)=-\dfrac{b_2(z)}{b_1(z)}+1$ не является целым числом, либо однопараметрическое семейство решений с параметром β_0 вида

$$x(z) = (z-z_0)^{-1}\Big(-\frac{1}{b_1(z_0)} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \alpha_\sigma(z-z_0)^{\sigma}\Big),$$
$$y(z) = (z-z_0)^{\omega}\Big(\beta_0 + \sum_{\sigma=1}^{\infty} \beta_\sigma(z-z_0)^{\sigma}\Big), \qquad (17)$$

если $T(z)$ - целое число.

Однопараметрические семейства решений система (10) будет иметь в области $D \subsetneq D_1$, определяемой условиями

$$\mathrm{Re}\frac{c_1(z)}{c_2(z)}<1, \quad c_2(z)\neq 0, \quad c_1(z)=-\nu c_2(z).$$

В §8 рассмотрены некоторые интегрируемые случаи.

В главе приведены примеры, иллюстрирующие теорию.

Во второй главе из систем Вольтерра-Лотки с переменными коэффициентами выделяются системы, решения которых не содержат многозначных подвижных особых точек, и устанавливается их связь с уравнениями пятидесяти классов Пенлеве.

В §1 система уравнений (10) преобразованием независимой переменной сводится к системе, в которой $c_1(t)=1$, т.е.

$$\frac{dx}{dt} = a_1(t)x + b_1(t)x^2 + xy,$$
$$\frac{dy}{dt} = a_2(t)y + b_2(t)xy + c_2(t)y^2. \qquad (18)$$

Система (18) эквивалентна одному дифференциальному уравнению второго порядка

$$x''=(1+c_2(t))\frac{x'^2}{x}+A(t)xx'+B(t)x'+D(t)x^3+E(t)x^2+F(t)x, \qquad (19)$$

где $A(t)$, $B(t)$, $D(t)$, $E(t)$, $F(t)$ определенным образом выражаются через коэффициенты (18). Исследование этого уравнения позволило определить необходимые и достаточные условия, которые налагаются на коэффициенты системы, для отсутствия у решений системы многозначных подвижных особых точек.

В §2 найдено 8 достаточных условий однозначности решений системы (18) при $c_2(t)=1$.

В §3 указаны два достаточных условия отсутствия у решений системы (18) многозначных особых точек в случае $c_2(t)=0$.

В §4 при $c_2(t)=-\frac{1}{m}$, где m – целое число, большее 1, найдено 10 достаточных условий однозначности решений системы.

При каждом из перечисленных условий система (18) сводится к уравнениям P-типа, которые можно проинтегрировать.

В §5 подведены итоги проведенных в главе исследований.

В третьей главе исследуются в окрестности подвижной особой точки решения системы трех дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{d\tau} = x(f-x-y) + \sigma z,$$
$$\frac{dy}{d\tau} = y(f-x-y) + \sigma z, \qquad (20)$$
$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{2(1+f)xy}{x+y} - z(1-2\sigma+x+y).$$

Эта система является математической моделью процессов генетики [36]. Если x, y, z – численности аллелей особей популяции, то систему (20) можно рассматривать как модель генотипической динамики популяции при определенных условиях на коэффициенты системы.

Аналитическое исследование системы (20) позволило найти ее решения в окрестности подвижной особой точки τ_0 ($\tau_0=0$) со свойством

$$|x(\tau)| + |y(\tau)| + |z(\tau)| \to \infty \quad \text{при } \tau \to \tau_0$$

вида

$$x(\tau) = \tau^{n_1}(\alpha_1+\varphi_1(z)),$$
$$y(\tau) = \tau^{n_2}(\alpha_2+\varphi_2(z)), \tag{21}$$
$$z(\tau) = \tau^{n_3}(\alpha_3+\varphi_3(z)),$$

где n_1, n_2, n_3 – некоторые числа, среди которых хотя бы одно отрицательное; $\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \neq 0(\infty)$; $\varphi_1(\tau)\to 0$, $\varphi_2(\tau)\to 0$, $\varphi_3(\tau)\to 0$ при $\tau\to\tau_0$ вдоль некоторого пути L.

В §1 рассматривается случай одинаковых начальных условий для $x(\tau)$, $y(\tau)$. Когда $x(\tau)=y(\tau)$, система (20) эквивалентна системе двух дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{d\tau} = fx - 2x^2 + \sigma z,$$
$$\frac{dz}{d\tau} = (1+f)x - (1-2\sigma)z - 2xz. \tag{22}$$

Установлено существование у системы (22) в окрестности подвижной особой точки решений, разложимых в сходящиеся ряды. Система (22) имеет или однопараметрическое семейство решений, или единственное голоморфное решение вида

$$x(\tau) = \tau^{-1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\tau^k\right),$$
$$z(\tau) = \frac{1+f}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\tau^k, \tag{23}$$

если $f\neq -1$, или голоморфное решение

$$x(\tau) = \tau^{-1}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k\tau^k\right),$$
$$z(\tau) = \tau^{-2}\left(\frac{1}{\sigma} + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k\tau^k\right), \tag{24}$$

если $\sigma\neq 0$, или семейство решений с параметром β_0

$$x(\tau) = \tau^{-1}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \tau^k\right),$$

$$z(\tau) = \tau^{-1}\left(\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k \tau^k\right). \qquad (25)$$

В §2 рассматривается случай различных начальных условий ($x(\tau) \neq y(\tau)$). Система (20) имеет решение одного из следующих видов:

$$x(\tau) = \tau^{-1}\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(1,0)} \tau^k\right),$$

$$y(\tau) = \tau^{-1}\left(\beta_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(2,0)} \tau^k\right), \qquad (26)$$

$$z(\tau) = \alpha_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(3)} \tau^k;$$

$$x(\tau) = \tau^{-1}\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(1,0)} \tau^k\right),$$

$$y(\tau) = \tau^{-2}\left(\beta_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(2,0)} \tau^k\right), \qquad (27)$$

$$z(\tau) = \tau^{-2}\left(\frac{1}{6} + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(3)} \tau^k\right);$$

$$x(\tau) = \tau^{-1}\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(1,0)} \tau^k\right),$$

$$y(\tau) = \tau^{-1}\left(\beta_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(2,0)} \tau^k\right), \qquad (28)$$

$$z(\tau) = \tau^{-1}\left(\alpha_3 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k^{(3)} \tau^k\right),$$

где α_3 - параметр.

В §3 показано, что если в системе (20) положить $x(t)+y(\tau)=0$, то имеет место интегрируемый случай. Получено общее решение системы в этом случае.

В §4 рассматриваются некоторые биологические приложения полученных результатов.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Шалик Э.В., Яблонский А.И. Аналитическое исследование одной системы дифференциальных уравнений.//Ред.ж. "Дифференц. уравнения".- Минск,1991.- Деп.в ВИНИТИ 08.04.91, N 1509-B91.-8с.

2. Шалик Э.В. Характер подвижных особых точек одной системы дифференциальных уравнений.//Ред. ж. "Диференц. уравнения".- Минск, 1991.- Деп. в ВИНИТИ 08.04.91, N 1503-B91.- 7с.

3. Шалик Э.В. О подвижных особых точках системы Вольтерра-Лотки в неавтономном случае.//Межреспубликанская конференция творческой молодежи. Тезисы докл.- Минск, 1992.- С. 215-216.

4. Шалик Э.В. Аналитическое исследование системы Вольтерра-Лотки в неавтономном случае.//Линейные функционально-дифференциальные соответствия.- Минск, 1993.- С. 42-49.