

3. Родионов, М. А. Дифференциальные уравнения и уравнения в частных производных : учебное пособие / М. А. Родионов, Н. Н. Яремко, А. В. Везденева. – Пенза, 2008. – 144 с.
4. Шукурова, Ш, Н. Применение дифференциальных уравнений в физических науках / Ш. Н. Шукурова // Символ науки. – 2023. – №12. – С. 1–2.

БАРИЦЕНТРИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ ГЕОМЕТРИИ

К. С. Малинникова, студент,
М. А. Степанова, к. ф.-м. н., доцент,
Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена,
Санкт-Петербург, Россия
e-mail: ksunik1ksunik@gmail.com, ratkebug@yandex.ru

Аннотация. Рассматривается суть барицентрического метода решения планиметрических задач как метода геометрии масс; выделены этапы решения задач барицентрическим методом; представлены группы планиметрических задач, решение которых упрощается при применении барицентрического метода; обоснована возможность организации факультативного курса для учащихся 9 классов.

Ключевые слова: барицентрические координаты, барицентрический метод, планиметрическая задача.

BARYCENTRIC COORDINATES IN SCHOOL GEOMETRY COURSE

K. S. Malinnikova, Student
M. A. Stepanova, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,
A. I. Herzen State Pedagogical University of Russia,
Saint Petersburg, Russia
e-mail: ksunik1ksunik@gmail.com, ratkebug@yandex.ru

Abstract. The essence of the barycentric method for solving planimetric problems as a method of mass geometry is considered; there are highlighted the stages of solving problems using the barycentric method; groups of planimetric problems, the solution of which is simplified when using the barycentric method, are given in the article; the author justifies the possibility of organizing an optional course for 9th grade students.

Keywords: barycentric coordinates, barycentric method, planimetric problem.

В рамках дипломного исследования по теме «Барицентрические координаты в евклидовом пространстве», проводимого на факультете математики РГПУ им. А. И. Герцена, мы обратили внимание на приложение барицентрических координат в различных областях науки и техники (многомерная и проективная геометрии, вычислительная математика, компьютерная графика и физическое моделирование, химия и генетика и т. д.) и к решению геометрических задач различного уровня сложности.

В своем развитии барицентрические координаты и барицентрический метод прошли несколько ступеней: *начало идеи барицентрического метода (метода масс)* (Архимед, III век до н.э.), *формализация центра масс* (XVIII в., Жозеф-Луи Лагранж), *геометрическая интерпретация* (XIX в., Август Фердинанд Мебиус), *расширение на многомерные пространства* (с XX века по настоящее время).

Барицентрические координаты определяются с точки зрения геометрии масс [1] и аффинной геометрии [3].

С точки зрения геометрии масс суть барицентрических координат определяется массами, которыми наделяются материальные точки.

Для того чтобы с помощью понятия центра масс решать геометрические задачи, вводится точный математический смысл понятия центра масс с помощью геометрических терминов:

- если точке A поставлено в соответствие число m (называемое массой точки), то говорят, что задана материальная точка tA (m не обязательно положительно);
- центром масс материальных точек $t_1A_1, \dots, t_nA_n$ называется такая точка M , для которой выполняется векторное равенство $t_1\overrightarrow{MA_1} + t_2\overrightarrow{MA_2} + \dots + t_n\overrightarrow{MA_n} = \vec{0}$ (возможна иная запись: $M = c(t_1A_1, t_2A_2, \dots, t_nA_n)$, где центр масс M – взвешенное среднее с материальных точек t_iA_i , где $i = 1, 2, \dots, n$);
- *правило рычага*: в случае двух точек A_1 и A_2 с массами t_1 и t_2 их центр масс делит отрезок A_1A_2 в отношении $t_1 : t_2$;
- для любой системы материальных точек с ненулевой суммарной массой центр масс существует и определяется этими точками однозначно;
- *теорема о группировке масс*: если часть материальных точек заменить точкой, расположенной в их центре масс и имеющей ненулевую массу, равную сумме масс этих точек, то центр масс всех точек не изменится.

Рассмотрим задачу [1], решение которой основано на геометрии масс.

Задача. На сторонах AB и BC треугольника ABC расположены точки M и N соответственно, причем $AM:MB = 3:5$, $BN:NC = 1:4$. Прямые CM и AN пересекаются в точке O . Найдите отношения $AO:ON, CO:OM$ (рисунок 1).

Решение.

1. Поместим массу $t_2 \neq 0$ в вершину B треугольника $\triangle ABC$.

2. Определим массы t_1 и t_3 соответственно для вершин A и C из условий $M = c(t_1A, t_2B)$, $N = c(t_2B, t_3C)$. Согласно правилу рычага имеем: $t_2 = 4t_3$, $3t_1 = 5t_2$.

3. Пусть $t_2 = 12$. Тогда $t_3 = 3$, $t_1 = 20$. Массы точек M и N соответственно 32 и 15.

4. Найдём необходимые отношения, определив массу точки O :

- для отрезка AN : $O = c(20A, 15N)$, то есть $AO:ON = 15:20 = 3:4$;
- для отрезка CM : $O = c(3C, 32M)$, то есть $CO:OM = 32:3$.

Ответ: 3:4; 32:3.

Барицентрические координаты с точки зрения аффинной геометрии – это способ представления произвольной точки M в n -мерном аффинном пространстве относительно заданного набора $(n+1)$ базисных точек общего положения $A_0, A_1, \dots, A_n$.

$$M = \lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_n A_n, \text{ где } \lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$$

В качестве базисных точек в двумерном пространстве могут быть приняты вершины треугольника.

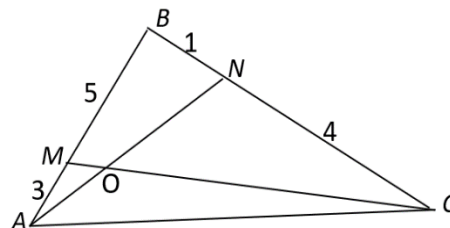


Рисунок 1

Пример.

Точки $A_0(1,0,0)$, $A_1(0,1,0)$, $A_2(0,0,1)$ – точки общего положения (не лежат на одной прямой) в аффинном двумерном пространстве (рисунок 2).

- Точка M – центр тяжести треугольника $A_0A_1A_2$, тогда $M = \frac{1}{3}A_0 + \frac{1}{3}A_1 + \frac{1}{3}A_2$.

- Точка C – вершина параллелограмма $A_0A_1A_2C$, тогда $C = -A_0 + A_1 + A_2$.

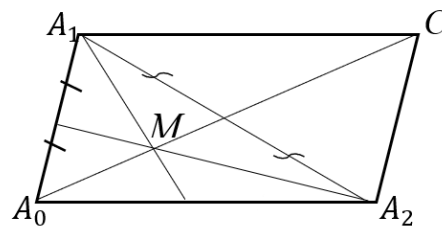


Рисунок 2

Для использования барицентрического метода в решении геометрических задач необходимо выполнить следующие действия:

1. Определить искомую величину как материальную точку.
2. Выбрать базисные точки с фиксированными барицентрическими координатами (наделённые массами), относительно которых будет рассматриваться материальная точка (вершины фигуры, объекты, участвующие в задаче и т. д.).
3. Сделать вывод о количестве координат материальной точки.
4. Найти барицентрические координаты искомой материальной точки согласно условию задачи.
5. Решить задачу на языке барицентрических координат.
6. Записать ответ на геометрическом языке.

Анализ учебной литературы [1, 2, 6] позволил выделить следующие группы планиметрических задач, решение которых упрощается при использовании барицентрического метода.

Барицентрические координаты как отношение длин отрезков

Группа 1. Задачи на определение барицентрических координат точки по её геометрическому описанию (например, пересечения высот остроугольного треугольника; середины отрезка; точки пересечения прямых и т. д.).

Группа 2. Задачи на нахождение расстояний между точками (например, точкой пересечения медиан треугольника и центром вписанной в него окружности; между центрами вписанной и невписанной окружностей и т. д.).

Группа 3. Задачи на нахождение отношений длин отрезков.

Группа 4. Задачи на доказательство (например, принадлежности точки прямой; отрезку; контуру треугольника; лучу; углу и т. д.; принадлежности четырех точек одной прямой; принадлежности нескольких прямых одной точке (прямые пересекаются в одной точке); факта, что барицентрические координаты точки (центра описанной окружности, центра вписанной окружности и т. д.) имеют вид заданных формул).

Барицентрические координаты как отношение площадей

Группа 1. Задачи на нахождение барицентрических координат точки, если известны: углы базисного треугольника (например, центра описанной окружности и т. д.); стороны базисного треугольника; площади треугольников, составляющих базисный треугольник (например, базисный $\triangle ABC$, P – точка внутри треугольника, составляющие треугольники $\triangle ABP$, $\triangle BCP$, $\triangle ACP$).

Группа 2. Задачи на нахождение площади фигуры (площади треугольника, площади фигуры, ограниченной данными прямыми).

Уравнение линий в барицентрических координатах

Группа 1. Задачи на нахождение барицентрических координат точки M относительно «нового» базисного треугольника, если известны её барицентрические координаты относительно «старого» базисного треугольника.

Группа 2. Задачи на составление уравнений: прямой, проходящей через две точки, заданные барицентрическими координатами; окружности, описанной около базисного треугольника.

Группа 3. Задачи на определение взаимного расположения фигур.

Группа 4. Задачи на нахождение площадей фигур, составляя уравнения прямых.

Требования в задачах выделенных групп определяют следующие умения и знания учащихся, формируемые у них в процессе изучения курса геометрии 7–9 класса: нахождение длины отрезка (расстояния между точками), нахождение отношения длин отрезков, решение треугольников, нахождение площадей фигур, определение координат точки, изображение точки по заданным координатам, написание уравнений линий и т. д.

Таким образом, нам представляется возможным организация факультативного курса «Барицентрические координаты в решении планиметрических задач» в первом полугодии 9-го класса в классах с углубленным изучением математики, который будет направлен на знакомство обучающихся с новым для них методом решения планиметрических задач; углубление и расширение предметных и межпредметных знаний и умений учащихся; подготовку учащихся к олимпиадам; формирование их познавательного интереса.

Список литературы

1. Балк, М. Б. Геометрия масс / М. Б. Балк, В. Г. Болтянский. – Москва : Наука, 1987. – 160 с.
2. Понарин, Я. И. Основные метрические задачи планиметрии в барицентрических координатах / Я. П. Понарин // Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона. Выпуск 4. – Киров: Изд-во Вят. гос. пед. ун-та, 2002. – С. 114–132.
3. Степанова, М. А. Барицентрическая система координат. Барицентрическая группа / М. А. Степанова // Современные проблемы математики и математического образования: Герценовские чтения, 77: сборник научных трудов Международной научной конференции, Санкт-Петербург, 16–18 апреля 2024 г. / Российский государственный педагогический университет им. А. И. Герцена. – Санкт-Петербург, 2024. – С. 356–360.
4. Степанова, М. А. Барицентрические координаты на плоскости // Математика для школьников. – 2024. – № 4 – С. 8–15.
5. Степанова, М. А. Применение барицентрических комбинаций точек в теории выпуклых многогранников // Методика преподавания в современной школе: актуальные проблемы и инновационные решения: материалы II Российско-узбекской научно-практической конференции, Ташкент, 15–16 ноября 2024 года, РГПУ им. А. И. Герцена, 2024. – С. 263–268.
6. Эвнин, А. Ю. Метод масс в задачах / А. Ю. Эвнин // Математическое образование. – 2015. – Выпуск 1. – С. 27–47.

ФОРМИРОВАНИЕ ЦЕННОСТЕЙ И РАЗВИТИЕ ТВОРЧЕСКИХ СПОСОБНОСТЕЙ УЧАЩИХСЯ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ

Г. С. Микаелян, д. пед. н, к. ф-м. н., профессор,
Армянский государственный педагогический университет им. Х. Абовяна,
Ереван, Армения
e-mail: h.s.mikaelian@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается проблема развития творческих способностей учащихся через формирование ценностей. Приведены примеры упражнений по темам курса математики, направленные на формирование моральных, эстетических и других ценностей.

Ключевые слова: ценности, творчество, процесс обучения математике.