ПРИМЕНЕНИЕ ЭЛЕКТРОННЫХ СРЕДСТВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ТЕМЫ «ОПРЕДЕЛЕННЫЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ»

Петровская И.Г., Шалик Э.В.
Институт повышения квалификации
и переподготовки кадров БГПУ,
г. Минск

Одной из задач, стоящей перед образовательной системой и, в частности, системой дополнительного образования, является задача улучшения качества знаний слушателей. Проблема заключается в том, что за короткий промежуток времени необходимо усвоить достаточно большой содержательный объем материала. Важным средством прочного усвоения изучаемых предметов, изучаемых по специальности «Математика» факультета переподготовки специалистов образования, является самостоятельная работа слушателей, которая позволяет осуществить индивидуальный подход к обучаемым. Это дает возможность повысить качество знаний слушателей за счет воспитания у них методологической культуры, а не простого зазубривания материала. Правильно организованная самостоятельная работа дает возможность развивать познавательную деятельность слушателей при наличии или же отсутствии преподавателя, что актуально при заочной форме обучения. В этой связи представляет интерес применение информационных технологий и, в частности, персонального компьютера в процессе обучения.

На кафедре дополнительного педагогического образования разработаны электронные версии конспекта лекций по дисциплинам специальности. Это дает возможность обратить внимание на наиболее узловые моменты тех или иных изучаемых тем. Представленный материал методически построен так, чтобы слушатели имели возможность самостоятельно, без больших трудностей решать поставленные перед ними задачи.

Например, по курсу математического анализа по специальности «Математика» на тему «Неопределенный и определенный интегралы» выделяется, на наш взгляд, недостаточно времени для подробного ее изучения. Однако теория и практика интегрирования имеет большое практическое применения. Конечно, можно решать задачи интегрального исчисления с помощью компьютерных программ, но часто в этом случае решения получаются в специальных функциях. Поэтому следует особое внимание уделить простейшим методам интегрирования, требующим, тем не менее, умение логически мыслить, знания основ алгебры, элементов тригонометрии. С целью их изучения представлен электронный вариант лекции, в котором информация дается в максимально доступной форме. Так, например, одним из самых эффективных приемов интегрирования является интегрирование заменой переменных (подстановкой). Идеи этого метода целесообразно сформулировать с помощью двух теорем.

Теорема 1. Пусть функция $\psi(x)$ определена и дифференцируема на промежутке X, принимает значения из промежутка T. Функция g определена на промежутке T, имеет на нем первообразную G и $f(x) = g(\psi(x))\psi'(x)$. Тогда функция $f(x)$ имеет первообразную на X и

$$\int f(x)dx = \int g(\psi(x))\psi'(x)dx = \int g(u)du\Big|_{u=\psi(x)} = \big(G(u)+C\big)\Big|_{u=\psi(x)} = G(\psi(x))+C. \qquad (1)$$

Формула (1) – формула поднесения под знак дифференциала.

Очень часто более удобна другая форма способа подстановки, когда x явно выражается через новую переменную (а не наоборот, как в теореме 1). Этот прием базируется на следующей теореме:

Теорема 2. Пусть функция $x = \varphi(t)$ строго монотонна и дифференцируема на промежутке T и принимает значения из промежутка X. Если функция $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ имеет первообразную F на промежутке T, то функция f имеет первообразную на промежутке X, причем

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt\Big|_{t=\psi(x)} = F(t)+C\Big|_{t=\psi(x)} = F(\psi(x))+C, \qquad (2)$$

где функция $\psi(x)$ определена на промежутке X и является обратной для функции $\varphi(t)$.

Формула (2) – формула интегрирования заменой переменной.

После представления решения задач на применение формул замены переменной и поднесения под знак дифференциала, изучения методов интегрирования по частям и интегрирования рациональных функций эти две теоремы дают возможность для самостоятельного изучения многих других приемов интегрирования, являющихся конкретизацией метода замены переменных (интегрирование некоторых иррациональностей, некоторых трансцендентных функций).

Источником основных понятий математического анализа во многом является представление о простейших свойствах геометрических объектов в реальном пространстве. Поэтому слушателям предлагается электронный вариант лекции, в котором первоначально определенный интеграл от функции $f(x)$, заданный на $(\alpha;\beta)$, содержащем отрезок $[a;b]$, рассматривается как число, равное площади криволинейной трапеции, то есть фигуры, заключенной между прямыми $x = a$, $x = b$, $y = 0$ и кривой $y = f(x)$, вкладывая определенный смысл в понятие площади криволинейной трапеции. Определение понятия «площадь криволинейной трапеции» позволяет достаточно легко самостоятельно освоить свойства определенного интеграла, основные теоремы теории определенного интеграла: теорему о среднем, теорему Барроу, Формулу Ньютона-Лейбница, изучить такие приложения определенного интеграла как вычисление различных объемов, длин дуг, площадей. Возможность решения таких задач методами математического анализа расширяет кругозор учителя, позволяет контролировать решение задач, сложных с точки зрения элементарной математики, достаточно простыми методами математического анализа – интегрированием.

Существуют разные конструкции, с помощью которых можно ввести понятие и площади и определенного интеграла. Для построения строгой теории излагается конструкция интеграла Римана, следуя которой определенный интеграл – это предел сумм следующего специального вида. Функция $f(x)$ определена на интервале $(\alpha;\beta)$, содержащем отрезок $[a;b]$. Далее вводим понятие разбиения отрезка $[a;b]$, измельчения этого разбиения и объединения двух разбиений.

Определение 1. Конечное множество T точек $x_0, x_1, ..., x_n$ называется (неразмеченным) разбиением отрезка $[a;b]$, если $n > 1$ и $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$.

Определение 2. Будем говорить, что разбиение T_1 предшествует разбиению T_2 (или разбиение T_2 следует за разбиением T_1), если имеет место теоретико-множественное включение $T_1 \subset T_2$ (или $T_2 \supset T_1$). Разбиение T_2 называется измельчением разбиения T_1.

Для любого разбиения $T = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ длину отрезка $[x_{k-1}; x_k]$ обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Определение 3. Величина $\Delta_T = \max\limits_{1 \le k \le n} \Delta x_k$ называется диаметром разбиения T.

На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ выберем точку ξ_k, $\mathrm{k} = 1, ..., \mathrm{n}$, то есть $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$.

Определение 4. Совокупность точек $\{x_0, x_1, ..., x_n, \xi_1, ..., \xi_n\}$ называется размеченным разбиением отрезка $[a;b]$. Обозначим его через V, а соответствующее ему неразмеченное разбиение - через $T = T(V)$.

Определение 5. Сумма $\sigma(V) = f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$ называется интегральной суммой функции $f(x)$, соответствующей размеченному разбиению V.

Определение 6. Число I называется определенным интегралом (Римана) от функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любого размеченного разбиения V отрезка $[a;b]$ с условием $\Delta_V < \delta$ справедливо неравенство

$$|I - \sigma(V)| < \varepsilon \text{, то есть} \left| I - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \right| < \varepsilon .$$

Для интеграла I используют обозначение $I = \int\limits_a^b f(x)dx$.

Именно такой подход к определению определенного интеграла дает возможность строгого обоснования многих теоретических вопросов математического анализа и решения большого количества задач естествознания, например, задачи об определении пути, пройденного материальной точкой, движущейся со скоростью $f(x)$, за промежуток времени от $x = a$ до $x = b$, задач нахождения статических моментов и центра тяжести кривой, плоской фигур, определения механической работы, работы силы тяжести и т.д., что позволяет овладеть содержанием темы, как в теоретическом, так и в прикладном аспекте.

Для того чтобы самостоятельное усвоение материала было эффективным электронные лекции необходимо разрабатывать, учитывая дидактические принципы: научность, доступность, систематичность, последовательность, наглядность, связь теории с практикой, индивидуальные особенности слушателей. Считаем целесообразным предоставлять конспекты лекций на отдельные темы, наиболее приемлемые для самостоятельного изучения, а так же ряд практических заданий с ответами в качестве домашней работы. Для успешного решения таких заданий нужно предложить примеры решенных типовых задач.

Конечно же, представляется важным при такой самостоятельной работе проведение контроля полученных знаний. Среди форм контроля для нас определяющими являются контрольные работы, домашние контрольные работы, тестирование, зачеты, экзамены, курсовые работы. В качестве самоконтроля, промежуточного контроля или подготовки к контрольной работе удобно использовать компьютерные тесты.

Специфика естественнонаучных дисциплин предполагает ограниченное использование компьютера. Математический анализ является достаточно сложным предметом для самостоятельного освоения, и компьютер может быть использован в качестве элемента обучения слушателей факультета переподготовки. Ключевую же роль в разъяснении материала играет преподаватель.