

СЕКЦИЯ № 1 ИННОВАЦИИ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ НА УРОВНЕ ОБЩЕГО СРЕДНЕГО, СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО, ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И В ПОДГОТОВКЕ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

УДК 164.042.1

О. И. Баран

O. I. Baran

(Минск, Беларусь)

ПАРАДОКСЫ КРИВЫХ ПЕАНО И ПРОБЛЕМЫ ОБОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ

PARADOXES OF PEANO CURVES AND PROBLEMS OF SUBSTANTIATION OF MATHEMATICS

Рассматриваются парадоксы кривой Пеано и другие. Сделана попытка объяснения этих парадоксов на уровне обоснования математики.

The paradoxes of the Peano curve and others are considered. An attempt is made to explain these paradoxes at the level of substantiation of mathematics.

Ключевые слова: кривая Пеано, парадокс, множества, основания математики.

Keywords: Peano curve, paradox, sets, foundations of mathematics.

Проблемы обоснования математики и её методологии остаются актуальными и требуют дальнейшего изучения. Вместе с тем, элементы философии математики доступны ученикам старших классов и являются важной составляющей фундаментальных курсов математики в педагогических университетах, в частности, при изучении оснований геометрии. Такие знания должны служить надёжным фундаментом математических теорий и их практической компоненты.

Использование в учебном процессе софизмов и парадоксов и, в частности, знакомство с апориями Зенона, является эффективным средством повышения интереса учащихся к математике, способствует развитию логического мышления и творческого потенциала.

В статье рассматриваются некоторые математические парадоксы и указываются их возможные источники и решения.

Кривая Пеано. Идея построения этой кривой состоит в предельном переходе ломаной линии в квадрат при бесконечном количестве итераций. При этом допускаются многочисленные отклонения от принятых теорий, что порождает целый ряд парадоксов, некоторые из которых приводятся ниже [1–2].

- Визуализация построения указанных линий, как на рисунке, приводит к неправильному пониманию происходящего процесса. На любом этапе эти линии остаются невидимыми (по Евклиду: линия есть длина без ширины) В чем парадокс и зачем ссылаться на Евклида, если его определения не выдерживают современной критики?

- Если предположить, что после каждой итерации мы увеличиваем в два раза размеры квадрата, то тем самым не изменяем топологической сути задачи (между двумя квадратами легко установить бинарное соответствие). Но тогда в новой итерации будет сохраняться расстояние между звеньями кривой Пеано и она никогда не сможет заполнить квадрат.

- Вместо увеличения квадрата мы можем поступить иначе. Будем рассматривать каждую последующую итерацию через микроскоп, который на каждом этапе даёт увеличение в два раза большее по сравнению с предыдущим. Поэтому, можно сделать такие же выводы, как и в предыдущем пункте.

Или по-другому: сколько бы не сделали итераций, мы по-прежнему будем бесконечно далеки от полного закрашивания всех точек квадрата.

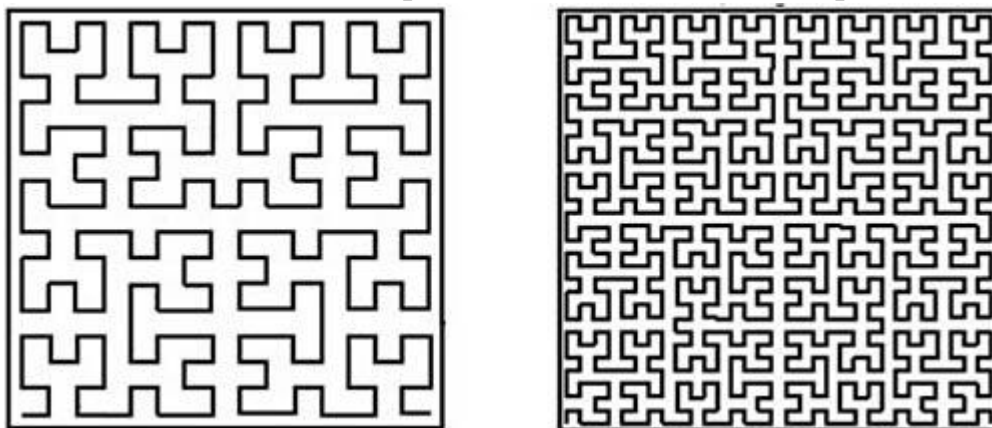


Рис. 1

- При каждой следующей итерации длина линии будет увеличиваться, но всегда будет оставаться конечной. При предельном переходе её длина меняется скачкообразно и становится бесконечной (происходит замена потенциальной бесконечности на актуальную). Другими словами, меняется класс кривой.

- В пределе кривая Пеано в каждой точке будет менять своё направление, и каждый маленький квадратик вырождается в точку, в которую кривая Пеано приходит одновременно с четырёх направлений и одновременно уходит «на все четыре стороны».

- На любом этапе, после любой итерации квадрат по-прежнему будет оставаться фактически пустым: поскольку площадь закрашенной части будет оставаться нулевой. Или по-другому. Если предположить, что кривая окрашена в красный цвет, то в пределе должен быть окрашен весь квадрат, и не понятно, на каком этапе начнётся это окрашивание. То есть, на каком этапе эта кривая

приобретает ненулевую толщину. Пусть на окраску квадрата расходуется определённое количество краски, тогда на каком этапе начнётся уменьшение объёма краски в банке?

- На любом этапе миллиарды и триллионы других подобных кривых можно нарисовать в данном квадрате рядом с исходной. При этом они не будут касаться друг друга, и дальше с этим «букетом кривых» мы можем продолжать дальнейшие итерации. Более того, на любом этапе мы можем добавлять новые кривые. В пределе они все и каждая в отдельности должны заполнять квадрат. При этом непересекающиеся кривые в пределе сливаются в одну. Конечно, для бесконечных множеств многое возможно. Но множества, которые всегда не имеют общих элементов, и в пределе должны быть различными.

- Будем после каждой итерации уменьшать сторону квадрата в два раза. Понятно, что при этом его топология будет полностью сохраняться. Но тогда в пределе мы получим точку, в которую превратится кривая Пеано.

- Увеличивая, или уменьшая квадрат, мы не изменяем сути построения (между точками квадратов легко установить бинарное соответствие). Но тогда, при предельном переходе кривая Пеано заполнит всю плоскость (чем этот предельный переход хуже предыдущего?) Другими словами, получается, что отрезок можно растянуть и перегнуть так, что он заполнит всю плоскость?

- Используя метод отображения Пеано, можно прямую отобразить на плоскую полосу, а плоскую полосу бесконечной длины свернуть в куб, плоскость – в трёхмерное пространство. Рассуждая по индукции, можно трёхмерную гиперплоскость свернуть в четырёхмерный гиперкуб и так далее. [3]. А в пределе она должна заполнять бесконечномерный куб (не понятно, что это такое).

- Все функции, отображающие точки отрезка в точки квадрата, для иррациональных чисел тоже используют предельный переход [1-2]. Но он только способен показать, что кривая Пеано на каком-то этапе может пройти как угодно близко от любой выбранной точки, но на любом этапе через неё не проходит.

- Насколько известно, не найден алгоритм (без предельных переходов), который позволяет для любой точки квадрата указать соответствующую ей точку отрезка. Логично предположить, что такой алгоритм не существует в принципе.

Исходя из приведенных замечаний, делаем вывод, что вопрос о существовании геометрического объекта, называемого кривой Пеано, настолько же бессмысленный, как и вопрос о существовании прямой линии.

По мотивам парадоксов с кривой Пеано предлагаем парадокс «Параллельные прямые с перемычкой».

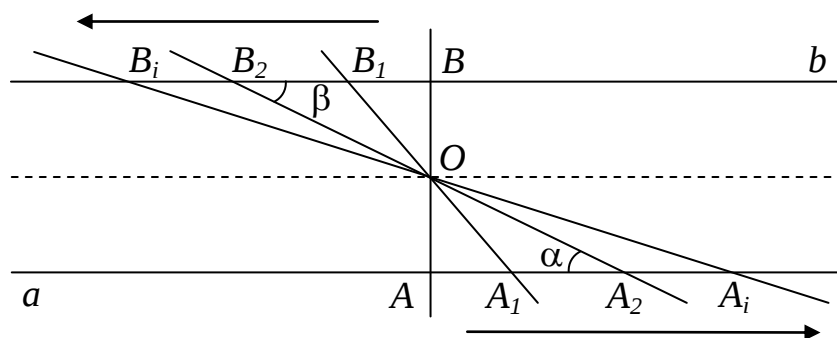


Рис. 2

Рассмотрим параллельные прямые a и b , которые пересекает прямая AB . Пусть точка O является серединой отрезка AB и пусть прямая AB поворачивается вокруг этой точки против часовой стрелки. Тогда точка A_i будет смещаться по прямой a как угодно далеко вправо, а точка B_i будет смещаться как угодно далеко по прямой b влево. Тогда в пределе прямые a и AB будут пересекаться в бесконечно удалённой точке справа, а прямые b и AB в бесконечно удалённой точке слева. При этом каждый из углов α и β в пределе будет равен 0. А так как через одну точку нельзя провести две различные прямые в одном направлении, то прямые a и AB совпадают. Аналогично должны совпадать и прямые b и AB . Следовательно, параллельные прямые a , b и AB в пределе совпадают. Здесь использован предельный переход, аналогичный кривой Пеано.

Анализ приведенных и других парадоксов (и апорий Зенона) позволяет сделать следующие выводы и предположения.

Не существует чёткого определения понятия геометрического предела, вследствие чего неправильно выполняется предельный переход (можно привести примеры, где такие переходы выполняются по-другому). Проявляются парадоксы бесконечных множеств, и выполняется некорректная замена потенциальной бесконечности на актуальную.

Ещё Зенон показал, что и идеи дискретности, и идеи непрерывности порождают неразрешимые парадоксы, причём не только в математике. Здесь уместно отметить, что многие вопросы дискретности и делимости в реальном мире, включая время, остаются нерешёнными.

Возможно, на этих примерах проявляется неполнота аксиоматики и геометрии, и математики в расширенном понимании на их фронтире. Есть веские основания для утверждения, что неполнота аксиоматики является достаточным основанием для существования парадоксов. То есть, неполнота аксиоматики может являться основой её противоречивости. Могут проявляться барьеры и побочные эффекты абстракций.

Всякая система аксиом описывает свойства элементов базовых множеств. А каждое свойство обычно предполагает существование объектов с противоположными свойствами. Кроме того, конечные множества могут

порождать бесконечные множества, которые обладают необычными свойствами и является источником парадоксов.

Любые науки, в том числе и математика, имеют вербальную основу. Определения, теоремы и доказательства – всё в словесной формулировке. Математические парадоксы также формулируются в вербальной форме, поэтому неопределённость, многозначность (синонимы, омонимы, омофоны, омографы) и тавтологии, им присущи априори. Это хорошо видно на примерах парадоксов Бертрана Рассела и др.

Реальный мир противоречив (основной закон философии: закон единства и борьбы противоположностей). Поэтому парадоксы и противоречия являются нормой. Более того: наш мир, на наше счастье, противоречив, что позволяет ему развиваться. И, на наше счастье, он слабо противоречив, что не позволяет хаосу преобладать над относительным порядком и равновесием.

Приведенные материалы могут быть использованы во внеклассной работе в старшей школе и на семинарских занятиях в университете. Многие аспекты достаточно спорны, и поэтому могут быть основой продуктивной учебной дискуссии.

Список использованных источников

1. Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П. С. Александров. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
2. Лузин Н. Н. Теория функций действительного переменного / Н. Н. Лузин. – М.: Учпедгиз, 1948. – 321 с.

УДК 378.016:512.816.4-057.875:51

О. А. Баркович

O. A. Barkovich

УО «Белорусский государственный педагогический
университет имени Максима Танка»
(Минск, Беларусь)

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ СИСТЕМЫ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ИЗУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

METHODOICAL FEATURES OF THE MAPLE COMPUTER MATHEMATICS SYSTEM USING AT THE INITIAL STAGE OF HIGHER ALGEBRA STUDYING

В статье рассмотрены методические особенности использования системы компьютерной математики Maple в сочетании с применением интерактивных методов обучения в процессе решения разноуровневых задач на начальном этапе изучения высшей алгебры для активизации учебно-познавательной деятельности будущих учителей математики.