

УДК [378.016:512.64] – 057.875:51

**МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ
ИЗУЧЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ
ПРОСТРАНСТВ БУДУЩИМИ
УЧИТЕЛЯМИ МАТЕМАТИКИ****О. А. Баркович,***кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры математики и методики
преподавания математики
Белорусского государственного
педагогического университета
имени Максима Танка*ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1971-5440>

Поступила в редакцию 19.05.2025.

UDC [378.016:512.64] – 057.875:51

**METHODICAL FEATURES
OF LINEAR SPACES STUDY
FOR FUTURE MATHEMATICS
TEACHERS****O. Barkovich,***Candidate of Physical
and Mathematical Sciences,
Associate Professor of the Department
of Mathematics and Methods
of Teaching Mathematics,
Belarusian State Pedagogical University
named after Maxim Tank*ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-1971-5440>

Received on 19.05.2025.

В статье рассмотрены методические особенности изучения линейных пространств в процессе преподавания высшей алгебры для специальности 6-05-0113-04 Физико-математическое образование. Идеи абстрактной алгебры, опора на свойства основных алгебраических структур, групп и полей позволяют взглянуть на свойства линейных пространств как с точки зрения преемственности элементарной и высшей математики, так и с точки зрения реализации идеи междисциплинарного подхода. Представлена единая доказательная база, опирающаяся на аксиомы и свойства линейных пространств, что позволяет обучающимся освоить краткие доказательства нетривиальных теорем абстрактной линейной алгебры.

Ключевые слова: линейные пространства, алгебраические структуры, группа, поле, аксиомы, междисциплинарный подход.

The article discusses the methodical features of the linear spaces study in the process of higher algebra teaching for the specialty 6-05-0113-04 Physical and mathematical education. Abstract algebra ideas, relying on the properties of basic algebraic structures, groups and fields allow to look at the properties of linear spaces both from the point of view of continuity of elementary and higher mathematics, and from the point of view of implementing the idea of an interdisciplinary approach. A unified proof system based on axioms and properties of linear spaces is presented, which allows students to master short proofs of abstract linear algebra non-trivial theorems.

Keywords: linear spaces, algebraic structures, group, field, axioms, interdisciplinary approach.

Введение. Одной из основных целей математического образования является формирование целостной системы знаний и умения их применять при решении компетентностно-ориентированных задач. Линейная алгебра является одним из важных и интенсивно развивающихся разделов современной математики. Ее идеи и методы проникают в различные области математики.

Согласно новому образовательному стандарту и учебному плану специальности 6-05-0113-04 Физико-математическое образование элементы линейной алгебры, в частности линейные пространства, изучаются во втором семестре.

Согласно предыдущему учебному плану линейная алгебра в гораздо большем объеме

изучалась не на первом курсе, а во втором семестре второго курса, после изучения математической логики, аналитической геометрии, математического анализа и элементарной математики, в рамках которых студенты знакомились с примерами алгебраических структур и методами доказательства теорем.

Изучение абстрактных линейных пространств на первом курсе параллельно с изучением других учебных дисциплин модуля государственного компонента «Высшая математика-1» и отсутствие в школе систематической практики решения задач на доказательство диктуют необходимость совершенствования методики преподавания линейной алгебры, адаптации и структурирования теоретического материала.

Идеи абстрактной алгебры, опора на свойства основных алгебраических структур, групп и полей позволяют взглянуть на свойства линейных пространств как с точки зрения преемственности элементарной и высшей математики [1], так и с точки зрения реализации идей целостного и междисциплинарного подходов [2].

Написанная простым и доходчивым языком книга крупного венгерского математика Э. Фрида позволяет будущим учителям математики овладеть основными понятиями высшей алгебры [1]. Но кроме овладения основными понятиями современной абстрактной алгебры (группы, кольца, поля, линейные пространства) будущим учителям математики важно научиться корректно проводить доказательные рассуждения [3; 4].

В настоящее время отсутствуют исследования по методике изучения понятий, аксиом, свойств и доказательных рассуждений начального уровня, кратких доказательств, опирающихся только на определения, аксиомы и свойства линейных пространств в рамках новых образовательных стандартов Республики Беларусь.

В данной статье представлена оригинальная методика преподавания раздела «Элементы линейной алгебры» в педагогических университетах в рамках новых учебных планов Республики Беларусь.

В частности, уточнены понятия и терминология, приведены ключевые примеры линейных пространств не только из высшей алгебры (пространства столбцов, матриц и многочленов), но и аналитической геометрии (векторные пространства), математического анализа (пространства непрерывных на отрезке функций). На примере ряда классических результатов начальных глав линейной алгебры продемонстрирована единая доказательная база, опирающаяся только на аксиомы и элементарные свойства линейных пространств.

Основная часть. Приведем ключевые определения, свойства, теоремы и их доказательства, без которых невозможно представить курс высшей алгебры, теорию линейных пространств для будущих учителей математики.

Определение 1. *Линейное пространство* $V(\mathbb{R})$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ – это абелева группа V с операцией умножения элементов группы на числа из поля $\mathbb{R}$ такой, что выполняются следующие условия:

$$1) \forall x \in V : 1 \cdot x = x;$$

$$2) \forall a \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : a(x + y) = ax + ay;$$

$$3) \forall a, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (a + \beta)x = ax + \beta x;$$

$$4) \forall a, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (a\beta)x = a(\beta x).$$

Нейтральный элемент этой абелевой группы называется *нулевым* и обозначается θ .

Определение 2. *Линейное пространство* $V(\mathbb{R})$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ – это множество элементов V , на котором заданы две операции – операция сложения элементов из V и операция умножения элемента из V на число из поля $\mathbb{R}$ так, что выполняются следующие условия (аксиомы):

A1) $\forall x, y \in V : x + y = y + x$ (коммутативность сложения);

A2) $\forall x, y, z \in V : (x + y) + z = x + (y + z)$ (ассоциативность сложения);

A3) $\exists \theta \in V \forall x \in V : x + \theta = x$ (существование нулевого элемента);

A4) $\forall x \in V \exists x' \in V : x + x' = \theta$ (существование противоположного элемента);

$$A5) \forall x \in V : 1 \cdot x = x \quad (1 \in \mathbb{R});$$

A6) $\forall a \in \mathbb{R}, \forall x, y \in V : a(x + y) = ax + ay$ (умножение на число из $\mathbb{R}$ дистрибутивно относительно сложения элементов из V);

A7) $\forall a, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (a + \beta)x = ax + \beta x$ (умножение элементов из V на числа из $\mathbb{R}$ дистрибутивно относительно сложения чисел из $\mathbb{R}$);

A8) $\forall a, \beta \in \mathbb{R}, \forall x \in V : (a\beta)x = a(\beta x)$ (умножение элемента из V на числа из $\mathbb{R}$ ассоциативно).

Упражнение для обучающихся. Доказать эквивалентность двух определений линейного пространства.

Примеры линейных пространств.

1. $\mathbb{R}(\mathbb{R}); \mathbb{C}(\mathbb{R})$.

Вопрос. Является ли $\mathbb{Q}(\mathbb{R})$ линейным пространством? Ответ обоснуйте.

2. Множества геометрических векторов на прямой – V_1 , на плоскости – V_2 , в пространстве – V_3 – линейные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$.

3. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_i \in \mathbb{R}\}$ – линейное пространство над $\mathbb{R}$. Называется арифметическим линейным (векторным) пространством над $\mathbb{R}$.

4. Множество матриц $\mathbb{R}_{m \times n}$ – линейное пространство над $\mathbb{R}$.

5. Множество $\mathbb{R}[x]$ всех многочленов от переменной x с действительными коэффициентами с операциями сложения многочленов и умножения многочлена на действительное число является линейным пространством над $\mathbb{R}$.

6. Множество $\mathbb{R}_n[x]$ всех многочленов степени не выше n от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{R}$ – линейное пространство над $\mathbb{R}$.

Вопрос. Является ли линейным пространством множество всех многочленов степени n над $\mathbb{R}$? Ответ обоснуйте.

7. Множество $C_{[a,b]}$ непрерывных на отрезке $[a, b]$ действительных функций действительной переменной – линейное пространство над $\mathbb{R}$.

Простейшие свойства линейных пространств.

Теорема 1. В линейном пространстве существует единственный нулевой элемент.

Доказательство. Доказывать, что в линейном пространстве есть нулевой элемент, не надо. Об этом говорит аксиома A3 линейного пространства. И сама ситуация подсказывает, что доказывать нужно методом от противного. Предположим, что в линейном пространстве V существует два нулевых элемента θ_1 и θ_2 , причем $\theta_1 \neq \theta_2$. Рассмотрим сумму этих элементов $\theta_1 + \theta_2$. С одной стороны, так как θ_2 – нулевой элемент, то, согласно аксиоме A3, $\theta_1 + \theta_2 = \theta_1$. Согласно аксиоме A1 (от перемены мест слагаемых сумма не меняется): $\theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$ по аксиоме A3, если учесть, что θ_1 тоже нейтральный элемент. Отобразим получившуюся цепочку равенств: $\theta_1 = \theta_1 + \theta_2 = \theta_2 + \theta_1 = \theta_2$. Следовательно, $\theta_1 = \theta_2$, что противоречит предположению. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательства не нужно запоминать, их нужно прочувствовать, понять, разобраться. Это актуально в самом начале изучения новой учебной математической дисциплины, особенно такой абстрактной, как линейная алгебра. Но если первые доказательства теорем курса будут легки и понятны, то и в более сложных доказательствах студенты смогут разобраться и на начальном этапе по образцу у них получится доказать похожие утверждения. Причем важно не только записывать доказательства формально, с помощью символов, но и сопровождать логические переходы комментариями, пояснениями, обосновывающими корректность цепочки логических умозаключений.

Теорема 2. У каждого элемента линейного пространства существует единственный противоположный элемент.

Доказательство. Предположим, что в линейном пространстве V есть элемент x (формально: $\exists x \in V$), у которого 2 противоположных элемента y_1 и y_2 . Это означает, что $x + y_1 = \theta$ (нулевой элемент) и $x + y_2 = \theta$ (тоже нулевой элемент). Причем $y_1 \neq y_2$. Это наше предположение. Так как y_1 – противополож-

ный элемент для x , то первая скобка – нулевой элемент (по аксиоме A4). Рассмотрим сумму трех элементов:

$(x + y_1) + y_2 = \theta + y_2 = y_2 + \theta = y_2$ (использовали аксиомы A1 и A3).

При доказательстве первых теорем разбираем подробно каждое звено логической цепочки доказательных рассуждений. В дальнейшем обучающиеся сами смогут обосновывать корректность переходов от одного утверждения к другому при доказательстве свойств и теорем.

С другой стороны, записанное ранее выражение:

$(x + y_1) + y_2 = (y_1 + x) + y_2$ (поменяли местами слагаемые в первой скобке согласно аксиоме A1) $= y_1 + (x + y_2)$ (применили аксиому ассоциативности A2) $= y_1 + \theta$ (так как y_2 – противоположный элемент для x , то в скобке получили нулевой элемент θ по аксиоме A4) $= y_1$.

Итак, у нас получилась цепочка равенств: $y_2 = \theta + y_2 = (x + y_1) + y_2 = (y_1 + x) + y_2 = y_1 + (x + y_2) = y_1 + \theta = y_1$. (1)

Полученное противоречие ($y_1 = y_2$) доказывает теорему.

Упражнение. В цепочке (1) обоснуйте каждое из равенств, подпишите над каждым равенством, на основании какой из аксиом такой переход возможен.

Теорема 3. Для любого элемента $x \in V$ справедливо равенство $0 \cdot x = \theta$.

Доказательство (прямой способ доказательства). Согласно аксиоме A5:

$$x = 1 \cdot x = (1 + 0) \cdot x = 1 \cdot x + 0 \cdot x = x + 0 \cdot x.$$

У нас получается равенство (сравнили левую и правую части в цепочке равенств): $x = x + 0 \cdot x$. Следовательно, согласно теореме 1 и аксиоме A3, $0 \cdot x = \theta$ (нулевой элемент линейного пространства). Что и требовалось доказать.

В линейной алгебре, при работе с линейными пространствами, появляется также много задач вычислительного характера. В учебном пособии [5] содержатся краткие теоретические сведения по линейной алгебре и тестовые задания для контроля их усвоения и понимания. Как правило, обучающиеся не испытывают проблем при их выполнении.

Наибольшую трудность для них представляет, как показывает наш опыт, понимание сущностных основ линейной алгебры, ее фундамента. И первым камнем преткновения при знакомстве с линейной алгеброй является доказательство про-

стейших свойств линейных пространств, опирающееся на аксиомы линейного пространства.

Если уже на первых занятиях правильно расставить акценты, корректно сформулировать определения и теоремы, то это настраивает обучающихся на вдумчивое усвоение общего понятийного аппарата линейной алгебры, позволяет с единой точки зрения взглянуть на

высшую математику. Такой подход позволяет студентам увидеть в различных разделах математики уже хорошо известные алгебраические структуры (группы, поля, линейные пространства) и их взаимосвязь, повышает заинтересованность в усвоении доказательств нетривиальных теорем не только линейной алгебры, но и других учебных дисциплин модуля «Высшая математика».

ЛИТЕРАТУРА

1. Фрид, Э. Элементарное введение в абстрактную алгебру / Э. Фрид ; пер. с венг. Ю. А. Данилова. – М. : Мир, 1979. – 260 с.
2. Баркович, О. А. О реализации целостного подхода в процессе обучения высшей алгебре / О. А. Баркович // Весті БДПУ. Серія 3. – 2024. – № 2. – С. 33–37.
3. Далингер, В. А. Методические аспекты формирования у учащихся умения производить доказательные рассуждения и делать выводы / В. А. Далингер // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 8 (часть 3). – С. 431–433.
4. Баркович, О. А. Методические аспекты формирования у студентов умения доказывать теоремы в процессе изучения алгебры / О. А. Баркович // Весті БДПУ. Серія 3. – 2019. – № 2. – С. 45–50.
5. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. Теория и тесты : учебное пособие / И. И. Рушнова [и др.] ; под общей редакцией И. И. Рушновой. – Минск : РИВШ, 2023. – 232 с.

REFERENCES

1. Frid, E. Elementarnoe vvedenie v abstraktnuyu algebru / E. Frid ; per. s veng. Yu. A. Danilova. – M. : Mir, 1979. – 260 s.
2. Barkovich, O. A. O realizacii celostnogo podhoda v processe obucheniya vysshej algebre / O. A. Barkovich // Vesci BDP. Seryya 3. – 2024. – № 2. – S. 33–37.
3. Dalinger, V. A. Metodicheskie aspekty formirovaniya u uchashchihsya umeniya proizvodit' dokazatel'nye rassuzhdeniya i delat' vyvody / V. A. Dalinger // Mezhdunarodnyj zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya. – 2015. – № 8 (chast' 3). – S. 431–433.
4. Barkovich, O. A. Metodicheskie aspekty formirovaniya u studentov umeniya dokazyvat' teoremy v processe izucheniya algebry / O. A. Barkovich // Vesci BDP. Seryya 3. – 2019. – № 2. – S. 45–50.
5. Analiticheskaya geometriya i linejnaya algebra. Teoriya i testy : uchebnoe posobie / I. I. Rushnova [i dr.] ; pod obshchej redakciej I. I. Rushnovoj. – Minsk : RIVSh, 2023. – 232 s.