

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЙ ТРЕНД В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ В ЦИФРОВУЮ ЭПОХУ

В. А. Тестов, д. пед. н., к. ф.-м. н., профессор,
Вологодский государственный университет,
Вологда, Россия,

Р. А. Попков, к. ф.-м. н., доцент,
Национальный исследовательский университет ИТМО,
Санкт-Петербург, Россия
vladafan@inbox.ru, rpopkov@itmo.ru

Аннотация. Показано, что в цифровую эпоху в математике все заметнее развиваются экспериментальные направления. Все актуальнее становится внедрение в обучение математике экспериментальных, исследовательских методов. Необходимо обновлять содержание математических курсов и методы их преподавания, отдавая предпочтение исследовательскому обучению и применению систем компьютерной математики.

Ключевые слова: математизация знаний, экспериментальные методы, исследовательское обучение, системы компьютерной алгебры.

EXPERIMENTAL TRENDS IN TEACHING MATHEMATICS IN THE DIGITAL AGE

V. A. Testov, Doctor of Pedagogical Sciences,
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Vologda State University,
Vologda, Russia,

R. A. Popkov, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
National research. ITMO University,
Saint Petersburg, Russia,
vladafan@inbox.ru, rpopkov@itmo.ru

Annotation. It is shown that experimental trends are developing more and more noticeably in mathematics in the digital age. The introduction of experimental mathematics methods into the educational process is becoming increasingly relevant. It is necessary to update the content of mathematical courses and their teaching methods, giving preference to research training and the use of computer mathematics systems.

Keywords: knowledge mathematization, experimental methods, research training, computer algebra systems.

Процесс цифровизации науки и образования возник не только с появлением новых компьютерных технологий, но и в связи с началом нового этапа математизации знаний, с возникновением таких математизированных областей знаний, как искусственный интеллект (ИИ), большие данные, нейросети и т. д. Информатизация общества стремительно ускоряется, происходит «революция искусственного интеллекта», по своему масштабу сопоставимая с предыдущими информационными революциями. Для перехода к цифровизации потребовалось достижение математикой некоторого нового, более высокого уровня развития. Все это свидетельствует о необходимости рассматривать математизацию знаний как фундамент процесса цифровизации [4].

Необходимо заметить, что на протяжении всей истории развития математики её основные результаты были получены сначала с помощью экспериментов и индуктивных

рассуждений. Но затем математика превратилась в теоретическую науку, основанную на аксиоматическом методе, особенно в период с конца XIX и по 60-е годы XX века. Аксиоматическое мышление оказало существенное влияние на развитие всей математики, которая стала образцом использования в науке точных понятий и логических рассуждений. Такое понимание математики проникло и в школьные, и вузовские математические курсы. Такие курсы приобрели в основном теоретический характер, а авторы пособий и учебников по математике стремились все логически обосновать и доказать. Однако во многих случаях логическую стройность они были вынуждены заменить псевдострогостью.

Но начиная с 70-х годов XX века идеи аксиоматической парадигмы в математике стали уступать место другим направлениям, которые ближе к практике и экспериментам. В настоящее время характерной чертой математических исследований становится взаимодействие в них различных экспериментальных и теоретических методов.

С появлением современных компьютеров и программных средств для обработки математических данных существенно увеличились возможности проведения экспериментов с математическими объектами, заменяющими реальные натурные эксперименты. Всё актуальнее становится внедрение методов экспериментальной математики не только в научные исследования, но и в образовательный процесс. В цифровом обществе становится все более очевидным, что учащиеся должны быть освобождены от необходимости вручную выполнять сложные преобразования, запоминать большой объём информации, что необходимо больше внимания уделять развитию навыков творческого мышления. Многие учителя предприняли шаги по обновлению методов обучения математике в соответствии с новой парадигмой, стремясь усилить экспериментальную составляющую и использовать с этой целью системы компьютерной математики. Подавляющее большинство из этих попыток относилось к курсу геометрии с использованием систем динамической геометрии: «GeoGebra», «1С: Математический конструктор» и других, причем, как для школьников, так и для студентов – будущих учителей. Теперь приходит пора широкого применения компьютерных средств не только в геометрии, но и алгебре, и математическом анализе.

В цифровую эпоху новое звучание получила и проблема формирования математического мышления у школьников и студентов [3]. Хотя эта проблема давно стоит перед исследователями, но пути её решения все время совершенствуются. В настоящее время решение этой проблемы исследователи все больше связывают с возможностями искусственного интеллекта, современных компьютеров и систем компьютерной математики.

Исследования показывают, что эффективность обучения математике зависит не только от глубины и прочности овладения обучающимися знаниями, умениями и навыками, но и в значительной степени от развития их математического мышления, от уровня их готовности к исследовательским и творческим действиям, причем не только в области математики. Основной целью математического образования, как отмечал В. И. Арнольд, должно быть воспитание умения математически исследовать явления реального мира.

Приходит осознание того, что целью обучения математике, прежде всего, должно быть понимание идей, заложенных в основных объектах, теоремах и формулах, а также формирование готовности к исследованиям. Ключевым в обучении математике должно являться обучение математическим методам рассуждения. Это включает в себя не только построение доказательств, примеров и контрпримеров к утверждениям, но и само осмысление введенных понятий, внимательный анализ уже построенных примеров, выдвижение гипотез, впоследствии подвергаемых проверке. В той мере, в какой математика является естественной наукой, ей присущи эксперименты. Естественно порекомендовать выполнение экспериментов, если это возможно, компьютеру.

Но если взглянуть на классические школьные и вузовские математические дисциплины, то можно увидеть накопившиеся недостатки. Прежде всего, это проявляется в консерватизме как при выборе содержания, так и в способах его представления. Основное содержание этих дисциплин не обновлялось не только в школьном курсе, но и во многих вузах более полувека. Многие преподаватели математических кафедр не стремятся к обновлению своих курсов. Основные математические курсы (алгебры, математического анализа) пытаются перестроить лишь отдельные энтузиасты. В результате студенты вынуждены вручную решать, например, системы линейных уравнений с помощью метода Крамера, теряют много времени на вычисление интегралов, на решение дифференциальных уравнений, хотя, используя компьютер, все это можно сделать намного быстрее. Студентам и школьникам зачастую предлагается большое количество бессмысленных вычислительно-синтаксических задач, которые не представляют собой никаких значимых идей.

Современные системы компьютерной алгебры предоставляют замечательную возможность проведения формальных вычислений и различных экспериментов. Эти системы не требуют от человека владения глубокими программистскими навыками, а их команды близки естественному языку [1]. С нашей точки зрения, использование систем компьютерной алгебры полезно внедрять еще в школе или с самых первых дней пребывания в вузе [2].

Представляется разумным сосредоточиться на задачах, с которыми учащиеся сталкиваются в школе и которые предоставляют хорошие примеры для будущих абстрактных понятий. В частности, одним из таких вариантов являются задачи по теории чисел. Они являются одними из самых сложных задач на ЕГЭ, поэтому учащиеся имеют к ним, с одной стороны, интерес, а с другой – некоторый страх. Сам восторг, испытываемый от того, сколь эффективно система компьютерной алгебры решает сложную задачу, является мотивирующим для дальнейшего изучения математики. Ведь сразу возникает вопрос, *как* она это делает? И здесь мы возвращаемся к тому, о чём сказали чуть выше – к *пониманию* идей. Разумеется, это может потребовать изменений в привычных математических курсах, выбрасыванию явной архаики и добавления чего-то нового. Например, необходимо большее внимание к конечным объектам. Студенты на знакомых задачах знакомятся с синтаксисом систем компьютерной алгебры, основными командами, что впоследствии облегчает использование этих систем для работы уже с новыми объектами. Выбор конкретной системы компьютерной алгебры является делом вкуса и привычки. Мы советуем обратить внимание на систему *SageMath*. Она бесплатная и свободно распространяемая, реально богатая возможностями и продолжающаяся развиваться, её синтаксис подобен языку *Python*. Приведём несколько примеров (после знака # в *Sage* приводится комментарий).

1. Определите, сколькими нулями оканчивается число 2025!.

Данная задача является поводом вспомнить основную теорему арифметики и *понять* благодаря чему на конце числа получаются нули. Как эту задачу решить в *Sage*? Разумеется, не нужно выводить само это число на экран и считать нули вручную. Систему нужно спрашивать именно то, что мы хотим узнать – это важный навык при работе, и стоит сразу приучать к нему студентов.

```
sage: n = factorial(2025) # мы не выводим на экран само число!
sage: str_n = str(n) # преобразовываем числа в строку
sage: len(str_n) # длина строки
5819
sage: str_n.rstrip('0') # удаление из строки нулей на конце
sage: len(str_n) – len(str_n.rstrip('0'))
505
```

2. Числа 2^{2025} и 5^{2025} выписаны одно за другим в десятичной записи. Сколько всего цифр выписано? Здесь уместно сначала рассмотреть частные случаи с маленькими степенями и сформулировать гипотезу. *Sage* позволяет её проверить.

```
sage: a = 2^2025; b = 5^2025
sage: str_a = str(a); str_b = str(b)
sage: len(str_a + str_b)
2026
```

3. Какой остаток получится при делении числа $\underbrace{2025\,2025\dots2025}_{100}$ на 133?

Для решения этой задачи можно организовать цикл, но есть способ проще.

```
sage: str_n = '2025' * 100 # создаём строку из ста блоков 2025
sage: n = Integer(str_n) # преобразовываем строку в целое число
sage: mod(n,133) # получаем остаток
30
```

В этой задаче вполне уместно провести небольшое исследование и составить таблицу остатков в зависимости от количества блоков, например, от 1 до 100. Более того, учащиеся могут провести эксперименты даже для ещё не решённых задач.

Таким образом, все более очевидной становится необходимость учета новых тенденций в обучении математике: уделение большего внимания развитию средств математического мышления, внедрение исследовательских и экспериментальных методов, а также систем компьютерной алгебры в учебные курсы математики. Эксперименты в системах компьютерной алгебры при правильном использовании «накачивают» ум и гипотезами, и примерами, и конструкциями.

Список литературы

1. Попков, Р. А. Алгебра vs компьютерная алгебра в контексте массового математического образования / Р. А. Попков, М. А. Москаленко, А. В. Табиева, М. В. Матвеева // Современное профессиональное образование. – 2024. – № 3. – С. 50–53.
2. Тестов, В. А., Исследовательское обучение математике и системы компьютерной алгебры / В. А. Тестов, Р. А. Попков // Вестник Сыктывкарского университета. – Сер. 1: Математика. Механика. Информатика. – 2024. – Вып. 4 (53). – С. 52–68. URL: https://doi.org/10.34130/1992-2752_2024_4_52 (дата обращения 22.03.2025).
3. Тестов, В. А. Формирование структур математического мышления при обучении математике в цифровую эру / В. А. Тестов // Научно-методический электронный журнал «Концепт». – 2025. – № 3 (март). – С. 204–217.
4. Тестов, В. А. Цифровизация науки и образования как результат синергии процессов информатизации и математизации / В. А. Тестов // Педагогическая информатика. – 2024. – № 2. – С. 111–120.

СИНГУЛЯРНЫЕ МЕТОДЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ И ИХ РОЛЬ В РАЗВИТИИ ТВОРЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ

В. Г. Ермаков, д. пед. н., к. ф.-м. н., доцент,

Гомельский государственный университет имени Ф. Скорины,

Гомель, Беларусь

e-mail: vgermakov@gmail.com

Аннотация. Проблема развития творческого потенциала учащихся в процессе обучения математике и пути её решения рассмотрены в статье в двух крайних случаях – в регулярном