3. Открытый областной конкурс «Экспонат для музея занимательной математики» // URL: https://narfu.ru/hsitas/prof/eksponat-dlya-muzeya/ (дата обращения 11.06.2025).

4. Приказ Минобрнауки России от 17.12.2010 N 1897 (ред. от 31.12.2015) «Об утверждении федерального государственного образовательного стандарта основного общего образования» (Зарегистрировано в Минюсте России 01.02.2011 №19644) // URL: https://sh40-uyar-r04.gosweb.gosuslugi.ru/netcat_files/30/41/Prikaz_FGOS_osnovnogo_obschego_obrazovaniya.pdf (дата обращения: 11.06.2025)

5. «Урок в музее»: проект единого образовательного пространства музея и школы / Сост. М. Мацкевич. – М., 2016. – 110 с.

СОВРЕМЕННЫЕ ТЕНДЕНЦИИ РАЗВИТИЯ ОЛИМПИАДНОГО ДВИЖЕНИЯ ПО МАТЕМАТИКЕ В РЕСПУБЛИКЕ БЕЛАРУСЬ

Д. Ф. Базылев, к. ф.-м. н., доцент,
Белорусский государственный университет,
Минск, Республика Беларусь
e-mail: dimsd160@gmail.com

Аннотация. Выделены, охарактеризованы и проиллюстрированы примерами основные тенденции развития олимпиадного движения по математике в Республике Беларусь.
Ключевые слова: олимпиады по математике, обучение математике.

MODERN TRENDS IN THE DEVELOPMENT OF THE OLYMPIC MOVEMENT IN MATHEMATICS IN THE REPUBLIC OF BELARUS

D. F. Bazyleu, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Belarusian State University,
Minsk, Republic of Belarus
e-mail: dimsd160@gmail.com

Annotation. The main trends in the development of the Olympiad movement in mathematics in the Republic of Belarus are highlighted, characterized and illustrated with examples.
Keywords: math Olympiads, teaching mathematics.

Олимпиадное движение является одной из составляющих национальной системы общего среднего и высшего образования в Республике Беларусь. Победители заключительного этапа республиканской олимпиады, получившие дипломы I, II и III степени поощряются специальным фондом Президента Республики Беларусь по социальной поддержке одаренных учащихся и студентов. Из числа победителей заключительного этапа республиканской олимпиады по математике для школьников (как правило, это 6 учащихся X–XI классов) формируется национальная команда для участия в международной математической олимпиаде (IMO). Выделим основные тенденции развития олимпиадного движения по математике в Беларуси.

1. *Расширение спектра олимпиад, в которых участвуют школьники*. Традиционно в Беларуси для учащихся VIII–XI классов проводится республиканская олимпиада по математике. Первый этап – в учреждениях образования; второй – районный (городской), а также в учреждениях общего среднего образования областного подчинения; третий – областной, а также Минский городской и в учреждениях высшего образования, реализующих образовательную программу среднего образования (в Лицее Белорусского государственного университета); четвертый – заключительный [1]. Ежегодно с 1992 года команда Беларуси

участвует в IMO. Кроме того, белорусские школьники участвуют в олимпиадах по математике для учащихся младших классов, математическом конкурсе «Кенгуру», Международном математическом Турнире городов, Международной Жаутыковской олимпиаде по математике, Международной олимпиаде по математике и информатике имени Аль-Хорезми, Европейской олимпиаде по математике для девушек (EGMO), различных интернет-олимпиадах. Количество математических соревнований постоянно увеличивается.

2. *Подключение к процессу олимпиадной подготовки специалистов различного профиля, в частности психологов.* Для того, чтобы помочь учащимся получить как можно более высокие результаты, ведётся командная работа педагогов, тренеров, психологов и многих других специалистов. Иногда участники соревнований не могут преодолеть психологический барьер. В подтверждение этого приведём пример.

На международной олимпиаде по математике в 2023 году в Японии была предложена задача 1.

Задача 1 (IMO, 2023). Пусть n - натуральное число. *Японский треугольник* состоит из $1+2+...+n$ одинаковых кругов, выложенных в форме равностороннего треугольника так, что для каждого $i=1, 2, ..., n$ ряд с номером i состоит ровно из i кругов, в точности один из которых покрашен в красный цвет. *Путем ниндзя* в японском треугольнике называется последовательность из n кругов, построенная следующим образом: начинаем с круга в ряде 1 и затем поочередно спускаемся вниз, переходя от круга к одному из двух кругов непосредственно под ним, пока не дойдем до ряда n. На рисунке 1 приведен пример японского треугольника для $n=6$, а также пути ниндзя, содержащего два красных круга. Найдите наибольшее число k, зависящее от n, такое, что в любом японском треугольнике существует путь ниндзя, содержащий хотя бы k красных кругов [5].

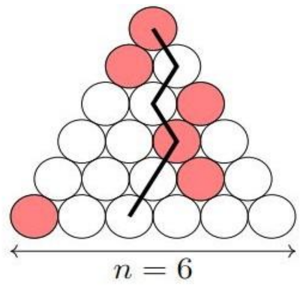

Рисунок 1

Решение этой задачи непростое и ответ нетривиальный: $k=[\log_2 n]+1$. Через год на международной математической олимпиаде в Великобритании была предложена задача 2.

Задача 2 (IMO, 2024). Улитка Турбо находится в верхнем ряду таблицы с 2024 строками и 2023 столбцами и хочет добраться до нижнего ряда. Однако в игре есть 2022 скрытых жука, по одному в каждой строке, за исключением первой и последней, причем в любом столбце нет двух жуков одновременно. Улитка делает серию попыток перейти от первой строки к последней. При каждой попытке она выбирает для начала любую ячейку в первом ряду, затем совершает серию перемещений из клетки в соседнюю клетку, имеющую общую сторону (улитке разрешается вернуться к ранее посещенной ячейке). Если улитка достигает ячейки с жуком, её попытка заканчивается, и она переносится обратно в первый ряд, чтобы начать новую попытку. Жуки не перемещаются между попытками, и улитка запоминает, есть ли жук в каждой клетке, которую она посетила. Если улитка достигнет любой ячейки в последнем ряду, её попытка завершается, улитка выигрывает. Найдите наименьшее целое число n, чтобы у улитки была стратегия, гарантирующая ей возможность добраться до нижнего ряда не более чем за n попыток, независимо от того, где будут размещены жуки [6].

Естественно предположить, что поскольку два года подряд предлагают похожие по постановке задачи, то вторая задача должна быть сложнее первой. Многие участники IMO 2024 искали сложные пути решения, использовали увесистый математический аппарат, а решение оказалось таким, что его можно объяснить учащимся младших классов (ответ: $n = 3$). Некоторые участники из команд-фаворитов, таких как Китай, Южная Корея, не справились с решением, так как не смогли преодолеть именно психологический, а не математический барьер. Участники сборной Беларуси успешно справились с этой задачей (пять человек из шести получили максимальный балл). В результате команда завоевала четыре золотые и две бронзовые медали, что принесло ей 5-е общекомандное место среди 108 стран. Это лучшее выступление за всю историю Беларуси. Ближайший похожий результат был в 1999 году, когда сборная Беларуси завоевала три золотые и три серебряные медали.

3. *Использование в подготовке к олимпиадам обобщений классических математических результатов.* Ряд олимпиадных задач, используемых для подготовки учащихся к олимпиадам, является обобщением известных утверждений. Например, в планиметрии известна формула Эйлера, выражающая расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей треугольника через радиусы этих окружностей: $OI^2 = R^2 - 2Rr$ (рисунок 2).

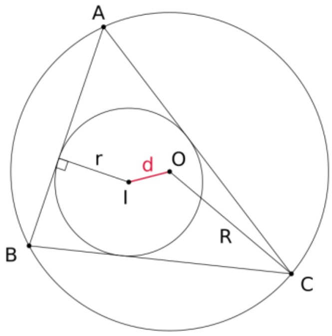

Рисунок 2

Теорема Фусса является обобщением формулы Эйлера для бицентрических четырехугольников (рисунок 3): «Пусть $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O и радиусом R, а также описан около окружности с центром в точке I и радиусом r, тогда $OI^2 = R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}$ «.

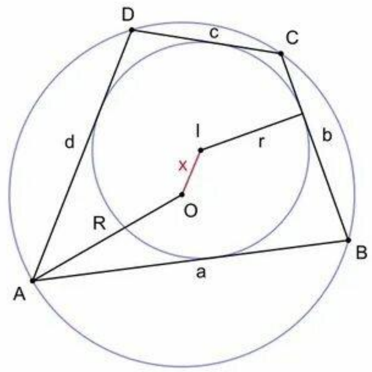

Рисунок 3

Этот факт можно доказать, используя классический поризм Понселе: «Пусть многоугольник $A_1A_2...A_n$ вписан в окружность C и описан около окружности G. На окружности C взяты точки B_1, B_2 так, что отрезок B_1B_2 касается окружности G. Тогда существует многоугольник $B_1B_2...B_n$, который вписан в окружность C и описан около окружности G».

Принимая во внимание теорему Понселе, очевидно, что формулу Фусса достаточно доказать для дельтоида (рисунок 4), тогда она будет справедлива и для любого четырехугольника.

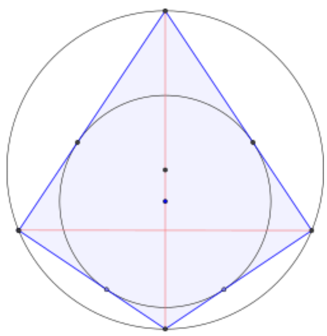

Рисунок 4

Для бицентрических четырехугольников формулу Эйлера можно обобщить еще и так, как это сделано в задаче 3, решение которой вызывает затруднения даже у медалистов IMO.

Задача 3. Пусть четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O и радиусом R, а также описан около окружности с центром в точке I и радиусом r, тогда $OI^2 = R^2 - 2Rr + r(2r - r_1 - r_2)$, где $r_1, r_2 -$ радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC и ADC [4].

Аналогичные примеры можно привести и по алгебре. Например, в задачах 4 и 5 предлагается доказать вариации классических неравенств: Коши-Буняковского и неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим [3].

Задача 4. Пусть $C = (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) - (a_1b_1 + ...a_nb_n)^2$, где $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ — некоторые натуральные числа ($n > 1$). 1) Докажите, что если $C < n - 1$, то $C = 0$. 2) Докажите, что для любого натурального значения n существуют натуральные числа $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$, такие, что $C = n - 1$.

Задача 5. Пусть $d_1, \ldots, d_n$ – все натуральные делители натурального числа m. Докажите, что $d_1 + \ldots + d_n - n\sqrt[n]{d_1 \cdot \ldots \cdot d_n} \geq \left(\sqrt{m} - 1\right)^2$.

4. *Включение в программу подготовки школьников к олимпиадам вопросов вузовской программы.* Условия задач международных математических олимпиад для школьников, как правило, не выходят за рамки школьной программы, но их решение зачастую требует использования терминов и фактов вузовской программы, например, комплексных чисел (они в белорусской школе не изучаются), символов Лежандра и Якоби, двойного отношения точек. Примером тому является решение задачи 6, которое во многом опирается на способ нахождения автоморфизмов поля действительных чисел и поля комплексных чисел.

Задача 6 (IMO, 2002). Функция f определена на множестве действительных чисел и принимает значения в этом множестве. Известно, что $(f(x)+f(y))\cdot(f(z)+f(t)) = f(xy-zt)+f(xt+yz)$ для любых действительных чисел x, y, z, t. Найдите все такие функции f [2].

С целью расширения математического кругозора учащихся в программу их подготовки к олимпиадам включаются вопросы вузовской программы и используются задачи студенческих международных олимпиад (IMC). Например, решение задачи 7 опирается на знание теории комплексных чисел.

Задача 7 (IMC, 2008). Докажите, что если многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на многочлен $x^{2m}-x^m+1$ ($m, n \in \boldsymbol{N}$), то многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится также на многочлен $x^{2m}+x^m+1$ [3].

Стоит отметить, что ряд студенческих олимпиадных задач можно решить и в рамках школьной программы, но с использованием знаний материала университетской программы они решаются проще. Примером является задача 8.

Задача 8. Пусть правильный многоугольник $A_1A_2...A_{14}$ вписан в окружность с радиусом 1. Докажите, что $\dfrac{1}{\sqrt[3]{A_1A_2}} - \dfrac{1}{\sqrt[3]{A_1A_4}} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{A_1A_6}} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{7}-4}$.

5. *Повышение требований к качеству олимпиадных задач.* Формирование навыков решения олимпиадных задач требует большого количества задач по каждой теме, определенной программой подготовки, причем это должны быть задачи, имеющие оригинальную и нестандартную постановку. Например, в задаче 9 областью определения функции является множество точек плоскости, а множеством её значений – множество действительных чисел.

Задача 9. Пусть f – функция, которая каждой точке плоскости ставит в соответствие некоторое действительное число, причем для любого треугольника ABC выполнено следующее условие: если $f(A) \leq f(B) \leq f(C)$, то $f(A)-f(B)+f(C)=f(H)$, где H – ортоцентр треугольника ABC, т. е. точка пересечения высот этого треугольника. Найдите все такие функции f.

Правилом хорошего тона при составлении задач для математических олимпиад и для подготовки к ним считается краткость и элегантность условия задачи в сочетании с нестандартностью и глубиной её решения. Примером может служить задача 10, которая кажется довольно простой и может быть решена с использованием простейших фактов, связанных с суммами углов треугольника и многоугольника, но даже при $n=3$ является сложной для школьников. Эта задача была представлена на международной математической олимпиаде IMO-1991 [7], а её решение в общем случае является еще более сложной задачей.

Задача 10. Внутри выпуклого многоугольника $A_1 \ldots A_n$ взята точка M. Докажите, что по крайней мере один из углов $MA_1A_2, MA_2A_3, \ldots, MA_{n-1}A_n, MA_nA_1$ не превосходит $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n}$ [3].

Таким образом, в развитии олимпиадного движения по математике в Беларуси можно выделить следующие тенденции: расширение спектра олимпиад, в которых участвуют школьники; подключение к процессу олимпиадной подготовки специалистов различного профиля, в частности психологов; использование в подготовке к олимпиадам обобщений классических математических результатов, вопросов вузовской программы; повышение требований к качеству олимпиадных математических задач.

Список литературы

1. Об утверждении инструкции о порядке проведения республиканской олимпиады по учебным предметам: Постановление Министерства образования Республики Беларусь от 20 нояб. 2003 г. № 73 // Министерство образования Республики Беларусь. URL: https://edu.gov.by/urovni-obrazovaniya/srenee-obr/srenee-obr/informatsiya/respublikanskaya-olimpiada-po-uchebnym-predmetam/index.php?sphrase_id=529199 (дата обращения: 15.06.2025).

2. Агаханов, Н. Х. Математика. Международные олимпиады / Н. Х. Агаханов, П. А. Кожевников, Д. А. Терешин. – М. : Просвещение, 2010. – 127 с.

3. Базылев, Д. Ф. Олимпиадные задачи по математике / Д. Ф. Базылев. – М.: ЛИБРОКОМ, 2010. – 184 с.

4. Базылев, Д. Ф. О некоторых метрических свойствах вписанных и описанных четырехугольников / Д. Ф. Базылев // Матэматыка. Праблемы выкладання. – 2013. – № 5. – С. 59–64.

5. Базылев, Д. Ф. LXIV Международная математическая олимпиада / Д. Ф. Базылев // Матэматыка і фізіка. – 2024. – № 1. – С. 43–50.

6. Базылев, Д. Ф. LXV Международная математическая олимпиада / Д. Ф. Базылев // Матэматыка і фізіка. – 2025. – № 1. – С. 44–49.

7. Фомин, А. А. Международные математические олимпиады / А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. – М. : Дрофа, 1998. – 160 с.

ИНТЕГРАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЙ ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ СИСТЕМ В ПОДГОТОВКУ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ

А. А. Францкевич, к. пед. н., доцент,
Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка,
Минск, Беларусь
e-mail: frantskevich@bspu.by

Аннотация. Представлен опыт БГПУ по системной интеграции технологий искусственного интеллекта (ИИ) в процесс подготовки будущих педагогов. Описывается комплексный подход, который охватывает не только внедрение таких генеративных сервисов, как ChatGPT и YandexGPT, но и формирование у студентов и преподавателей цифровой компетентности, включающей этические и правовые аспекты использования ИИ. Автор подчеркивает, что ключевой задачей является не просто освоение технических инструментов, а трансформация роли учителя от транслятора знаний к фасилитатору и тьютору, способному критически и этически применять ИИ в учебном процессе. Результаты внедрения программ повышения квалификации подтверждают, что такой подход способствует развитию у педагогов готовности к инновациям и адаптации к вызовам цифровой эпохи.

Ключевые слова: цифровая трансформация, искусственный интеллект, подготовка педагогов, цифровая зрелость, генеративный ИИ, цифровая педагогика.