

Взаимосвязь логики, теории алгоритмов и компьютеров, способствующая развитию логической культуры и алгоритмического мышления, является важнейшей частью математического образования и, с нашей точки зрения, важным инструментом, который подготовит будущего учителя к обучению его учеников «...приемам человеческой мысли при исчислении».

Список использованных источников

1. Толстой Л.Н. Педагогические сочинения. – М., 1989 –С.244.
2. Большая советская энциклопедия:[в 30 т.] / гл. ред. А. М. Прохоров. – 3-е изд. – М. : Советская энциклопедия, 1973. Доступно по ссылке <https://www.booksite.ru/fulltext/1/001/008/130/index.htm>

УДК 372.851

С. И. Василец, Э. В. Шалик

S. I. Vasilets, E. V. Shalik

УО «Белорусский государственный педагогический
университет имени Максима Танка»
(Минск, Беларусь)

**РАСПРОСТРАНЕННЫЕ ОШИБКИ СТУДЕНТОВ ПРИ ВЫЧИСЛЕНИИ
ПРЕДЕЛОВ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ**

**COMMON MISTAKES MADE BY STUDENTS WHEN
CALCULATING SEQUENCE LIMITS**

В статье проведен анализ типичных ошибок, допускаемых студентами при вычислении пределов числовых последовательностей, названы основные причины их возникновения и предложены краткие рекомендации по их предотвращению.

The article analyzes typical mistakes made by students when calculating the limits of numerical sequences, identifies the main causes of their occurrence and offers brief recommendations for their prevention.

Ключевые слова: числовая последовательность, предел, вычисление пределов, типичные ошибки.

Keywords: Numeric sequence, limit, calculation of limits, typical errors.

Понятия предела числовой последовательности и функции являются фундаментом для изучения основных положений математического анализа, поэтому недостаточное понимание темы и неумение вычислять пределы может негативно сказаться на дальнейшем обучении студентов. Основные сложности в вычислении пределов вызваны несколькими факторами:

1. Абстрактность понятия: понятие пределов часто рассматривается на абстрактном уровне, с использованием новой для вчерашних школьников символики.

2. Недостаток базовых знаний: для успешного освоения темы необходимо глубокое знание элементарных функций, их свойств и графиков. Пробелы в этих знаниях могут существенно затруднить процесс обучения.

3. Практическое применение: студенты могут не видеть практического применения пределов, что снижает их мотивацию к изучению данной темы.

Эти аспекты требуют внимательного подхода к методике преподавания и разработки эффективных стратегий для преодоления указанных трудностей. ([1, с. 44-48]).

В ходе анализа работы студентов на практических занятиях, результатов контрольных работ, зачётов и экзаменов авторами было замечено, что ряд ошибок по нахождению пределов числовых последовательностей носит системный характер. Рассмотрим распространённые ошибки, которые совершают студенты на первом этапе обучения математическому анализу и обоснуем необходимую, с нашей точки зрения, пропедевтику таких ошибок.

В начале изучения пределов числовых последовательностей и функций вводится понятие расширения множества действительных чисел добавлением к нему двух новых элементов – плюс бесконечность $(+\infty)$ и минус бесконечность $(-\infty)$. Обращается внимание обучающихся на необходимость помнить аксиомы, определяющие поведение этих элементов. В частности, важным является знание о том, что операции $-\infty + (+\infty)$; $+\infty - (+\infty)$; $-\infty - (-\infty)$; $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ не определены.

Первая ошибка при вычислении пределов последовательностей кроется в неправильном использовании теоремы о существовании пределов суммы, разности, произведения двух (любого конечного числа) сходящихся последовательностей.

Пример 1. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

Неверное решение заключается в следующем:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \dots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n-1}{n^2} = 0 + 0 + \dots + 0 = 0.$$

Такое решение возникло из-за неверного применения теоремы о пределе суммы к бесконечному числу слагаемых, и на это необходимо обращать внимание при формулировке и доказательстве теоремы. Правильное решение заключается в применении формулы суммы арифметической прогрессии.

Верное решение [2, с.42-43]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n - 1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2. При рассмотрении последовательности $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ считаем необходимым обращать внимание студентов на невозможность в данном случае использования теоремы об операциях над пределами. Предложив цепочку

“очевидных” преобразований, можно попросить студентов найти ошибку в рассуждениях.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}_{n \text{ раз}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1$$

Чтобы подчеркнуть ошибочность подобных рассуждений, доказывается ограниченность данной последовательности снизу числом 2, откуда следует, что в случае сходимости последовательности ее предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 2 \neq 1.$$

Пример 3. Найти предел последовательности

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \right).$$

Приведем ошибочное применение теоремы:

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

Отсюда $z = 0$, что очевидно, не верно.

Правильное решение задачи основано на применении свойства сходящейся промежуточной последовательности: если $x_n \leq z_n \leq y_n$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$.

Рассмотрим $x_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}}$, $y_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$, тогда

$$\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq z_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}} \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1, \text{ поэтому } z = 1.$$

Вторая типичная ошибка обусловлена непониманием и незнанием свойства расширенного множества действительных чисел, что $-\infty + (+\infty)$; $+\infty - (+\infty)$; $-\infty - (-\infty)$ указывают на ситуацию неопределенности.

Пример 4. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n + 1})$.

Неверное решение получается из-за ошибочного предположения, что $\infty - \infty = 0$. В данном случае студент оперирует бесконечностью как числом, то есть

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n + 1}) = +\infty - (+\infty) = 0.$$

Верное решение заключается в умножении и делении выражения, стоящего под знаком предела, на сопряженное.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n - 1}{n + \sqrt{n^2 + 5n + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5 - \frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}}} = -5$$

Аналогичная ошибка совершается и при нахождении следующего предела.

Пример 5.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{3n^2 - 4} - \frac{n^2}{3n + 2} \right) = +\infty - (+\infty).$$

Обращаем внимание обучающихся, что ситуация $+\infty - (+\infty)$ является неопределенностью. Предел надо находить путём приведения дробей к общему знаменателю и сокращения полученной дроби на n в высшей степени.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{3n^2 - 4} - \frac{n^2}{3n + 2} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 4n^2}{(3n^2 - 4)(3n + 2)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 4n^2}{9n^3 + 6n^2 - 12n - 8} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

Третья распространенная ошибка состоит в замене последовательности, которая стоит под знаком предела, на не тождественную ей. Рассмотрим в качестве иллюстрации ещё одно неверное нахождение предела из примера 4.

Пример 6. Вычислить $\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n + 1})$.

Иногда в этом случае студенты делят данную числовую последовательность на n в высшей степени, не учитывая, что при этом получается другая числовая последовательность, не тождественная данной, и получают неверный ответ.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n - \sqrt{n^2 + 5n + 1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{5}{n} + \frac{1}{n^2}} \right) = 0.$$

Описанные ошибки наиболее характерны для студентов-первокурсников, но не единственны. Понимание их помогает преподавателю объяснить материал более доступно и наглядно, что способствует лучшему усвоению темы и делает обучение более целенаправленным и эффективным.

Зная типичные ошибки, преподаватель может адаптировать свои объяснения и задания под конкретные потребности студентов, тем самым способствовать формированию правильных и устойчивых навыков, которые будут полезны в дальнейшем обучении.

Список использованных источников

1. Бровка, Н.В. Формы и средства интеграции теории и практики обучения студентов обучения студентов математике. Учебно-метод. пособие / Н. В. Бровка. — Минск: БГПУ, 2009. — 144 с.
2. Василец, С. И. Введение в математический анализ: практикум / С. И. Василец, И. Н. Гуло, Э. В. Шалик. — Минск: БГПУ, 2024. — 96 с.