

Еще один пример развития у учащихся умения работать с ошибками: выявить собственные ошибки, их причины, предупреждать появление ошибок.

Многие учащиеся допускают ошибки при делении натуральных чисел и с трудом объясняют их причины. Это становится одной из причин их формального отношения к освоению операции деления десятичных дробей, возникновения страха перед этим действием. В связи с этим в текстах МПИ-проекта применяется обогащающее поэтапное повторение деления натуральных чисел с параллельным переходом к дробям.

Это дает возможность учащимся принять активное участие в организации переноса. Кроме того, специальные тексты помогают учащимся быть увереннее в подборе цифр в частном, в выборе способов самоконтроля. Они анализируют и обобщают типичные ошибки при делении натуральных чисел, обсуждают причины их появления. Такая работа помогает им попасть в комфортный творческий режим работы. Следует отметить, что в текстах обсуждается не только конкретная ошибка, а то, что важно понять суть ошибки. Воспитывается терпеливое и уважительное отношение к ошибкам других.

Было приведено несколько примеров учебных текстов МПИ-проекта. В целом, в МПИ осуществляется подход, который способствует развитию у учащихся умений искать и разрабатывать альтернативные способы решений, управлять своей учебной деятельностью, реализовывать творческий и рефлексивный подходы к познавательной деятельности, создает условия для развития и проявления творческого потенциала учащихся.

Список литературы

1. Гельфман, Э. Г. Квадратные уравнения. Книга для ученика и учителя. 8–10 классы / Э. Г. Гельфман, Н. Б. Лобаненко [и др.] – М. : ИЛЕКСА, 2025. – 272 с.
2. Гельфман, Э. Г. Математика: учебная книга и практикум для 6 класса: в 2 ч. Ч. 1: Делимость чисел / Э. Г. Гельфман, С. Я. Гриншпон [и др.] – М. : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2013. – 184 с.
3. Гельфман, Э. Г. Про обыкновенные дроби: Учебное пособие по математике / Э. Г. Гельфман, Е. И. Жилина [и др.]. – Томск : Издательство ТГПУ, 2018. – 192 с.
4. Гельфман, Э. Г. Психодидактика школьного учебника: учебное пособие для вузов / Э. Г. Гельфман, М. А. Холодная. – М. : Издательство Юрайт, 2019. – 328 с.

О РЕШЕНИИ РАЦИОНАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ

И. Э. Гриншпон, к. ф.-м. н., доцент,

Томский университет систем управления и радиоэлектроники,

Я. С. Гриншпон, к. ф.-м. н., доцент,

Национальный исследовательский Томский государственный университет,

Томск, Россия

e-mail: irina-grinshpon@yandex.ru

Аннотация. В статье рассматриваются особенности изучения рациональных неравенств и формирования навыков по их решению в школьном курсе математики. Выделены типичные ошибки, характерные для учащихся при решении неравенств. Сформулированы предложения по повышению уровня владения навыками решения неравенств.

Ключевые слова: методика обучения математике, рациональные неравенства, метод интервалов.

ON SOLVING RATIONAL INEQUALITIES

I. E. Grinshpon, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Tomsk University of Control System and Radioelectronics,

Ya. S. Grinshpon, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor,

Abstract. The article discusses the features of studying rational inequalities and learning the skills to solve them in the school mathematics course. It is identified the typical errors which are characteristic for students in solving inequalities. Suggestions are formulated to improve the mastery level of the skills to solve inequalities.

Keywords: methods of teaching mathematics, rational inequalities, sign chart method.

Одним из основных понятий школьного курса алгебры является понятие переменной величины, которое входит практически во все основные изучаемые в алгебре математические объекты (выражения, тождества, функции, уравнения, неравенства). К осознанию смысла этого весьма непростого абстрактного понятия учащиеся должны постепенно приходить при работе с перечисленными выше объектами разных типов (целые алгебраические, дробно-рациональные, иррациональные, тригонометрические, показательные, логарифмические).

Среди этих объектов наибольшую трудность у учащихся, как правило, вызывают неравенства. Действительно, навык решения неравенств наиболее комплексный, для успешного его освоения даже на базовом уровне требуется уверенное владение остальными навыками: преобразование выражений (в том числе с применением тождеств) для сведения неравенств к каноническому виду (то есть к виду, когда в правой части неравенства записано число 0, а левая часть разложена на множители), построение эскизов графиков функций (метод парабол), решение уравнений для нахождения нулей числителя и знаменателя в методе интервалов.

Неудивительно, что именно решение неравенств, как правило, вызывает наибольшие затруднения у учащихся. Опыт авторов по диагностике пробелов в школьных знаниях и умениях первокурсников путем проведения входного тестирования [1] показывает, что у значительного числа выпускников школ не сформированы на должном уровне навыки решения алгебраических неравенств (тем более, они неспособны решать неравенства других типов, большинство из которых сводится к алгебраическим). При этом почти у всех студентов есть общие поверхностные представления о том, как решаются неравенства. Такими обрывочными несистемными знаниями они нахватались при подготовке к сдаче ЕГЭ через различные интернет-ресурсы: неравенство (показательное, логарифмическое или смешанного типа) входит в контрольно-измерительные материалы профильного ЕГЭ по математике (задание 15).

Перечислим ошибки, наиболее часто встречающиеся у учащихся при решении неравенств, и приведем примеры, в которых возникают данные ошибки.

1. Решение неравенств по алгоритмам решения уравнений (с заменой знака «равно» на знаки решаемого неравенства): например, неравенство $x^2 - 4 > 0$ ошибочно преобразуют к виду $x > \pm 2$ (на вопрос о смысле этой записи – больше обоих чисел или большего какого-либо одного из них – ответить не могут), а неравенство $\frac{2}{x} < 1$ – к виду $x > 2$ (объясняя этот переход свойством пропорции).

2. Умножение обеих частей неравенства на общий знаменатель с учетом условия отличия его от нуля (частный случай предыдущей ошибки): например, для неравенства $\frac{1}{x+2} - \frac{1}{x-2} \leq 1$ записывают ограничения $x \neq \pm 2$ и, домножая на $x^2 - 4$, приходят к верному на всей прямой неравенству $x^2 \geq 0$, откуда делают ошибочный вывод, что $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

3. Сохранение знака неравенства при умножении обеих частей на отрицательное число (или определение знаков функции, полученной после деления уравнения на отрицательное число): например, для неравенства $4x - 2x^2 > 0$, ищут нули функции, решая уравнения $4x - 2x^2 = 0$, обе части которого делят на (-2) , и далее на промежутках числовой оси определяют знаки выражения $x^2 - 2x$.

4. Отбрасывание квадратичных множителей с отрицательным дискриминантом (с некорректным пояснением «у этих выражений нет решений»): например, тот факт, что левая часть неравенства $\frac{x-x^2-2}{3x-x^2-2} \geq 0$ не имеет нулей функции, одну часть учащихся вводит в полный ступор (они не понимают, как решать далее), а другая часть продолжает решать, определяя на промежутках знаки только знаменателя.

5. Сокращение дроби на переменный множитель без учета расширения области определения функции (привычка находить ОДЗ вместе с нулями функции после упрощения левой части неравенства приводит здесь к приобретению постороннего решения): например, в неравенстве $\frac{2x^2-21x+10}{x^2-13x+30} \geq 1$ сокращение дроби на $(x - 10)$ упрощает его решение, но из полученного множества значений необходимо исключить $x = 10$.

6. Применение правила знакопеременования без учета кратности корней и знака на крайнем правом промежутке (часто на этом промежутке не задумываясь ставят знак «+»): например, в неравенстве $(2 - x)(x^2 - x - 2) < 0$ на правых промежутках $(2; +\infty)$ и $(-1; 2)$ должны стоять знаки «-».

7. Потеря изолированных точек при записи множества решений нестрогого неравенства: например, ответ на неравенство $x^2(x - 1) \geq 0$ имеет вид $x \in \{0\} \cup [1; +\infty)$.

8. Применение неверного утверждения «квадрат всегда положителен»: например, считают, что неравенство $(x^2 - 1)^2 > 0$ справедливо на всей числовой прямой, хотя, на самом деле, оно не выполняется при $x = \pm 1$.

Интересно отметить, что при решении простейших неравенств (вида $x^2 - 4 > 0$ или $\frac{2}{x} < 1$) ошибки возникают даже чаще, чем при решении более громоздких аналогичных неравенств (вида $x^2 - x - 2 > 0$ или $\frac{2}{x} < x + 1$). Это связано с попытками учащихся избежать применения долгого метода интервалов в тех случаях, где пример выглядит простым и его решение, по их мнению, можно увидеть методом «пристального взгляда».

Все приведенные выше примеры указывают на то, что при изучении данной темы нужно обращать внимание не только на стандартные шаблонные ситуации (числитель и знаменатель раскладываются на линейные множители, все старшие коэффициенты положительны, отсутствуют кратные корни), но и на специфику особых ситуаций. Отработка навыков решения рациональных неравенств требует и от учителя, и от ученика вдумчивого отношения к каждому шагу решения, внимательности и аккуратности, умения ориентироваться в разнообразии возможных ситуаций.

Проанализируем, как изучаются неравенства в школе. Понятия «неравенство с переменной» и «множество решений неравенства» вводятся в 8-ом классе на примере линейных неравенств (метод алгебраических преобразований) и простейших квадратных неравенств (метод парабол). В 9-ом классе после повторения методов, изученных ранее, переходят к рациональным неравенствам (метод сведения к совокупности двух систем и метод интервалов). При этом изложение метода интервалов проводится весьма поверхностно, путем разбора нескольких примеров. И только в учебниках углубленного уровня подробно разбираются дробно-рациональные неравенства и корректно и аргументировано выводится метод интервалов (включая рассмотрение случая кратных корней, при котором может

нарушаться правило знаочередования). В 10-ом и 11-ом классах изучение показательных и логарифмических неравенств, а также исследование монотонности дифференцируемых функций на основе определения знаков их производной, уже не сопровождается повторением методов решения алгебраических неравенств (видимо, предполагается, что учащиеся хорошо усвоили их в основной школе).

Для устранения пробелов в решении алгебраических неравенств можно использовать следующие идеи (везде далее символ «*» заменяет один из знаков «>», «<», «≥», «≤»).

1) Начать рассмотрение неравенств с одной переменной с изучения классов неравенств конкретного вида, допускающих решение без графических чертежей, с подчеркиванием отличий от решения похожих уравнений: $ax + b * 0$ (линейные); $(ax + b)^2 * 0$; $x^2 * a$; $\frac{a}{x} * b$.

2) Например, в ходе рассмотрения неравенств $x^2 > 4$ и $x^2 > -4$ (второе из них справедливо при всех действительных значениях x), выводится общая схема решения неравенства $x^2 > a$. Первое неравенство решается для неотрицательных x , а затем можно заметить, что при противоположных значениях x левая часть не меняется и, записав неравенство в виде $(-x)^2 > 4$, применить уже изученное ранее правило решения; далее, получив $-x > 2$, сделать вывод, что $x < -2$, и объединить решения.

3) Четко классифицировать базовые типы неравенств по методу их решения: чисто алгебраически можно решать только неравенства из предыдущего пункта, любое другое рациональное неравенство обязательно сопровождаем чертежом (либо эскиз графика функции, либо числовая прямая с указанием знаков функции на разных промежутках).

4) Изложение метода парабол предварить заданиями, в которых для заданного графика функции $y = f(x)$ (произвольная кусочно-непрерывная кривая, необязательно парабола) требуется решить неравенство вида $f(x) * c$. Далее можно отработать графический метод не только на квадратных неравенствах $ax^2 + bx + c * 0$, но и неравенствах вида $a\sqrt{x+b} + c * 0$ и $\frac{a}{x+b} + c * 0$.

5) При первоначальном знакомстве с методом интервалов классифицировать различные случаи: а) все множители линейные и различные; б) множители линейные, но среди них есть одинаковые (наличие кратных корней); в) среди множителей есть квадратные с отрицательным дискриминантом.

6) После разбора нескольких соответствующих примеров, решаемых методом интервалов, обсудить взаимосвязь между знаками старших коэффициентов множителей, на которые разложена функция, и знаком функции на самом правом промежутке.

7) Отдельное внимание обратить на особые случаи: а) множество решений неравенства содержит изолированные точки; б) из множества решений неравенства исключены изолированные точки. Можно попросить учащихся самостоятельно составить такие неравенства (например, решение которого имеет вид объединения трёх промежутков и двух изолированных точек или вид промежутка, из которого исключены две точки).

8) В формулировке условий на применение метода интервалов необходимо обратить внимание на слова «дробь **может** менять знак». Для определения знаков рациональной дроби на промежутках, на которые нули числителя и знаменателя разделяют числовую прямую, удобно разложить числитель и знаменатель на линейные и квадратичные множители, не имеющие действительных корней. Согласно основной теореме алгебры многочленов такое разложение возможно.

В заключение отметим, что психологами установлено, что допущенная учащимся и вовремя не исправленная ошибка обладает известной устойчивостью и с большим трудом изживается при дальнейшем обучении. В связи с этим целесообразно уже с первого занятия

указывать на совпадения и различия в методах решения уравнений и неравенств. Полезно на уроках анализировать ошибки, допущенные при выполнении заданий на решение неравенств, и вскрывать причины их возникновения. Наблюдения и предложения, изложенные в этой статье, могут способствовать улучшению ситуации в усвоении навыков решения неравенств.

Список литературы

1. Гриншпон, И. Э. Пробелы в школьных знаниях и навыках у первокурсников: диагностика и способы решения / И. Э. Гриншпон, Я. С. Гриншпон // Материалы VIII Международной конференции «Математика, её приложения и математическое образование», г. Улан-Удэ, Байкал, 26 июня, 1 июля 2023 г.. – Улан-Удэ : Изд-во ВСГУТУ, 2023. – С. 75–78.

ОРГАНИЗАЦИЯ ТВОРЧЕСКИХ РАБОТ УЧАЩИХСЯ ПРИ ОБУЧЕНИИ ТЕМЕ «ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ»

Ю. К. Джуманиязова, независимый исследователь, учитель математики,
Национальный педагогический университет Узбекистана им. Низами,
Школа № 300 Сергелийского района,
Ташкент, Узбекистан
e-mail: yulduz26051981@gmail.com

Аннотация. В данной работе раскрываются пути развития творческой активности учащихся в процессе преподавания темы «Линейная функция» по предмету алгебра в общеобразовательной школе. Описан опыт использования технологии лепбука, через которую организуются творческие проекты, способствующие развитию у школьников навыков самостоятельного мышления, решения проблем, дизайна и презентации. Результаты исследования показывают, что творческий подход способствует повышению эффективности обучения.

Ключевые слова: линейная функция, технология «Лепбук», творческое задание, паспорт проекта.

ORGANIZATION OF STUDENTS' CREATIVE WORK WHEN TEACHING THE TOPIC «LINEAR FUNCTION»

Yu. K. Jumaniyazova, Independent Researcher, Mathematics Teacher,
Uzbekistan National Pedagogical University named after Nizami,
Mathematics teacher of School No. 300 of Sergeli District,
Tashkent, Uzbekistan
email: yulduz26051981@gmail.com

Abstract. This work reveals the ways of developing students' creative activity in the process of teaching the topic «Linear Function» in the subject of algebra in general education schools. The experience of using lapbook technology has been described, through which creative projects are organized that contribute to the development of students' independent thinking, problem-solving, design, and presentation skills. The research results show that a creative approach contributes to increased learning effectiveness.

Keywords: linear function, lapbook technology, creative task, project passport.

Современное образование требует от учащихся не только теоретических знаний, но и практических навыков, способности к самостоятельному мышлению, творческому подходу и критической оценке. Особенно в математике глубокое понимание содержания