

Вряд ли будет преувеличением сказать, что проблема разрезаний фигур на равновеликие части предоставляет широкое поле для исследований. В предложенную совокупность вошли задачи, подходы к решению которых известно авторам, однако многие направления этой проблемы всё ещё не разработаны. Материалы могут быть полезны учителям и преподавателям для организации научно-исследовательской деятельности школьников и студентов, а также подготовки к математическим конкурсам и олимпиадам.

Список использованных источников

1. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – 2-е изд., испр. – М. : Наука, 1975. – 462 с.
2. Блинков, А. Д. Непрерывность / А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц – М.: МЦНМО, 2015. – 160 с.
3. Олехник, С. Н. Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов. – М. : Наука, 1988. – 160 с.
4. Гриб, Н.В. Прямолинейные биссекторы плоских фигур / Н.В. Гриб, М.В. Круталевич, // Прикладные вопросы точных наук: Материалы IV Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и преподавателей, посвященной 75-летию Победы в Великой Отечественной войне (АМТИ, г. Армавир, Россия, 13-14 ноября 2020 г.) / отв. ред. Л.А. Горovenko ; техн. ред. Е.В. Ковригина. – Армавир: РИО АГПУ, 2020 г. – С. 30–34.
5. Стинрод, Н. Первые понятия топологии: геометрия отображений отрезков, кривых, окружностей и кругов / Н. Стинрод, У. Чинн. – Москва: Мир, 1967. – 224 с.
6. Верига, Е.Е. Разрезание на равновеликие части и один класс плоских фигур / Е.Е. Верига, Е. А. Кононович // Инновационные подходы к обучению физике, математике, информатике: материалы Междунар. студ. науч.-практ. конф., г. Минск, 18 апреля 2023 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка ; редкол.: С. И. Василец, Л. Л. Тухолко (отв. ред.) [и др.]. – Минск : БГПУ, 2023. – С. 122–127.

УДК 514.112.3

В. С. Гришанов, О. И. Баран

V. S. Grishanov, O. I. Baran

(Минск, Беларусь)

КОНСТРУКТОР ПИФАГОРОВЫХ ТРОЕК ЧИСЕЛ

THE CONSTRUCTOR OF PYTHAGOREAN TRIPLES OF NUMBERS

Предлагаются алгоритмы построения пифагоровых троек чисел по заданному катету и для определения количества соответствующих троек.

Algorithms for constructing Pythagorean triples of numbers according to a given set and for determining the number of corresponding triples are proposed.

Ключевые слова: пифагоровы тройки чисел, алгоритм.

Keywords: Pythagorean triples of numbers, algorithm.

При изучении геометрии и решении задач может возникать потребность определения по заданному катету a второго катета b и гипотенузы c в целых числах. Например, такие задачи встречаются в конструктивной геометрии, при построении героновых треугольников и т.д. [1 – 3]. Предлагаем алгоритм построения таких пифагоровых троек по заданному катету.

Из теоремы Пифагора выведем формулу, позволяющую находить все варианты пифагоровых троек, которые содержат заданный катет a :

$$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow a^2 = c^2 - b^2 \rightarrow a^2 = (c - b) \cdot (c + b).$$

Обозначим $c - b = p$, тогда $b = c - p$, и $c + b = 2c - p$, тогда $a^2 = p \cdot (2c - p)$.

Откуда получаем: $c = \left(\frac{a^2}{p} + p \right) \cdot \frac{1}{2}$. Эта формула предоставляет удобный

алгоритм построения пифагоровых троек по заданному катету a . Здесь p является одним из делителей или произведением делителей числа a . При этом p меньше величины этого катета, но для нечётных значений a должен учитываться также делитель 1.

Поскольку число a может быть составным, то может существовать много вариантов пифагоровых троек для этого катета. Например, для $a = 60$ существуют 13 вариантов пифагоровых троек, для 120 и 180 – по 22, для 5040 – 157 и т.д. Понятно, что количество пифагоровых троек не зависит от величины сомножителей для катета a , а только от их количества и показателей их степеней. Поставим задачу: по величине заданного катета a найти соответствующее количество пифагоровых троек.

Заменим в разложении катета на произведение простых сомножителей численные значения сомножителей буквенными. Полученное выражение назовём структурой катета. Так, для катетов $15=3 \times 5$, $559=13 \times 43$, $10807=101 \times 107$ структура катета будет ab . Для катетов $63=3^2 \times 7$, $147=3 \times 7^2$, $2783=11^2 \times 23$ структура катета будет a^2b . Для катета $10584=2^3 \times 3^3 \times 7^2$ структура катета будет $2^3a^3b^2$ и т.д. Следовательно, структура катета в общем виде будет такой: $p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \dots \cdot p_k^{n_k}$, где p_i простые числа, а n_i – натуральные показатели степени. Откуда понятно, что и самих структур, и чисел, соответствующих любой структуре, существует бесконечно много. Важна именно структура канонического разложения числа.

При построении соответствующих пифагоровых троек предлагаем учитывать полученные опытным путём постулаты:

1. Пифагоровы тройки существуют для всех катетов, начиная с 3.
2. Если катет a или $a/2$ простое число, то для него существует единственная пифагорова тройка.
3. При чётном a делители могут быть только чётными. При этом частное от деления a на делитель также должно быть чётным.
4. Для числа $2N$, где N любое нечётное число, имеется столько же решений, как и для самого числа N .

Определение числа пифагоровых троек для структуры катета в общем виде вызывает определённые трудности. Поэтому, для некоторых конкретных структур катета a , были эмпирически определены количества соответствующих пифагоровых троек, и обобщенные результаты представлены в таблице 1.

Таблица 1. – Количество пифагоровых троек в зависимости от структуры a .

Структура катета a	Всего решений	Структура катета a	Всего решений	Структура катета a	Всего решений	Структура катета a	Всего решений
a^n	n	2^n	$n - 1$	$2ab$	4	$2abc$	13
ab	4	$2a$	1	2^2ab	13	2^2abc	40
a^2b	7	2^2a	4	2^3ab	22	2^3abc	67
a^3b	10	2^3a	7	2^4ab	31	2^4abc	94
a^nb	$3n+1$	2^4a	10	$2^na b$	$9n - 5$	2^nabc	$27n - 14$
a^2b^2	12	2^5a	13	$2a^2b$	7	$2a^2bc$	22
a^3b^2	17	2^na	$3n - 2$	2^2a^2b	22	2^2a^2bc	67
a^4b^2	22	$2a^2$	2	2^3a^2b	37	2^3a^2bc	112
a^nb^2	$5n+2$	2^2a^2	7	2^4a^2b	52	2^4a^2bc	157
a^3b^3	24	2^3a^2	12	2^na^2b	$15n - 8$	2^na^2bc	$45n - 23$
a^4b^3	31	2^4a^2	17	$2a^3b$	10	$2a^3bc$	31
a^nb^3	$7n+3$	2^na^2	$5n - 3$	2^2a^3b	31	2^2a^3bc	94
a^4b^4	40	$2a^3$	3	2^3a^3b	52	2^3a^3bc	157
a^5b^4	49	2^2a^3	10	2^4a^3b	73	2^na^3bc	$63n - 32$
a^nb^4	$9n+4$	2^3a^3	17	2^na^3b	$21n - 11$	2^na^mbc	$9(2nm+n - m) - 5$
a^nb^m	$2nm+n+m$	2^4a^3	24	2^na^mb	$3(2nm+n - m) - 2$		
		2^5a^3	31				
abc	13	2^na^3	$7n - 4$	$2a^2b^2$	12	$2^3a^2b^2c$	187
a^2bc	22	$2a^4$	4	$2^2a^2b^2$	37	$2^na^2b^2c$	$75n - 38$
a^3bc	31	2^2a^4	13	$2^3a^2b^2$	62	$2a^2b^2c^2$	62
$a^nb c$	$9n+4$	2^3a^4	22	$2^4a^2b^2$	87	$2^2a^2b^2c^2$	187
a^2b^2c	37	2^4a^4	31	$2^na^2b^2$	$25n - 13$	$2^3a^2b^2c^2$	312
a^3b^2c	52	2^5a^4	40	$2a^3b^2$	17	$2^na^2b^2c^2$	$125n - 63$
a^nb^2c	$15n+7$	2^na^4	$9n - 5$	$2^2a^3b^2$	52	$2a^3b^2c$	52
a^3b^3c	73	$2a^5$	5	$2^3a^3b^2$	87	$2^2a^3b^2c$	157
$a^2b^2c^2$	62	2^2a^5	16	$2^4a^3b^2$	122	$2^3a^3b^2c$	262
$abcd$	40	2^3a^5	27	$2^na^3b^2$	$35n - 18$	$2^4a^3b^2c$	367
a^2bcd	67	2^4a^5	38	$2a^3b^3$	24	$2^na^3b^2c$	$105n - 53$
a^3bcd	94	2^5a^5	49	$2^2a^3b^3$	73	$2a^3b^3c$	73

a^4bcd	121	2^na^5	$11n-6$	$2^3a^3b^3$	122	$2^2a^3b^3c$	220
a^nbcd	$27n+13$	2^na^n	$2nm+n-m-1$	$2^4a^3b^3$	171	$2^3a^3b^3c$	367
$abcde$	121			$2^na^3b^3$	$49n-25$	$2^na^3b^3c$	$147n-74$

Теперь видны более общие закономерности, которые в сжатом виде представлены в таблице 2.

Таблица 2. – Обобщенные результаты.

Структура катета a	Всего решений	Структура катета a	Всего решений	Структура катета a	Всего решений
a	1	a	1	a^n	n
ab	4	ab	4	a^nb	$3n+1$
abc	13	a^4b	13	a^nb^2	$9n+4$
$abcd$	40	a^4bc	40	a^nbcd	$27n+13$
$abcde$	121	a^4bcd	121	a^nb^2c	$81n+40$
2^n	$n-1$	2^na^2b	$9n-5$	2^na^2bc	$27n-14$
2^na	$3n-2$	$2^na^2b^2$	$15n-8$	$2^na^2b^2c$	$45n-23$
2^na^2b	$9n-5$	2^na^3b	$21n-11$	2^na^3bc	$63n-32$
2^na^2bc	$27n-14$	2^na^4b	$27n-14$	2^na^4bc	$81n-41$
2^na^2bcd	$81n-41$	2^na^5b	$33n-17$	2^na^5bc	$99n-50$

Здесь хорошо прослеживаются закономерности возрастания числа пифагоровых троек в зависимости от упорядоченного усложнения структуры катета a .

Интересная особенность прослеживается для чётных структур катета a (пять нижних строк Таблицы 2).

Оказалось, что зная количество вариантов q для катета N , можно находить количество вариантов для катета 2^nN по формуле: $(2q+1) \cdot n - q - 1$. Покажем справедливость этой формулы на трёх примерах, взятых из таблицы 1.

Структура a^2b^2 даёт 12 вариантов. Тогда структура $2^na^2b^2$ даёт $(12+13)n - 13 = 25n - 13$, что согласуется со структурой $2^na^2b^2$. Структура a^3bc даёт 31 решение: $(31+32)n - 32 = 63n - 32$, что согласуется со структурой 2^na^3bc . Структура a^3b^2c даёт 52 решения: $(52+53)n - 53 = 105n - 53$, что согласуется со структурой $2^na^3b^2c$.

Находить количество пифагоровых троек по заданной гипотенузе значительно труднее. Поэтому эта задача здесь не рассматривается.

Понятно, что любая структура катета a даёт конечное число решений. Но оказалось, что если заданный катет или гипотенуза выражаются конечной десятичной дробью, то количество соответствующих пифагоровых троек бесконечно большое.

Были составлены таблицы пифагоровых троек по заданному катету до числа 208 и по заданной гипотенузе до числа 1565. В качестве примера, в пределах числовых значений этих таблиц, найдены количества решений для числа 4,5 для катета, и для 3,3 и 4,5 для гипотенузы. Получили 14 решений для катета 4,5, выраженных конечной десятичной дробью. Эти решения приведены в таблице 3.

Для примера покажем, как были найдены другие элементы треугольника для катета 4,5. Умножением на 10 приводим это число к целому значению. Для катета 45 находим все решения и делим их на 10. Далее находим все решения для катета 90, делим их на 20 и т.д. Поскольку существуют решения для любых катетов вида $45n$, то таких треугольников бесконечно много.

Для гипотенузы 3,3 с использованием указанного интервала решений конечной десятичной дробью выражаются только два из семи: $a = 1,98$, $b = 2,64$ и $a = 0,924$, $b = 3,168$. Для значения 4,5 получаем три решения из 10: $a = 2,7$, $b = 3,6$; $a = 1,584$, $b = 4,212$ и $a = 1,26$, $b = 4,32$.

Понятно, что если использовать числа, превосходящие 208 и 1565 до бесконечности, то и вариантов для значений катета и гипотенузы, выраженных конечной десятичной дробью, будет бесконечно много.

Таблица 3. – Катет $a = 4,5$.

	b	c		b	c
1	202,475	202,525	8	20,0	20,5
2	101,2	101,3	9	16,575	17,175
3	67,425	67,575	10	13,125	13,875
4	50,525	50,725	11	10,8	11,7
5	40,375	40,625	12	6,0	7,5
6	33,6	33,9	13	2,8	5,3
7	22,275	22,725	14	2,4	5,1

Приведенные материалы имеют значительный учебно-методический потенциал и могут быть использованы для активизации познавательной деятельности учащихся средней и высшей школы.

Список использованных источников

1. Литцман В. Теорема Пифагора / В. Литцман – М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. – 114 с.
2. Серпинский В.М. Пифагоровы треугольники / В.М. Серпинский – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство министерства просвещения РСФСР, 1959. – 112 с.
3. Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма / Г.Эдвардс. – М.: Мир, 1980. – 485 с.