

УДК 514.1

Н.В. Гриб, С.А. Иванчик

N.V. Grib, S.A. Ivanchyk

УО «Белорусский государственный педагогический

университет имени Максима Танка»

(Минск, Беларусь)

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ ФИГУР НА РАВНОВЕЛИКИЕ ЧАСТИ

RESEARCH PROBLEMS OF CUTTING A PLANE FIGURE INTO EQUAL-SIZED PARTS

В работе построена совокупность исследовательских задач на разрезание плоских фигур на две и более равновеликих частей.

A system of research problems of cutting a plane figure into equal-sized parts has been built.

Ключевые слова: плоская фигура; площадь; равновеликие фигуры; биссектор.

Keywords: plane shape; area; equal-sized shapes; bisector.

С задачами на разрезание фигур на равновеликие части человеку естественным образом нередко приходится сталкиваться в своей практической деятельности. Например, нужно разрезать торт постоянной толщины поровну на несколько человек или разделить некоторый земельный участок на равновеликие участки.

В математической литературе можно встретить отдельные задачи на разрезание фигур на равновеликие части, найти же какую-либо систематизацию фактов, приёмов и подходов к решению этой проблемы не удастся. В настоящей статье читателю предлагается совокупность исследовательских задач, затрагивающих различные вопросы разрезов — от существования и единственности разреза с заданными свойствами до общих методов построения системы разрезов для индивидуальных фигур или целых классов фигур. Все задачи, за исключением задач 1, 14 и 22, авторские.

Деление фигуры на две равновеликие части.

Кривую с концами на границе плоской фигуры, делящую эту фигуру на две равновеликие части, Д. Пойа назвал *биссектором фигуры* [1, стр. 202]. В рамках настоящей работы будем рассматривать только прямолинейные биссекторы фигур (т.е. отрезки), для краткости называя их просто биссекторами. Предполагается, что построение биссектора фигуры происходит классическими инструментами — циркулем и линейкой.

1. Докажите, что существует единственный биссектор выпуклой фигуры, проходящий: а) параллельно данной прямой; б) через данную точку на границе фигуры; в) через данную точку вне фигуры.

2. Докажите, что для произвольной внутренней точки выпуклой фигуры существует проходящий через неё биссектор этой фигуры.

3. Докажите, что в произвольной выпуклой фигуре существует биссектор, делящий периметр пополам.

Задачи 1 – 3 о существовании и единственности биссектора фигуры решаются с использованием принципа непрерывности (см, например, [2]).

Докажем, например, свойство 1, б). Пусть P – точка на границе фигуры. Проведём через неё такую прямую, чтобы вся фигура лежала по одну сторону этой прямой. При непрерывном вращении прямой около точки площадь одной части фигуры (назовём её первой), которая находится по одну сторону прямой, непрерывно растёт, а площадь другой части (второй) непрерывно убывает (рис. 1). Так как изначально площадь первой части фигуры равна нулю, а площадь второй равна площади всей фигуры, то при некотором положении прямой площади этих частей станут равны. Это единственное положение прямой и задает биссектор.

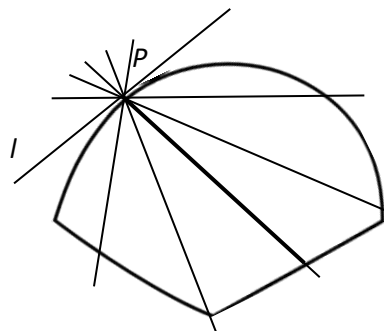


Рис. 1 – Биссектор через точку на границе фигуры

4. Приведите примеры, показывающие, что свойства из задач 1 и 2 для невыпуклых фигур в общем случае не выполняются.

5. Докажите, что ось симметрии фигуры содержит её биссектор.

6. Докажите, что любой проходящий через центр симметрии фигуры отрезок с концами на границе фигуры и внутренними точками, являющимися внутренними точками фигуры, является её биссектором.

7. Докажите, что любой биссектор центрально симметричной фигуры проходит через её центр.

Задачи 6 и 7 дают полную характеристику биссекторов центрально симметричных фигур.

8. Разделить торт в форме ромба на две равновеликие части разрезом минимальной длины.

9. Проведите биссектор треугольника через данную точку на его стороне.

Построение биссектора через точку P на стороне треугольника ABC приведено на рис. 2. Способ опирается на использовании вспомогательного биссектора – медианы BB_1 . Опишите последовательность построений и обоснуйте, почему отрезок PQ – биссектор треугольника/

10. Постройте биссектор треугольника, параллельный его стороне.

11. Постройте биссектор треугольника, параллельный данной прямой.

12. Постройте биссектор треугольника, делящий его периметр пополам.

13. Постройте биссектор треугольника, проходящий через его внутреннюю (внешнюю) точку.

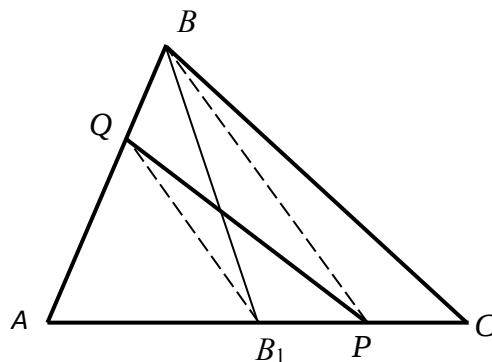


Рисунок 2 – Биссектор треугольника, проходящий через точку на его стороне

Задачи 10 – 13 могут быть решены алгебраическим методом, т.е. некоторый отрезок, к которому сводится построение биссектора, выражается через длины известных отрезков, а затем искомый отрезок по полученному выражению строится циркулем и линейкой. Впрочем, не исключено, что существуют и чисто геометрические решения.

15. Постройте биссектор пятиугольника, проходящий через заданную точку на его стороне.

16. Опишите алгоритм построения биссектора многоугольника, проходящего через заданную точку на его стороне.

Задачи 17 – 20 касаются биссекторов многоугольников наименьшей длины. Кратчайшие биссекторы произвольных фигур изучались в работе [4].

17. Найдите отрезок минимальной длины, отделяющий от данного угла треугольник заданной площади.

18. Опишите алгоритм построения кратчайшего биссектора треугольника.

19. Охарактеризуйте положение кратчайшего биссектора выпуклого многоугольника по отношению к соединяемым им сторонам. Докажите, что кратчайший биссектор не может проходить через вершину.

20. Опишите алгоритм нахождения кратчайшего биссектора: а) выпуклого четырехугольника; б) выпуклого многоугольника.

Деление фигуры на несколько равновеликих частей.

В следующих задачах речь будет идти о разрезании фигуры на произвольное количество равновеликих частей. Под решением задачи понимается алгоритм построения некоторой системы внутренних отрезков фигуры, делящих её на n равновеликих частей.

21. Предложите способ деления на n равновеликих частей: а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) треугольника; г) трапеции.

22. Докажите, что произвольную выпуклую фигуру можно разделить двумя перпендикулярными разрезами на четыре равновеликие части [5, стр. 103].

При решении этой задачи используется принцип непрерывности.

В задачах 23 – 28 исследуется класс фигур, каждая из которых может быть разрезана на произвольное количество равновеликих частей с помощью деления на такое же число равных по длине частей её границы. Этот класс был исследован в работе [6].

23. Докажите, что если разделить окружность круга на n частей равной длины и провести разрезы из центра в полученные точки, то круг разделится на n равновеликих частей. Докажите аналогичное утверждение для квадрата и ромба.

24. Предложите способ деления на n равновеликих частей: а) треугольника; б) описанного многоугольника путем деления их периметра на равные части (в смысле границы на части равной длины). Из какой точки фигуры нужно проводить разрезы?

25. Приведите пример невыпуклого многоугольника, допускающего деление на равновеликие части через деление на равные части периметра.

26. Приведите пример фигуры, не являющейся кругом и многоугольником и допускающей деление на равновеликие части через деление периметра.

27. Докажите, что для того, чтобы фигура допускала разрезание на равновеликие части путем деления её границы, необходимо, чтобы граница состояла из лишь из отрезков и дуг окружностей одного радиуса.

28. Опишите множество всех фигур, разрезание которых на произвольное количество равновеликих частей возможно через деление их границы.

При решении задач 29 и 30 удобно использовать метод из задач 15 и 16.

29. Разрежьте пятиугольник на три равновеликие части через заданную точку на его стороне.

30. Опишите алгоритм разрезания многоугольника на n равновеликих частей через заданную точку на его стороне.

В некоторых ситуациях произвести разрезание данной фигуры можно с помощью аффинного преобразования плоскости или параллельного проектирования плоскости на плоскость. Сначала нужно провести разрезание «хорошей» фигуры, являющейся прообразом исходной фигуры при некотором аффинном преобразовании (параллельном проектировании), а затем перенести систему разрезов в исходную задачу с использованием свойств преобразования.

31. Докажите, что если фигура F разделена на равновеликие части множеством отрезков I , а ψ – некоторое аффинное преобразование плоскости (параллельное проектирование плоскости на плоскость), то множество $\psi(I)$ также делит фигуру $\psi(F)$ на равновеликие части.

32. Предложите основанный на задаче 31 способ деления на n равновеликих частей разрезами из какой-либо внутренней точки а) прямоугольника; б) параллелограмма; в) треугольника; г) трапеции; д) эллипса.

Вряд ли будет преувеличением сказать, что проблема разрезаний фигур на равновеликие части предоставляет широкое поле для исследований. В предложенную совокупность вошли задачи, подходы к решению которых известно авторам, однако многие направления этой проблемы всё ещё не разработаны. Материалы могут быть полезны учителям и преподавателям для организации научно-исследовательской деятельности школьников и студентов, а также подготовки к математическим конкурсам и олимпиадам.

Список использованных источников

1. Пойа, Д. Математика и правдоподобные рассуждения / Д. Пойа. – 2-е изд., испр. – М. : Наука, 1975. – 462 с.
2. Блинков, А. Д. Непрерывность / А. Д. Блинков, В. М. Гуровиц – М.: МЦНМО, 2015. – 160 с.
3. Олехник, С. Н. Старинные занимательные задачи / С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко, М. К. Потапов. – М. : Наука, 1988. – 160 с.
4. Гриб, Н.В. Прямолинейные биссекторы плоских фигур / Н.В. Гриб, М.В. Круталевич, // Прикладные вопросы точных наук: Материалы IV Международной научно-практической конференции студентов, аспирантов и преподавателей, посвященной 75-летию Победы в Великой Отечественной войне (АМТИ, г. Армавир, Россия, 13-14 ноября 2020 г.) / отв. ред. Л.А. Горovenko ; техн. ред. Е.В. Ковригина. – Армавир: РИО АГПУ, 2020 г. – С. 30–34.
5. Стинрод, Н. Первые понятия топологии: геометрия отображений отрезков, кривых, окружностей и кругов / Н. Стинрод, У. Чинн. – Москва: Мир, 1967. – 224 с.
6. Верига, Е.Е. Разрезание на равновеликие части и один класс плоских фигур / Е.Е. Верига, Е. А. Кононович // Инновационные подходы к обучению физике, математике, информатике: материалы Междунар. студ. науч.-практ. конф., г. Минск, 18 апреля 2023 г. / Белорус. гос. пед. ун-т им. М. Танка ; редкол.: С. И. Василец, Л. Л. Тухолко (отв. ред.) [и др.]. – Минск : БГПУ, 2023. – С. 122–127.

УДК 514.112.3

В. С. Гришанов, О. И. Баран

V. S. Grishanov, O. I. Baran

(Минск, Беларусь)

КОНСТРУКТОР ПИФАГОРОВЫХ ТРОЕК ЧИСЕЛ

THE CONSTRUCTOR OF PYTHAGOREAN TRIPLES OF NUMBERS

Предлагаются алгоритмы построения пифагоровых троек чисел по заданному катету и для определения количества соответствующих троек.

Algorithms for constructing Pythagorean triples of numbers according to a given set and for determining the number of corresponding triples are proposed.

Ключевые слова: пифагоровы тройки чисел, алгоритм.

Keywords: Pythagorean triples of numbers, algorithm.