

УДК 514.765

UDC 514.765

## ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ЛЕВОИНВАРИАНТНЫХ $f$ -СТРУКТУР НА ЧЕТЫРЕХМЕРНОЙ ГРУППЕ ОСЦИЛЛЯТОРА

## INTEGRABILITY OF LEFT-INVARIANT $f$ -STRUCTURES ON THE FOUR- DIMENSIONAL OSCILLATOR GROUP

**В. Н. Куница,**  
*аспирант кафедры  
геометрии, топологии и методики  
преподавания математики БГУ*

**V. Kunitsa,**  
*postgraduate student, Department  
of Geometry, Topology and Methods  
of Teaching Mathematics, BSU*

Поступила в редакцию 04.04.2025.

Received on 04.04.2025.

В данной статье мы исследуем левоинвариантные метрические  $f$ -структуры, построенные на четырехмерной группе осциллятора, на предмет интегрируемости и частичной интегрируемости. Четырехмерная разрешимая группа Ли осциллятора является полупрямым произведением классической трехмерной группы Гейзенберга и вещественной прямой. Используя соответствующую алгебру Ли, мы строим и изучаем 6 базовых левоинвариантных метрических  $f$ -структур ранга 2 на группе осциллятора. В результате исследования мы получили новые примеры частично интегрируемых левоинвариантных метрических  $f$ -структур.

**Ключевые слова:** группа осциллятора, разрешимая группа Ли, разрешимая алгебра Ли, левоинвариантная метрическая  $f$ -структура, интегрируемая  $f$ -структура, частично интегрируемая  $f$ -структура.

In the paper, we investigate left-invariant metric  $f$ -structures built on the four-dimensional oscillator group for integrability and partial integrability. Four-dimensional oscillator group is a semi-direct product of the classical three-dimensional Heisenberg group by a real line. Using the corresponding Lie algebra, we construct and study six basic left-invariant metric  $f$ -structures of rank 2 on the oscillator group. Because of the study, we obtained new examples of partially integrable left-invariant metric structures.

**Keywords:** oscillator group, solvable Lie group, solvable Lie algebra, left-invariant metric  $f$ -structure, integrable  $f$ -structure, partial integrable  $f$ -structure.

**Введение.** Среди дифференциально-геометрических структур особенно выделяют аффинорные структуры на гладких многообразиях. Они являются гладкими тензорными полями типа  $(1, 1)$ , реализованными в виде полей эндоморфизмов, действующих в касательном расслоении к многообразию. К классическим примерам данных структур относятся почти комплексные структуры, структуры почти произведения, почти контактные структуры и другие. С 1960-х годов стали активно исследовать  $f$ -структуры, введенные Кентаро Яно [1] ( $f^3 + f = 0$ ), которые обобщают почти комплексные и почти контактные структуры и одновременно порождают структуры почти произведения. Данный тип дифференциально-геометрических структур является обобщением почти контактных и почти комплексных структур.

Исследования дифференциальной геометрии однородных многообразий групп Ли и инвариантных структур на таких многообразиях остаются актуальными благодаря задачам дифференциальной геометрии, теории гамильтоновых систем, теоретической физики. Важную роль играют исследования, относящиеся к теории обобщенных симметрических пространств (в частности, однородных  $k$ -симметрических пространств) [2–7].

Вопросы интегрируемости  $f$ -структур для произвольных многообразий подробно изложены в работах [8; 9]. Интегрируемость некоторых распределений, порождаемых  $f$ -структурой, установлена, например, для киллинговых  $f$ -многообразий в работах [10; 11].

В данной работе основным объектом исследования является четырехмерная группа осциллятора. Эта группа играет особую роль в дифференциальной геометрии, гармоническом анализе, субримановой геометрии, теории управления [12–14]. В данной статье были построены все (с точностью до знака) базовые левоинвариантные метрические  $f$ -структуры ранга 2 и исследованы на предмет интегрируемости и частичной интегрируемости.

## 1. Распределения на гладких многообразиях и интегрируемость.

Приведем некоторые сведения о распределениях на многообразиях, следуя в основном обозначениям работы [9].

Пусть  $M$  – гладкое многообразие размерности  $n$ . Отображение  $D$  на  $M$ , которое ставит в соответствие каждой точке  $x \in M$   $q$ -мерное линейное подпространство  $D_x$  касательного пространства  $T_x M$ , называется  $q$ -мерным *распределением* на  $M$  [9]. Как правило, рассматривают гладкие распределения на  $M$ .

Говорят, что гладкое векторное поле  $X$  на  $M$  принадлежит распределению  $D$ , если  $X_x \in D_x$ , для всех  $x \in M$ . Обозначим это так:  $X \in D$ . Распределение  $D$  называется *инволютивным*, если для всех векторных полей  $X, Y$  из  $D$  их скобка Ли принадлежит  $D$ , т. е.  $[X, Y] \in D$  [9].

Пусть  $N$  – вложенное подмногообразие в многообразии  $M$ ,  $f: N \rightarrow M$  – соответствующее ему отображение вложения.  $N$  называется *интегральным многообразием* распределения  $D$  на  $M$ , если  $df(T_x N) = D_x$  [9]. Среди интегральных многообразий распределения  $D$  выделяют максимальные интегральные многообразия. Распределение  $D$  называется *вполне интегрируемым* [9] (чаще говорят, *интегрируемым*), если для каждой точки  $x \in M$  существует единственное максимальное интегральное многообразие распределения  $D$ , проходящее через точку  $x$ .

Связь инволютивности и интегрируемости распределений отражена в фундаментальной теореме Фробениуса:

**Теорема (Фробениус)** [9]. Инволютивное распределение  $D$  на  $M$  интегрируемо. Более того, через каждую точку  $x \in M$  проходит единственное максимальное интегральное многообразие распределения  $D$  и всякое другое интегральное многообразие, содержащее  $x$ , есть открытое подмногообразие этого максимального интегрального многообразия.

Отметим, что в случае однородных многообразий  $M = G/H$  групп Ли  $G$  традиционно рассматривают распределения на  $M$ , инвариантные относительно действующей группы Ли  $G$ . В частности, важнейшим классом примеров являются сами группы Ли с действием левыми сдвигами на них. В этом случае рассматривают и исследуют *левоинвариантные* распределения, которые полностью характеризуются подпространствами в соответствующей алгебре Ли  $\mathfrak{g}$  группы Ли  $G$ . В этой связи упомянем лишь некоторые из большой серии работ, связанных с интегрируемостью канонических структур на однородных  $k$ -симметрических пространствах и на специальных группах Ли: [15–20].

## 2. Метрические $f$ -структуры на гладких многообразиях и их интегрируемость.

В 1960-х годах К. Яно ввел  $f$ -структуры, которые определяются соотношением  $f^3 + f = 0$ . В работе [21] было доказано, что число  $r = \dim \text{Im} f$  постоянно для всех точек из  $M$ . Данное число  $r$  называется *рангом* структуры и является четным. Число же  $\dim \text{Ker} f = \dim M - r$  называют *дефектом* структуры и обозначают  $\text{def} f$ . Заметим, что  $\text{def} f = 0$  дает почти комплексные структуры  $f = J(J^2 = -id)$ , а случай  $\text{def} f = 1$  приводит к классу почти контактных структур.

Задание  $f$ -структуры на  $M$  порождает пару взаимно дополнительных распределений  $L = \text{Im} f$  и  $M = \text{Ker} f$ . Данные распределения обычно называют *первым* и *вторым фундаментальными распределениями*  $f$ -структуры соответственно. При этом эндоморфизмы  $l = -f^2$  и  $m = id + f^2$  являются взаимно дополнительными проекторами на распределения  $L$  и  $M$  соответственно [9]. Отметим также, что ограничение  $F$  заданной  $f$ -структуры на распределение  $L$  задает на нем почти комплексную структуру ( $F^2 = -id$ ).

Пусть далее на многообразии  $M$  задана риманова метрика  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ . В этом случае  $f$ -структура на  $(M, g)$  называется *метрической*, если  $\langle fX, Y \rangle + \langle X, fY \rangle = 0$  для всех гладких векторных полей  $X, Y$  на  $M$  [22; 23]. Для метрического  $f$ -многообразия первое  $L = \text{Im} f$  и второе  $M = \text{Ker} f$  фундаментальные распределения взаимно ортогональны.

Тензор Нейенхайса  $N(X, Y)$  для  $f$ -структуры определяется следующим образом:

$$N(X, Y) = [fX, fY] - f[fX, Y] - f[X, fY] + f^2[X, Y].$$

Далее приведем некоторые факты и теоремы, связанные с интегрируемостью и частичной интегрируемостью  $f$ -структуры и распределений  $L$  и  $M$ .

**Теорема 2.1** [9]. Необходимым и достаточным условием интегрируемости распределения  $M$  является выполнение равенства  $N(mX, mY) = 0$  для любых векторных полей  $X$  и  $Y$ .

**Теорема 2.2** [9]. Необходимым и достаточным условием интегрируемости обоих распределений  $L$  и  $M$  является равенство:

$$N(X, Y) = IN(IX, IY) + N(IX, mY) + N(mX, IY)$$

для любых векторных полей  $X$  и  $Y$ .

Если распределение  $L$  интегрируемо и, более того, если почти комплексная структура  $f'$ , индуцируемая полем  $f$  на каждом интегральном многообразии распределения  $L$ , интегрируема, то будем говорить, что  $f$ -структура частично интегрируема [9].

**Теорема 2.3** [9]. Необходимым и достаточным условием частичной интегрируемости  $f$ -структуры является удовлетворение одного из следующих эквивалентных условий:

$$N(IX, IY) = 0, N(fX, fY) = 0$$

для любых векторных полей  $X$  и  $Y$ .

Когда оба распределения  $L$  и  $M$  интегрируемы, можно выбрать такую систему локальных координат, что распределение  $M$  можно определить, положив  $n-r$  локальных координат равными константам, а распределение  $M$  – положив равными константам оставшиеся  $r$  локальных координат. Будем называть такую систему координат *адаптированной* [9].

Сделаем следующие допущения:

(1)  $f$ -структура частично интегрируема.

(2) Распределение  $M$  интегрируемо.

(3) Компоненты структурного тензора  $f$  не зависят от координат, являющихся постоянными на интегральных многообразиях распределения  $L$  в некоторой адаптированной системе координат. В этом случае говорят, что  $f$ -структура *интегрируема* [9].

**Теорема 2.4** [9]. Необходимым и достаточным условием интегрируемости  $f$ -структуры является равенство  $N(X, Y) = 0$  для любых векторных полей  $X$  и  $Y$ .

### 3. Левоинвариантные метрические $f$ -структуры на группе осциллятора.

#### 3.1. Алгебра Ли группы осциллятора.

Приведем необходимые для дальнейшего исследования сведения о группе осциллятора, опираясь в основном на работу [12].

Алгебра Ли четырехмерной группы осциллятора может быть реализована как матричная алгебра Ли вида:

$$\mathfrak{osc} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & -y & z & -2x \\ 0 & 0 & \theta & z \\ 0 & -\theta & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M(x, y, z, \theta), \quad x, y, z, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Естественный базис этой алгебры Ли задается матрицами  $e_1 = M(1, 0, 0, 0)$ ,  $e_2 = M(0, 1, 0, 0)$ ,  $e_3 = M(0, 0, 1, 0)$ ,  $e_4 = M(0, 0, 0, 1)$ . Таким образом, структура алгебры Ли  $\mathfrak{osc}$  полностью определяется коммутаторными соотношениями:

$$[e_2, e_3] = e_1, [e_2, e_4] = -e_3, [e_3, e_4] = e_2.$$

Соответствующая алгебре Ли  $\mathfrak{osc}$  связная односвязная группа Ли  $Osc$  может быть представлена матрицами вида

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -y \cos \theta - z \sin \theta & z \cos \theta - y \sin \theta & -2x \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta & z \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta & y \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = m(x, y, z, \theta), x, y, z, \theta \in \mathbb{R} \right\}$$

Определим на группе  $Osc$  левоинвариантную риманову метрику  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  тем требованием, что  $e_1, \dots, e_4$  есть ортонормированный базис в линейном пространстве  $\mathfrak{osc}$ .

### 3.2. Интегрируемость $f$ -структур ранга 2.

Перейдем теперь к рассмотрению левоинвариантных метрических  $f$ -структур на группе  $Osc$ . Известно, что ранг любой  $f$ -структуры – четное число. Следовательно на данной группе  $r=2$  или  $r=4$  (случай почти эрмитовой структуры  $f=J$  на  $Osc$ ). Любая левоинвариантная метрическая  $f$ -структура ранга 2 может быть представлена соответствующим оператором  $f$  на алгебре Ли  $\mathfrak{osc}$  таким, что ее образом является двумерное подпространство с действием комплексной структуры на нем, а ядро есть ортогональное дополнение к этому подпространству.

Будем рассматривать так называемые базовые  $f$ -структуры, которые порождаются двумерными координатными подпространствами базиса  $e_1, e_2, e_3, e_4$ . Легко видеть, что имеется 6 (с точностью до знака) таких левоинвариантных метрических  $f$ -структур.

Далее исследуем данные  $f$ -структуры на интегрируемость и частичную интегрируемость.

#### 3.2.1. Рассмотрим структуру $f_1$ , задаваемую следующим образом:

$$f_1(e_1) = f_1(e_4) = 0, f_1(e_2) = -e_3, f_1(e_3) = e_2.$$

Представляя теперь  $X, Y \in \mathfrak{osc}$  в виде  $X = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + x_4 e_4$ ,  $Y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + y_3 e_3 + y_4 e_4$ , покажем действие данной  $f$ -структуры:

$$\begin{aligned} f_1 X &= -x_2 e_3 + x_3 e_2, & f_1^2 X &= -x_2 e_2 - x_3 e_3 \\ f_1 Y &= -y_2 e_3 + y_3 e_2, & f_1^2 Y &= -y_2 e_2 - y_3 e_3 \end{aligned}$$

Последовательно вычислим каждое слагаемое в формуле тензора Нейенхейса:

$$\begin{aligned} [fX, fY] &= e_1(x_2 y_3 - x_3 y_2), \\ [fX, Y] &= e_1(x_3 y_3 + x_2 y_2) - e_2 x_2 y_4 - e_3 x_3 y_4, & f([fX, Y]) &= e_3 x_2 y_4 - e_2 x_3 y_4, \\ [X, fY] &= e_1(-x_3 y_3 - x_2 y_2) + e_2 x_4 y_2 - e_3 x_4 y_3, & f([X, fY]) &= -e_3 x_4 y_2 + e_2 x_4 y_3, \\ [X, Y] &= e_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) + e_2(x_3 y_4 - x_4 y_3) - e_3(x_2 y_4 - x_4 y_2), \\ f^2([X, Y]) &= -e_2(x_3 y_4 - x_4 y_3) + e_3(x_2 y_4 - x_4 y_2) \end{aligned}$$

$N(X, Y) \neq 0$ , так как слагаемые с  $e_1$  присутствуют только в компоненте  $[fX, fY]$ , следовательно,  $f_1$  не является интегрируемой.

Теперь последовательно вычислим компоненты для нахождения  $N(fX, fY)$ .

$[f^2 X, f^2 Y] = e_2(x_3 y_4 - x_4 y_3)$ ,  $[fX, f^2 Y]$ ,  $[f^2 X, fY]$  и  $[fX, fY]$  попадают в ядро отображения  $f_1$ , следовательно,  $f([fX, f^2 Y]) = f([f^2 X, fY]) = f([fX, fY]) = 0$ . Получим что  $N(fX, fY) = e_1(x_2 y_3 - x_3 y_2) \Rightarrow f_1$  не является частично интегрируемой.

**3.2.2.** Рассмотрим далее структуру  $f_2$ , определяемую следующими условиями:

$$f_2(e_2) = f_2(e_4) = 0, f_2(e_1) = -e_3, f_2(e_3) = e_1.$$

Используя прежние обозначения и методы вычислений, получим:

$[fX, fY] = 0, f([fX, Y]) = -e_3x_1y_2, f([X, fY]) = e_3x_2y_1, f^2([X, Y]) = -e_1(x_2y_3 - x_3y_2) + e_3(x_2y_4 - x_4y_2)$ , следовательно,  $N(X, Y) \neq 0$ , тогда  $f_2$  не является интегрируемой.

$[f^2X, f^2Y] = [fX, f^2Y] = [f^2X, fY] = [fX, fY] = 0 \Rightarrow f_2$  является частично интегрируемой.

**3.2.3.** Рассмотрим теперь структуру  $f_3$ , определяемую следующими условиями:

$$f_3(e_1) = f_3(e_2) = 0; f_3(e_3) = -e_4; f_3(e_4) = e_3.$$

$[fX, fY] = e_2(x_3y_4 - x_4y_3)$ , однако  $e_2$  попадает в ядро отображения  $f_3$ , следовательно,  $f([fX, f^2Y]), f([f^2X, fY])$  и  $f([fX, fY])$  не содержат слагаемые с  $e_2$ , тогда  $N(X, Y) \neq 0$ , следовательно  $f_3$  не является интегрируемой.

$[fX, f^2Y], [f^2X, fY]$  и  $[fX, fY]$  попадают в ядро отображения  $f_3$ , следовательно,  $f([fX, f^2Y]) = f([f^2X, fY]) = f([fX, fY]) = 0$ . Получим, что  $N(fX, fY) = e_2(x_3y_4 - x_4y_3) \Rightarrow f_3$  не является частично интегрируемой.

**3.2.4.** Перейдем к рассмотрению структуры  $f_4$ :

$$f_4(e_1) = f_4(e_3) = 0; f_4(e_1) = -e_4; f_4(e_4) = e_1.$$

Результаты вычислений для данной  $f$ -структуры:

$$[fX, fY] = f([X, fY]) = f([fX, Y]) = 0, f^2[X, Y] = -e_1(x_2y_3 - x_3y_2).$$

Отсюда можно сделать вывод, что  $f_4$  не является интегрируемой.

Проверим  $f_4$  на частичную интегрируемость.

$[f^2X, f^2Y] = [fX, f^2Y] = [f^2X, fY] = [fX, fY] = 0 \Rightarrow f_4$  является частично интегрируемой.

**3.2.5.** Рассмотрим далее структуру  $f_5$ :

$$f_5(e_1) = f_5(e_3) = 0; f_5(e_2) = -e_4; f_5(e_4) = e_2.$$

После проведенных вычислений получим:

$[fX, fY] = e_3(x_4y_2 - x_2y_4)$ , однако  $e_3$  попадает в ядро отображения  $f_5$ , следовательно,  $f([fX, f^2Y]), f([f^2X, fY])$  и  $f([fX, fY])$  не содержат слагаемые с  $e_3$ , тогда  $N(X, Y) \neq 0$ , следовательно,  $f_5$  не является интегрируемой.

$[fX, f^2Y], [f^2X, fY]$  и  $[fX, fY]$  попадают в ядро отображения  $f_5$ , следовательно,  $f([fX, f^2Y]) = f([f^2X, fY]) = f([fX, fY]) = 0$ . Получим, что  $N(fX, fY) = [f^2X, f^2Y] = e_3(x_4y_2 - x_2y_4) \Rightarrow f_5$  не является частично интегрируемой.

**3.2.6.** Наконец рассмотрим структуру  $f_6$ , задаваемую условиями:

$$f_6(e_3) = f_6(e_4) = 0; f_6(e_1) = -e_2; f_6(e_2) = e_1.$$

Для нее получим, что  $[fX, fY] = 0, f([X, fY]) = -e_2x_3y_1, f([fX, Y]) = e_2y_3x_1$

$f^2[X, Y] = e_1(x_3y_4 - x_4y_3) - e_2(x_2y_3 - x_3y_2)$ , легко видеть, что  $N(X, Y) \neq 0$ .

$[f^2X, f^2Y] = [fX, f^2Y] = [f^2X, fY] = [fX, fY] = 0 \Rightarrow f_6$  является частично интегрируемой.

Итогом всех проведенных рассуждений и вычислений является следующая теорема.

**Теорема 3.2.1.** На четырехмерной группе осциллятора  $\Sigma_{5c}$  среди базовых левоинвариантных  $f$ -структур ранга 2 нет интегрируемых  $f$ -структур, однако структуры  $f_2, f_4, f_6$  являются частично интегрируемыми.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Yano, K. On a structure defined by a tensor field  $f$  of type  $(1, 1)$  satisfying  $f^3 + f = 0$  / K. Yano // Tensor. – 1963. – № 14 – P. 99–109.
2. Степанов, Н. А. Основные факты теории  $\phi$ -пространств / Н. А. Степанов // Известия вузов. Математика. – 1967. – № 3. – С. 88–95.
3. Wolf, J. A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms / J. A. Wolf, A. Gray // Journal of Differential Geometry. – 1968. – Vol. 2 №1–2. – P. 77–159.
4. Феденко, А. С. Пространства с симметриями. / А. С. Феденко – Минск : Издательство Белорусского государственного университета, 1977. – 168 с.
5. Ковальский, О. Обобщенные симметрические пространства / О. Ковальский – Москва : Мир, 1984. – 240 с.
6. Степанов, Н. А. Однородные 3-циклические пространства / Н. А. Степанов // Известия вузов. Математика. – 1967. – №12. – С. 65–74.
7. Gray, A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3 / A. Gray // Journal of Differential Geometry. – 1972. – Vol. 7 №3–4. – P. 343–369.
8. Yano, K. Structures on manifolds / K. Yano, M. Kon – Singapore: World Scientific, 1984. – 520 p.
9. Яно, К. CR-подмногообразия в келеровом и сасакиевом многообразиях / К. Яно, М. Кон – Москва : Наука, 1990. – 189 с.
- Грицанс, А. С. О геометрии киллинговых  $f$ -многообразий / А. С. Грицанс // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45. – № 4. – С. 149–150.
10. Грицанс, А. С. О строении киллинговых  $f$ -многообразий / А. С. Грицанс // Изв. вузов. Математика. – 1992. – № 6. – С. 49–57.
11. Biggs, R. Some remarks on the oscillator group / R. Biggs, C. C. Remsing // Differential Geometry and its Applications. – 2014. – № 35 – P. 99–209.
12. Fischer, M. Spectra of compact quotients of the oscillator group / M. Fischer, I. Kath // SIGMA. – 2021. – Vol. 17, № 051 – 48 p.
13. Biggs, R. On extensions of sub-Riemannian structures on Lie groups / R. Biggs, P. T. Nagy // Differential Geometry and its Applications. – 2016. – № 46. – P. 25–38.
14. Балащенко, В. В. Геометрия канонических структур на однородных  $\Phi$ -пространствах порядка 4 / В. В. Балащенко, О. В. Дашевич // Успехи мат. наук. – 1994. – Т. 49, № 4. – С. 153–154.
15. Балащенко, В. В. Инвариантные структуры на однородных  $\Phi$ -пространствах порядка 5 / В. В. Балащенко, Ю. Д. Чурбанов // Успехи мат. наук. – 1990. – Т. 45, № 1. – С. 169–170.
16. Balashchenko, V. V. Invariant nearly Kähler  $f$ -structures on homogeneous spaces / V. V. Balashchenko // Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray. Contemporary Mathematics. – 2001. – V. 288. – P. 263–267.
17. Балащенко, В. В. Инвариантные  $f$ -структуры на естественно редуктивных однородных пространствах / В. В. Балащенко // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 4. – С. 3–15.

## REFERENCES

1. Yano, K. On a structure defined by a tensor field  $f$  of type  $(1, 1)$  satisfying  $f^3 + f = 0$  / K. Yano // Tensor. – 1963. – № 14 – P. 99–109.
- Stepanov, N. A. Osnovnye fakty teorii  $\phi$ -prostranstv / N. A. Stepanov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1967. – № 3. – S. 88–95.
2. Wolf, J. A. Homogeneous spaces defined by Lie group automorphisms / J. A. Wolf, A. Gray // Journal of Differential Geometry. – 1968. – Vol. 2 №1–2. – P. 77–159.
3. Fedenko, A. S. Prostranstva s simmetriyami. / A. S. Fedenko – Minsk : Izdatel'stvo Belorusskogo gosudarstvennogo universiteta, 1977. – 168 s.
4. Koval'skij, O. Obobshchennye simmetricheskie prostranstva / O. Koval'skij – Moskva : Mir, 1984. – 240 s.
- Stepanov, N. A. Odnorodnye 3-ciklicheskie prostranstva / N. A. Stepanov // Izvestiya vuzov. Matematika. – 1967. – №12. – S. 65–74.
5. Gray, A. Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3 / A. Gray // Journal of Differential Geometry. – 1972. – Vol. 7 №3–4. – P. 343–369.
6. Yano, K. Structures on manifolds / K. Yano, M. Kon – Singapore: World Scientific, 1984. – 520 p.
7. Yano, K. CR-podmnogoobraziya v kelerovom i sasakievom mnogoobraziyah / K. Yano, M. Kon – Moskva : Nauka, 1990. – 189 s.
8. Gricans, A. S. O geometrii killingovyh  $f$ -mnogoobrazij / A. S. Gricans // Uspekhi mat. nauk. – 1990. – T. 45. – № 4. – S. 149–150.
9. Gricans, A. S. O stroenii killingovyh  $f$ -mnogoobrazij / A. S. Gricans // Izv. vuzov. Matematika. – 1992. – № 6. – S. 49–57.
10. Biggs, R. Some remarks on the oscillator group / R. Biggs, S. S. Remsing // Differential Geometry and its Applications. – 2014. – № 35 – P. 99–209.
11. Fischer, M. Spectra of compact quotients of the oscillator group / M. Fischer, I. Kath // SIGMA. – 2021. – Vol. 17, № 051 – 48 p.
12. Biggs, R. On extensions of sub-Riemannian structures on Lie groups / R. Biggs, P. T. Nagy // Differential Geometry and its Applications. – 2016. – № 46 – P. 25–38.
13. Balashchenko, V. V. Geometriya kanonicheskikh struktura na odnorodnyh  $\Phi$ -prostranstvakh poryadka 4 / V. V. Balashchenko, O. V. Dashevich // Uspekhi mat. nauk. – 1994. – T. 49, № 4. – S. 153–154.
14. Balashchenko, V. V. Invariantnye struktury na odnorodnyh  $\Phi$ -prostranstvakh poryadka 5 / V. V. Balashchenko, Yu. D. Churbanov // Uspekhi mat. nauk. – 1990. – T. 45, № 1. – S. 169–170.
15. Balashchenko, V. V. Invariant nearly Kähler  $f$ -structures on homogeneous spaces / V. V. Balashchenko // Global Differential Geometry: The Mathematical Legacy of Alfred Gray. Contemporary Mathematics. – 2001. – V. 288. – P. 263–267.
16. Balashchenko, V. V. Invariantnye  $f$ -struktury na estestvenno reduktivnyh odnorodnyh prostranstvakh / V. V. Balashchenko // Izvestiya vuzov. Matematika. – 2008. – № 4. – S. 3–15.

19. *Balashchenko, V. V.* Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group / V. V. Balashchenko // Kragujevac Journal of Mathematics. – 2011. – V. 35, № 2. – P. 209–222.
20. *Balashchenko, V. V.* Canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces / V. V. Balashchenko // Journal of Geometry and Physics. – 2015. – V. 87. – P. 30–38.
21. *Stong, R. E.* The rank of an f-structure / R. E. Stong // Kodai Mathematical Seminar Reports. – 1977. – № 29. – P. 207–209.
22. *Кириченко, В. Ф.* Квазигодородные многообразия и обобщенные почти эрмитовы структуры / В. Ф. Кириченко // Известия АН СССР. Сер. матем. – 1983. – Том 47, № 6 – С. 1208–1223.
23. *Кириченко, В. Ф.* Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных многообразий / В. Ф. Кириченко // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. – Москва : ВИНТИ. – 1986. – № 18 – С. 25–71.
19. *Balashchenko, V. V.* Invariant structures on the 6-dimensional generalized Heisenberg group / V. V. Balashchenko // Kragujevac Journal of Mathematics. – 2011. – V. 35, № 2. – P. 209–222.
20. *Balashchenko, V. V.* Canonical distributions on Riemannian homogeneous k-symmetric spaces / V. V. Balashchenko // Journal of Geometry and Physics. – 2015. – V. 87. – P. 30–38.
21. *Stong, R. E.* The rank of an f-structure / R. E. Stong // Kodai Mathematical Seminar Reports. – 1977. – № 29. – P. 207–209.
22. *Kirichenko, V. F.* Kvaziodnorodnye mnogoobraziya i obobshchennye pochti ermitovy struktury / V. F. Kirichenko // Izvestiya AN SSSR. Ser. matem. – 1983. – Tom 47, № 6 – S. 1208–1223.
23. *Kirichenko, V. F.* Metody obobshchennoj ermitovoj geometrii v teorii pochti kontaktnyh mnogoobrazij / V. F. Kirichenko // Itogi nauki i tekhniki. Problemy geometrii. – Moskva : VINITI. – 1986. – № 18 – S. 25–71.