УДК 37.016:514
Л. Л. Тухолко, А. Д. Шабан
L. L. Tukholko, A. D. Shaban
УО «Белорусский государственный педагогический
университет имени Максима Танка»
(Минск, Беларусь)

ПРОБЛЕМА НЕПОНИМАНИЯ ОБУЧАЮЩИМИСЯ НАЧАЛЬНЫХ ПОНЯТИЙ ТРИГОНОМЕТРИИ

THE PROBLEM OF MISUNDERSTANDING BY STUDENTS INITIAL CONCEPTS OF TRIGONOMETRY

Обращается внимание на проблему несогласованности терминологии, используемой при изложении начал тригонометрии в курсе алгебры. Приводится фрагмент учебного текста, связанного с объяснением сути понятий угла поворота, единичной, числовой, координатной и тригонометрической окружностей.

Attention is drawn to the problem of inconsistency of terminology used when presenting the beginning of trigonometry in an algebra course. A fragment of the course text related to the explanation of essentially the concepts of angle of rotation, unit, numerical, coordinate and trigonometric circle is given.

Ключевые слова: тригонометрия; угол поворота; единичная окружность; числовая окружность; координатная окружность; тригонометрическая окружность.

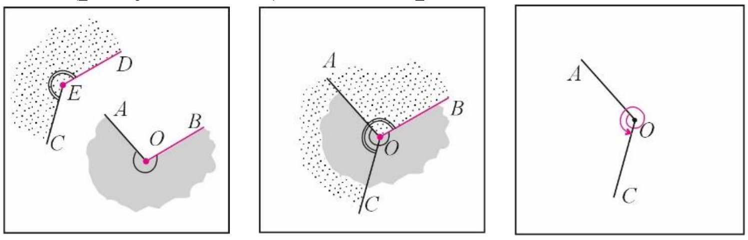
Keywords: trigonometry; rotation angle; unit circle; number circle; coordinate circle; trigonometric circle.

Результаты проведённого нами анализа методических проблем усвоения понятий при обучении тригонометрии в X классе показал, что наиболее острой является проблема непонимания обучающимися начальных понятий тригонометрии. Причина этой проблемы заключается в отсутствии доступного изложения сути этих понятий в учебных пособиях по алгебре. Но студенты – будущие учителя математики – не осознают эту проблему. Большая часть ответов на вопрос о том, какие трудности вы испытывали в школе при обучении тригонометрии (ответ нужно было дать в свободной форме), была связана с заучиванием формул 23 из 73 (32%). Сложность подачи материала отметили лишь 12 студентов (16 %).

В данной статье предлагаются учебные материалы, апробированные в 2023 году при обучении студентов специальности «Математика и информатика» Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка.

1. Формирование представлений об угле поворота.

В школьном курсе геометрии рассматриваются углы на плоскости, не превосходящие полный угол. Приложив два угла, больших развернутого, так, чтобы одна их сторона стала общей (рисунок 1, *а*, *б*), можно получить угол, градусная мера которого превосходит 360°. Для того, чтобы представить такой угол, его удобно рассматривать как фигуру, полученную при повороте луча OA вокруг своего начала O (рисунок 1, *в*) до поворотного совпадения с лучом OC.



а) *б)* *в)*

Рис. 1. – Иллюстрация получения угла, градусная мера которого превосходит 360°

Пусть дан луч OA на плоскости. Повернем его вокруг точки O против часовой стрелки. При повороте на четверть полного оборота получится угол, градусная мера которого равна 90°, при повороте на половину полного оборота получится развернутый угол, при повороте на полный оборот получится полный угол. Углы, большие полного, получатся, когда луч OA начнет совершать второй оборот.

Начальное положение луча OA называют *началом отсчёта*, а образованный при повороте этого луча угол – ***углом поворота***. Луч OA можно поворачивать вокруг точки O в двух направлениях: против часовой стрелки – оно называется *положительным* – и по часовой стрелке – в *отрицательном* направлении. Градусную меру любого угла поворота можно представить в виде:

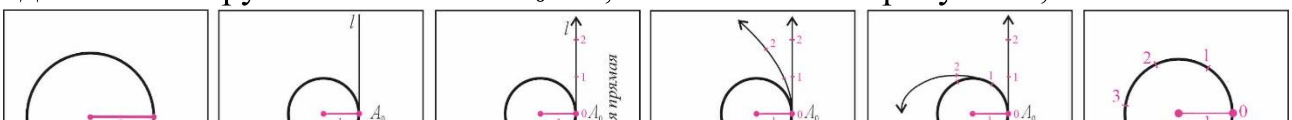
$$\alpha = 360° \cdot n + \varphi, \text{ где } n \in Z,\ 0° \leq \varphi < 360°.$$

Число n показывает количество полных оборотов и направление поворота. Например, $-680° = 360° \cdot (-2) + 40°$, то есть угол в $-680°$ получается, если совершить два полных оборота в отрицательном направлении и ещё повернуть луч OA на 40° в положительном направлении.

2. Построение угла поворота в системе координат.

Для того, чтобы для углов поворота можно было использовать тригонометрические соотношения подобно тому, как это делалось в курсе геометрии для углов, градусная мера которых изменяется от 0° до 180°, необходима новая графическая модель.

Рассмотрим окружность, радиус которой равен 1. Такую окружность называют ***единичной окружностью*** (рисунок 1, *а*). Пусть прямая l касается единичной окружности в точке A_0 так, как показано на рисунке 1, *б*.



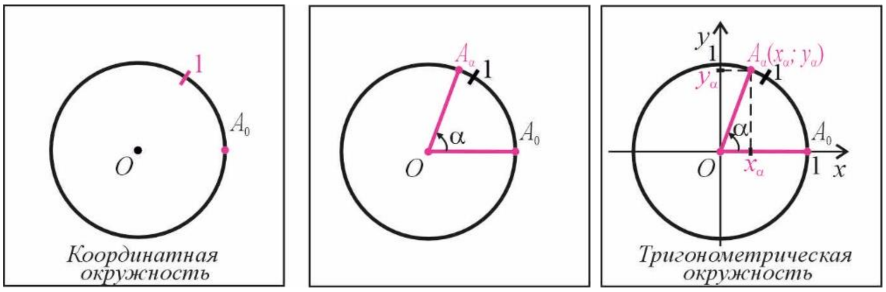
а) *б)* *в)* *г)* *д)* *е)*

Рис. 2. – Иллюстрация понятий «единичная окружность» и «числовая окружность»

Будем считать эту прямую изображением множества действительных чисел, то есть числовой прямой. Пусть начало отсчёта 0 рассматриваемой числовой прямой совпадает с точкой A_0 окружности, положительным направлением является направление вверх, единичный отрезок равен радиусу единичной окружности. Мысленно будем «наматывать» эту прямую на единичную окружность, устанавливая соответствие между точками прямой, изображающими действительные числа, и точками окружности. *Единичная окружность, для которой установлено соответствие между действительными числами и точками этой окружности, называется* ***числовой окружностью***.

Числовая окружность служит для изображения числовых множеств – алгебраических объектов, но с её помощью можно задать координатную окружность – геометрический объект, который ставит в соответствие каждой точке окружности число, равное пути, пройденному точкой по окружности от начала отсчёта). Координатную окружность можно использовать, чтобы измерять угол поворота не только в долях полного угла, но и в длинах соответствующей дуги числовой окружности.

Координатной окружностью *называют окружность, на которой выбрано начало отсчёта, направление отсчёта, а единицей измерения длины дуги этой окружности является её радиус (рис.3, а)*. На рисунке 3 *б*, изображён угол поворота A_0OA_α. Он измеряется градусной мерой $\alpha°$ и длиной дуги $\cup A_0A_\alpha$



а) б) в)

Рисунок 3. – Иллюстрация понятий «координатная окружность», «тригонометрическая окружность»

Разместим координатную окружность на координатной плоскости Oxy, так, чтобы центр окружности совместился с началом координат, а начало отсчёта на окружности совпало с точкой (1; 0) координатной плоскости. Положительную полуось абсцисс Ox примем за начало отсчета для любого угла α. Точку её пересечения с координатной окружностью обозначим A_0. *Точку пересечения луча, определяющего угол поворота* α, *с координатной окружностью называют* ***точкой, соответствующей углу*** α и обозначают A_α.

Координатную окружность на координатной плоскости с центром в начале координат, начало отсчёта которой имеет координаты (1; 0), *а направление обхода против часовой стрелки является положительным, называют* ***тригонометрической окружностью***. Число, соответствующее точке

A_α на тригонометрической окружности, называют *радианной мерой угла α.* С помощью тригонометрической окружности вводятся понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла и числа.

Отметим, что тригонометрической окружностью, вообще говоря, можно назвать и, единичную окружность с центром в начале координат, на которой есть градусная разметка. Но такую окружность нельзя будет назвать ни координатной, ни числовой. Это будет окружность, а точнее – единичный круг со шкалой транспортира для полного угла. С учётом формулы $\alpha = 360° \cdot n + \varphi$, где $n \in Z$, $0° \leq \varphi < 360°$, можно отметить и любой угол поворота.

Таким образом, для обеспечения понимания начальных понятий тригонометрии в курсе алгебры важно сформировать представления о следующих понятиях: угол больший полного; угол поворота; положительное (отрицательное) направление поворота луча; единичная, числовая, координатная и тригонометрическая окружности; точка, соответствующая углу α; радианная мера угла α.

Список использованных источников

1. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 кл. В 2 ч. Ч. 1. Уч. для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый и углубл. уровни) / А. Г. Мордкович, П. В. Семенов. – 9-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2020. – 457 с.
2. Алгебра : учеб. пособие для 10 кл. учреждений общ. сред, образования с рус. яз. обучения / Е. П. Кузнецова, [и др.] ; под ред. Л. Б. Шнепермана. – 3-е изд., испр. – Минск : Нар. асвета, 2013. – 271 с. : ил.
3. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Учебник для учащихся общеобразоват. организаций (углубл. Уровень) / Н.Я. Виленкин [и др.]. – 18-е изд. – М. : Мнемозина, 2014. – 352 с.

УДК 51 (072) (043.3)

Е. И. Федорова, Н. А. Левкевич
H. I. Fedorova, N. A. Levkevich
ГУО «Средняя школа № 48 г. Минска имени Ф.А. Малышева»
(Минск, Беларусь)

ФОРМЫ И ПРИЕМЫ ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ УЧАЩИХСЯ СНЕВЫСОКИМИ РЕЗУЛЬТАТАМИ УЧЕБНОЙ ЕЯТЕЛЬНОСТИ

FORMS AND METHODS OF TEACHING MATHEMATICSTO STUDENTS WITH LOW ACADEMIC PERFORMANCE

В статье описываются формы и приемы, позволяющие организовать процесс обучения математике для учащихся с невысокими результатами учебной деятельности

The article describes the forms, techniques and means to organize the process of teaching mathematics to students with low academic performance