

## БАЗОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ШКОЛЬНОГО КУРСА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

**Н. Н. Яремко**, д. пед. н., профессор,

**Ю. А. Яковлева**, аспирант,

Московский педагогический государственный университет,

Москва, Россия

e-mail: nn.yaremko@mpgu.su, mayflower2299@gmail.com

*Аннотация.* Конкретизировано понятие вероятностной модели. Перечислены базовые математические модели школьного курса теории вероятностей. Описаны этапы работы по решению задачи. Рассмотрен пример задачи, для решения которой могут быть выбраны разные вероятностные базовые модели.

*Ключевые слова:* вероятностная модель, базовые вероятностные модели, методика обучения теории вероятностей.

## BASIC MATHEMATICAL MODELS OF THE SCHOOL COURSE OF PROBABILITY THEORY

**N. N. Yaremko**, Doctor of Pedagogical Sciences, Professor,

**J. A. Yakovleva**, Postgraduate Student,

Moscow Pedagogical State University,

Moscow, Russia

e-mail: nn.yaremko@mpgu.su, mayflower2299@gmail.com

*Annotation.* The concept of a probabilistic model is specified. The basic mathematical models of the school course of probability theory are listed. The stages of work on solving the problem are described. An example of a problem for which different probabilistic basic models can be chosen is considered.

*Keywords:* probabilistic model, basic probabilistic models, methods of teaching probability theory.

Теория вероятностей традиционно относится к числу разделов, которые вызывают у обучающихся затруднения. Решение задач на вычисление вероятности случайного события предполагает несколько иные умения и способы рассуждений, отличные от тех, которые свойственны для других математических разделов, и связанные с действиями, выполняемыми при построении математической модели задачи. Это переход от описанного в задаче случайного эксперимента к пространству его элементарных исходов, установление свойств этого пространства (конечность, равновозможность), применение алгебры событий, подсчёт числа всех возможных элементарных событий, подсчёт числа элементарных событий, благоприятствующих данному событию, представление одних событий через другие, вычисление вероятностей и пр. [2]

Математическая модель указанного типа задач – вероятностная. В курсе теории вероятностей высшей школы рассматривается понятие вероятностного пространства – тройки объектов  $(\Omega, W, P)$ , где  $\Omega$  – конечное, счетное или континуальное пространство элементарных исходов,  $W$  – некоторая алгебра подмножеств множества  $\Omega$ ,  $P = P(A)$ ,  $A \in W$  – набор вероятностей [1]. Эта структура является формализованным описанием любой стохастической ситуации (связана со случайностью и может быть неоднократно воспроизведена

неограниченное число раз в неизменных условиях), её *вероятностной математической моделью*.

В школьном (элементарном) курсе теории вероятностей понятие вероятностного пространства не вводится, но оно конкретизируется в частных видах вероятностных математических моделей, которые, вслед за Е. А. Бунимовичем мы будем называть базовыми [1]. Базовые вероятностные математические модели строятся для исследования стохастических задачных ситуаций, то есть для решения основных типов школьных задач [3, 5, 6]. Под стохастической будем понимать задачу, связанную со случайностью, анализ которой направлен на создание вероятностной математической модели, а результат работы с этой моделью позволяет ответить на вопрос соответствующей задачи [3].

Речь идёт о задачах, решаемых в курсе 7–9-х, а также 10–11-х классов: на вычисление вероятностей событий по вероятностям элементарных событий случайного опыта; на вычисление вероятностей событий в опытах с равновероятными элементарными событиями; на вычисление вероятности противоположного события; на вычисление вероятности суммы и произведения событий и т. д. Эти задачи иллюстрируют стохастические ситуации, математические модели которых достаточно простые – множества  $\Omega$  и  $W$  содержат конечное число элементов, вычисление требуемой вероятности случайного события предполагает применение формул элементарной теории вероятностей.

В соответствии с указанными типами задач к базовым или основным видам вероятностных математических моделей стохастических задачных ситуаций (случайных экспериментов) могут быть отнесены следующие модели.

1. Модель случайного эксперимента с конечным числом равновероятных исходов – классическая вероятность (8 класс).
2. Модель случайного эксперимента с бесконечным числом равновероятных исходов – геометрическая вероятность (9 класс).
3. Статистическое определение вероятности случайного события (7 класс, 9 класс).
4. Модель случайного эксперимента, основанная на теоремах о вероятности случайных событий: вероятность суммы и произведения событий, вероятность противоположного события, условная вероятность (8 класс).
5. Схема Бернулли. Вероятность появления  $k$  успехов в серии  $n$  независимых испытаний с двумя исходами «успех» / «неуспех» (9 класс).
6. «Двухшаговый» случайный эксперимент – полная вероятность (10 класс).
7. Апостериорная вероятность – формула Байеса (10 класс).

Каждая модель характеризуется своим обобщенным описанием, существенными признаками, определяющими возможность её выбора для решения задачи (возможность построения конечного или бесконечного множества равновероятных элементарных событий, возможность представления искомого события, как противоположного другому событию, возможность представления искомого события как результата объединения двух событий, которые могут быть несовместными или совместными и пр.) и правилом вычисления вероятности, которое в выбранной модели используется.

Рассмотрим пример задачи, для решения которой могут быть выбраны разные вероятностные базовые модели [5, 6].

**Задача.** «Бросаются три игральные кости. Какова вероятность того, что на одной из них выпадет единица, если на всех трех костях выпали разные грани?» [1].

Для решения задачи можно предложить три модели.

1. Рассмотреть событие  $A = \{\text{на всех трёх гранях выпадут разные числа, причём среди них будет ровно одна «1»}\}$  и найти его вероятность по формуле  $P(A) = \frac{N(A)}{N}$  (условие, состоящее в выпадении разных чисел на гранях, учитывается при определении  $N$ ) (*построить классическую модель без привлечения условной вероятности*);

2. Ввести события  $B = \{\text{на всех трех костях выпали разные грани}\}$  и  $A = \{\text{на одной из граней выпадет единица}\}$  и найти вероятность события  $A|B = \{\text{на одной из граней выпадет единица, при условии, что на всех трех костях выпали разные грани}\}$  по формуле  $P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)}$  (*построить модель, основанную на условной вероятности для частного случая классической вероятности*);

3. Ввести события  $B_i = \{\text{единица выпадет на } i\text{-й кости}\}$  ( $B_1, B_2, B_3$ ) и  $\bar{B}_i = \{\text{единица не выпадет на } i\text{-й кости}\}$  ( $\bar{B}_1, \bar{B}_2, \bar{B}_3$ ) и найти вероятность события  $A = B_1 \cup (\bar{B}_1 \cap B_2) \cup (\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap B_3)$  по формуле  $P(A) = P(B_1) + P(\bar{B}_1)P(B_2|\bar{B}_1) + P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2|\bar{B}_1)P(B_3|\bar{B}_1\bar{B}_2)$  (*построить модель, основанную на теоремах о вероятности событий*).

*Решение.* Приведём решение, предполагающее построение модели классической вероятности.

Эксперимент состоит в бросании трёх костей, на гранях каждой из которой отмечено по одной цифре 1, 2, 3, 4, 5 или 6, причём известно, что в результате обязательно выпадают грани с разными цифрами (например, последовательность (1; 1; 2) исходом эксперимента не является). Поэтому элементарное событие – «трёхзначное число без повторяющихся цифр, составленное из цифр 1, ..., 6».

Количество всех элементарных событий равно количеству трёхзначных чисел, составленных в соответствии с описанными выше условием, т. е.  $N = 6 \cdot 5 \cdot 4$ . Рассмотрим событие  $A = \{\text{на всех трёх гранях выпадут разные числа, причём среди них будет ровно одна «1»}\}$ . Ему благоприятствуют элементарные события, при которых на гранях одной из костей выпадает «1», поэтому число благоприятствующих событию  $A$  элементарных событий  $N(A)$  можно найти в три этапа:

- «1» на первой кости: 1 ... ... (5 · 4 элементарных событий);
- «1» на второй кости: ... 1 ... (5 · 4 элементарных событий);
- «1» на третьей кости: ... ... 1 (5 · 4 элементарных событий).

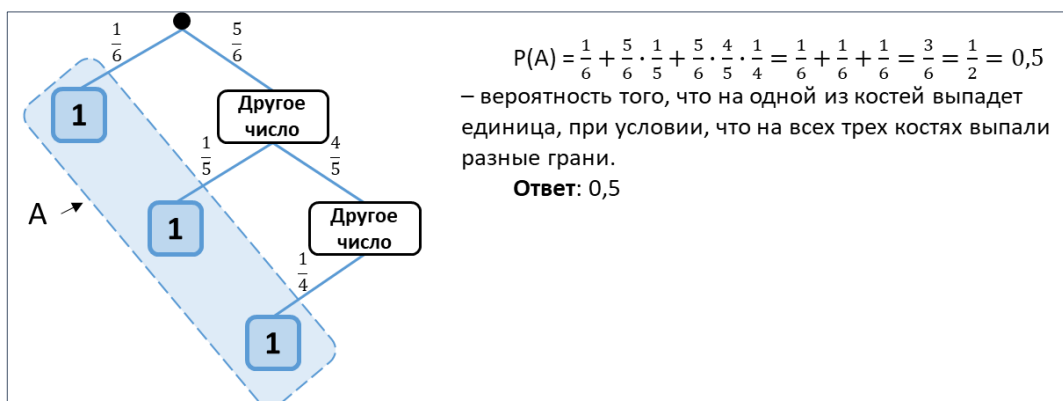
Отсюда  $N(A) = 3 \cdot 5 \cdot 4$ . Все элементарные события равновозможны, поэтому вероятность события  $A$  равна  $P(A) = \frac{N(A)}{N} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{3}{6} = 0,5$  – вероятность того, что на одной из граней выпадет единица, если на всех трех костях выпали разные грани.

Ответ: 0,5

Выбор второй вероятностной модели приводит к выражению  $P(A|B) = \frac{N(A \cap B)}{N(B)} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4}$  и аналогичному ответу 0,5.

Выбор третьей вероятностной модели приводит к выражению  $P(A) = P(B_1) + P(\bar{B}_1)P(B_2|\bar{B}_1) + P(\bar{B}_1)P(\bar{B}_2|\bar{B}_1)P(B_3|\bar{B}_1\bar{B}_2) = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4}$  и такому же ответу 0,5.

В последнем случае решение может быть выполнено с помощью дерева случайного эксперимента (рисунок 1)



**Рисунок 1 – Дерево случайного эксперимента.**

Все рассмотренные вероятностные модели адекватны исходной задаче.

Подобные задачи могут быть использованы на разных этапах обучения теории вероятностей. Как в 8–9-х классах (модели 1, 2 и 3), так и в 10–11 классах (модель 3). Выбор вероятностной модели может определяться назначением задачи (при изучении нового материала или его закреплении) [6].

#### *Список литературы*

1. Бунимович, Е. А. Основы статистики и вероятность. 5–9 классы: пособие для общеобр. учреждений / Е. А. Бунимович, В. А. Булычев. – М. : Дрофа, 2004. – 288 с.
2. Высоцкий, И. Р. Типичные ошибки в преподавании теории вероятностей и статистики / И. Р. Высоцкий, И. В. Яценко // Математика в школе. – 2014. – №5. – С. 32–43.
3. Королев, В. Ю. Вероятностные модели: учебное пособие / В. Ю. Королев, О. В. Шестаков. – М. : МАКС Пресс, 2020. – 266 с.
4. Пойа, Д. Как решать задачу / Д. Пойа. – пер. с англ. В. Звонаревой и Д. Белла; под редакцией Ю. М. Гайдука. – М. : Учпедгиз, 1959. – 207 с.
5. Яремко, Н. Н., Особенности математического моделирования при обучении теории вероятностей / Н. Н. Яремко, Ю. А. Яковлева // Пространство педагогических исследований. 2024. – Т. 1. – № 4 (4). – С. 53–64. – URL: <https://doi.org/10.23859/3034-1760.2024.35.22.004> (дата обращения 07.05.2025).
6. Яремко, Н. Н. Четыре шага Пойа решения задачи по теории вероятностей / Н. Н. Яремко, Ю. А. Яковлева // Учебный эксперимент в образовании. – 2024. – № 1 (109). – С. 115–126. – URL: [https://doi.org/10.51609/2079-875X\\_2024\\_1\\_115](https://doi.org/10.51609/2079-875X_2024_1_115) (дата обращения 07.05.2025).