

деятельность в 1996 г. (проведено 27 заседаний). Выпускается научный журнал «Математический вестник Вятского государственного университета», в котором печатаются статьи и материалы по математике, информатике и методике обучения математике.

#### **Список литературы**

1. Варанкина, В. И. Научная алгебраическая школа / В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов // Герценка: Вятские записки. – 2009. – Вып. 15. – С. 199–207.
2. Варанкина, В. И. Кировская научно-методическая школа по математическому образованию: история и современность / В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов // Материалы 41-го Междунар. науч. семинара преподавателей математики и информатики университетов и педвузов «Математика и проблемы образования». – Киров: ВятГУ, 2022. С. 4–8.
3. Варанкина, В. И. Профессор Фёдор Нагибин. Сквозь призму времени: монография / В. И. Варанкина, Е. М. Вечтомов, Е. С. Канин. – Киров : Изд-во ООО «Лобань», 2014. – 320 с.
4. Вечтомов, Е. М. Студенческий учебно-исследовательский семинар по алгебре / Е. М. Вечтомов // Математический вестник Вятского государственного университета. – 2021. – № 3. – С. 36–45.
5. Вечтомов, Е. М. Изучение основ теории полуколец. Простые идеалы / Е. М. Вечтомов // Математический вестник Вятского государственного университета. 2021. – № 4. – С. 4–14.
6. Вечтомов, Е. М. Полукольца непрерывных функций на топологических пространствах / / Е. М. Вечтомов // Математический вестник Вятского гос. ун-та. – 2022. – № 2. – С. 9–22.
7. Вечтомов, Е. М. Что такое полукольцо / Е. М. Вечтомов // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – № 1. – С. 21–42.
8. Вечтомов, Е. М. Что такое полумодуль / Е. М. Вечтомов // Вестник Сыктывкарского университета. Серия 1: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – № 2. – С. 27–43.
9. Вечтомов, Е. М. Кировской научной алгебраической школе – 30 лет / Е. М. Вечтомов // Материалы Всероссийской науч. конф. «Город на Вятке: история, культура, люди (К 650-летию Хлынова – Вятки – Кирова)». – Киров: КОГБУК «КОУНБ им. А. И. Герцена», 2024. – С. 141–147.
10. Вечтомов, Е. М. Дистрибутивные решетки с различными аннуляторными свойствами / Е. М. Вечтомов // Труды института математики и механики УрО РАН. – 2025. – № 1. – С. 53–65.
11. Вечтомов, Е. М. Конечные полумодули над трехэлементными мультипликативно идемпотентными полукольцами / Е. М. Вечтомов, А. А. Петров, А. П. Шкляев // Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. – 2024. – № 3 (66). – С. 5–15.
12. Петров, А. А. Об аддитивных полугруппах идемпотентных полуколец с единицей / А. А. Петров, А. П. Шкляев // Математические заметки. – 2024. – Т. 116. – Вып. 4. – С. 552–558.

### **АНАЛИЗ ОШИБОК СТУДЕНТОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ ПРЕДЕЛОВ ФУНКЦИЙ**

**С. И. Василец**, к. ф.-м. н., доцент,

**Э. В. Шалик**, к. ф.-м. н., доцент,

Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка,

Минск, Беларусь

e-mail: shalik\_ella@mail.ru, svasilets@icloud.com

*Аннотация.* Статья посвящена анализу типичных ошибок, допускаемых студентами при вычислении пределов функций, описаны основные причины их возникновения, приведены рекомендации по их предотвращению.

*Ключевые слова:* функция, предел, вычисление пределов, типичные ошибки.

## ANALYSIS OF STUDENT ERRORS IN CALCULATING FUNCTION LIMITS

**S. I. Vasilets**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

**E. V. Shalik**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank,

Minsk, Belarus

e-mail: shalik\_ella@mail.ru; svasilets@icloud.com

*Abstract.* The article is devoted to the analysis of typical errors made by students when calculating the limits of functions, describes the main causes of their occurrence, and provides recommendations for their prevention.

*Keywords:* function, limit, calculation of limits, typical errors.

Понятия пределов числовой последовательности, функции лежат в основе других фундаментальных понятий математического анализа (производная, дифференциал, определенный интеграл, числовой и функциональный ряд). Усвоение сущности данных понятий и умение вычислять пределы последовательностей и функций влияет на понимание последующих тем математического анализа и некоторых разделов других учебных дисциплин, поэтому необходимо убереечь студентов, как минимум, от типичных ошибок, которые встречаются при решении задач на вычисление пределов.

В работе авторов [2] дан краткий анализ причин типичных проблем и ошибок обучающихся в вычислении пределов. Вот некоторые из них.

1. Понятие предела вводится на первом курсе физико-математического факультета и для первокурсника является достаточно абстрактным и сложным для понимания.

2. Базовыми знаниями для усвоения понятия предельного перехода являются знания о функциях, их свойствах и графиках. Этих знаний бывает недостаточно из-за пробелов при освоении школьной программы по математике.

3. В силу абстрактности вводимых понятий с помощью символики, не знакомой со школы, студенты не видят практической значимости данных понятий для дальнейшего обучения.

Указанные причины вызывают необходимость разработки особых подходов к методике преподавания перечисленных тем [1, с. 44–48].

Авторы на основе опыта преподавания математического анализа студентам физико-математического факультета БГПУ выделяют ряд распространенных ошибок, выявленных у студентов, и предлагают меры по предупреждению подобных ошибок. Несомненно, выработанные подходы могут быть полезны при обучении математическому анализу студентов различных специальностей.

Перечисленные в статье [2] проблемы и ошибки студентов, допускаемые при вычислении пределов последовательностей (некорректное обращение с символами плюс бесконечность  $(+\infty)$  и минус бесконечность  $(-\infty)$  актуальны и при изучении темы «Предел функции». Следует обращать внимание обучающихся на недопустимость переноса известных операций с вещественными числами на вычисления с бесконечно большими функциями. На наш взгляд, существенным при обучении вычислению пределов является необходимость обратить внимание студентов на то, что операции  $-\infty + (+\infty)$ ;  $+\infty - (+\infty)$ ;  $-\infty - (-\infty)$ ;  $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ ;  $1^\infty$ ;

$0^0$ ;  $\infty^0$  не определены. При этом необходимо привести примеры пределов функций с различными видами неопределённостей, которые в результате могут приводить и

к бесконечно большим функциям, и к бесконечно малым функциям. Результатом вычисления предела с неопределённостью может быть число, кроме того, предел вообще может не существовать.

Рассмотрим типичные ошибки, допускаемые студентами при вычислении пределов функций.

**Пример 1.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}$ .

Распространенной ошибкой при вычислении данного (и подобных) пределов является применение первого замечательного предела:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ — ошибочная запись.}$$

Причина ошибки вызвана непониманием возможности применения известной формулы ( $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  или более общей:  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1$  где  $\alpha(x) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow x_0$ ) в случае, если  $x(\alpha(x))$  не стремится к нулю.

Правильное решение заключается в применении теоремы о пределе частного:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$

**Пример 2.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$ .

Довольно часто при вычислении подобных пределов студенты делят числитель и знаменатель дроби на  $x^2$ , ошибочно применяя к неопределенности типа  $\left(\frac{0}{0}\right)$  алгоритм раскрытия неопределенности типа  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1 \text{ — ошибочная запись.}$$

Ошибка вызвана предположением, что  $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$ , что на самом деле верно только при  $x \rightarrow \infty$ .

Правильное решение стандартно:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Считаем необходимым при решении задач на раскрытие неопределенностей типа  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ,  $\left(\frac{0}{0}\right)$  обращать внимание студентов на указанные ошибки и необходимость не допускать их.

**Пример 3.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x - 1}$ .

Приведем ошибочное решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x}\right)}}{2x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}.$$

Ошибка основана на применении в вычислениях формулы  $\sqrt{x^2} = x$ , верной лишь при  $x \geq 0$ . Следует обратить внимание студентов, на то, что для произвольного  $x$  верно  $\sqrt{x^2} = |x|$ , а также, что условие  $x \rightarrow \infty$  означает стремление к бесконечности  $|x|$ , поэтому, строго говоря,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x - 1}$  не существует, поскольку

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x}}{2x - 1} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x \left(2 - \frac{1}{x}\right)} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Желательно указать студентам, что подобная ситуация в будущем может встретиться при поиске наклонных асимптот функции. В частности, у функции  $y = \sqrt{x^2 + x}$  наклонные асимптоты при  $x \rightarrow -\infty$  и при  $x \rightarrow +\infty$  различны.

**Пример 4.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3}{3x-2} \right)^x$ .

При вычислении подобных пределов студенты часто ошибочно применяют второй замечательный предел в виде

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{f(x)} \right)^x = e.$$

и не учитывают, что основание  $\frac{2x+3}{3x-2}$  не стремится к 1 при  $x \rightarrow +\infty$ .

Верное решение должно быть таким. Определяем предел основания, то есть

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{3x-2} = \frac{2}{3}. \text{ Так } \frac{2}{3} < 1 \text{ и } x \rightarrow +\infty, \text{ то } \left( \frac{2}{3} \right)^x \rightarrow 0.$$

$$\text{В результате } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3}{3x-2} \right)^x = 0.$$

Желательно указать студентам, что, как и в предыдущем примере, предел данной функции при  $x \rightarrow -\infty$  будет иным ( $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+3}{3x-2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2}{3} \right)^x = +\infty$ , что влечет существование наклонной (в нашем случае горизонтальной) асимптоты графика только при  $x \rightarrow +\infty$ ).

Ошибки студентов при нахождении пределов функций не ограничиваются рассмотренными в работе примерами, но эти примеры на взгляд авторов, являются наиболее типичными. Наш опыт показывает, что большинство описанных ошибок связано с формальным подходом к изучаемой теме – с механическим (без понимания логики)

заучиванием формул, поэтому считаем важным проводить разбор подобных ошибок на лекциях и практических занятиях, использовать по возможности визуализацию решений с помощью графиков, то есть делать акцент на интеграцию визуальных и практических методов обучения.

#### **Список литературы**

1. Бровка, Н. В. Формы и средства интеграции теории и практики обучения студентов обучения студентов математике. Учебно-метод. пособие / Н. В. Бровка. – Минск: БГПУ, 2009. – 144 с.
2. Василец, С. И. Распространенные ошибки студентов при вычислении пределов последовательностей / С. И. Василец, Э. В. Шалик // Физико-математическое образование: традиции, инновации, перспективы : материалы Междунар. науч.-практ. конф., г. Минск, 24–25 октября 2024 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. Максима Танка; редкол. В. В. Радыгина, А. А. Францкевич (отв. ред.), Л. Л. Тухолко [и др.]. – Минск : БГПУ, 2024. – С. 57–60.
3. Василец, С. И. Введение в математический анализ: практикум / С. И. Василец, И. Н. Гуло, Э. В. Шалик. – 2-е изд., исправл. и дополн. – Минск: БГПУ, 2025. – 96 с.

### **ПУТЬ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ И РЕЗУЛЬТАТЫ МЕЖВУЗОВСКИХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОЛИМПИАД ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ ЛЕНИНГРАДА-ПЕТЕРБУРГА**

**П. В. Герасименко**, д. т. н., профессор,  
Петербургский государственный университет путей сообщения  
Императора Александра I,  
Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: pv39@mail.ru

*Аннотация.* Рассматриваются особенности организации и совершенствования проведения математических олимпиад среди студентов вузов города Ленинграда-Петербурга в период реформирования СССР и образования РФ. По показателям жюри показаны командные успехи, достигнутые участниками математического олимпиадного движения в городе, в котором в разные годы принимали участие до 24 вузов.

*Ключевые слова:* математические олимпиады, вузы, студенты, конкурсные задания, баллы, жюри.

### **THE PATH OF IMPROVEMENT AND THE RESULTS OF INTERUNIVERSITY MATHEMATICAL OLYMPIADS OF TECHNICAL UNIVERSITIES LENINGRAD-PETERSBURG**

**P. V. Gerasimenko**, Doctor of Technical Sciences, Professor,  
St. Petersburg State University of Railways of Emperor Alexander I,  
Saint Petersburg, Russia  
e-mail: pv39@mail.ru

*Abstract.* The article examines the features of the organization and improvement of mathematical Olympiads among students of universities in Leningrad - St. Petersburg during the reformation of the USSR and the education of the Russian Federation. According to the jury's indicators, the team successes achieved by the participants of the mathematical Olympiad movement in the city, in which up to 24 universities took part in different years, are shown.

*Keywords:* mathematical Olympiads, universities, students, competitive tasks, scores, jury.