Весці БДПУ. Серыя 3. 2024. № 4. С. 64–68

УДК 004.94:375.8

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОИСКЕ ОДНОЙ ТОЧКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Ю. А. Быкадоров,
кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информатики и методики преподавания информатики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка
ORCID: https://orcid.org/0009-0002-8729-2271

Поступила в редакцию 15.11.2024.

UDC 004.94:375.8

GENERALIZATION OF THE PROBLEM OF SEARCHING FOR ONE POINT OF A RECTANGLE

Y. Bykadorau,
candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor, Associate Professor of the Department of Computer Science and methodology for teaching computer science; Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank
ORCID: https://orcid.org/0009-0002-8729-2271

Received on 15.11.2024.

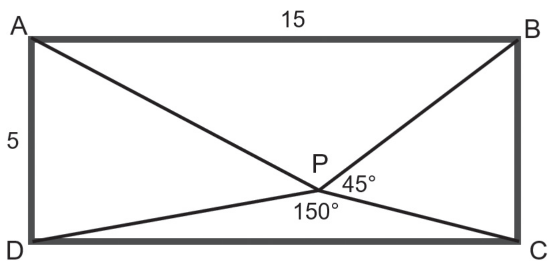
В статье рассмотрена известная задача о поиске точки, которая задана величинами двух смежных углов между отрезками, соединяющими эту точку с вершинами прямоугольника фиксированного размера.
Предложено решение задачи с помощью пакета Mathcad, которое отличается от известного решения использованием другой математической модели, которая существенно сократила число искомых параметров, и расчетной модели координатно-векторного типа.
Также получено известное дополнительное решение задачи за пределами прямоугольника. Предложены обобщенные формулировки задачи, которые позволяют получить для нее другие дополнительные решения и довести общее число решений до 4. Рассмотрен еще один метод решения задачи, который искомую точку прямоугольника интерпретирует как точку пересечения некоторых окружностей

Ключевые слова: геометрическая расчетная задача, модель координатно-векторного типа, пакет Mathcad, дополнительные решения.

The article considers the well-known problem of finding a point, which is specified by the values of two adjacent angles between the segments connecting this point with the vertices of a rectangle of a fixed size.
A solution to the problem under consideration is proposed using the Mathcad package, which differs from the known solution by using a different mathematical model, which significantly reduced the number of required parameters, and a coordinate-vector type calculation model.
A well-known additional solution to the problem outside the rectangle was also obtained. Generalized formulations of the problem are proposed, which make it possible to obtain other additional solutions for it and bring the total number of solutions to 4. Another method for solving the problem is considered, which interprets the desired point of the rectangle as the intersection point of some circles.

Keywords: geometric calculation problem, coordinate-vector type model, Mathcad package, additional solutions.

В [1] предложена и решена задача, которая была лаконично сформулирована в форме следующего чертежа.



Единственное уточнение к чертежу состоит в том, что требуется определить длину отрезка AP.

Для решения этой задачи в [1] была построена математическая модель, которая в качестве пяти неизвестных использовала 4 длины отрезков, соединяющих точку P с вершинами прямоугольника, и ∠APB.

Связать неизвестные удалось системой из пяти уравнений. Четыре уравнения использовали теорему косинусов для четырех внутренних треугольников. При этом для нахождения косинуса брались углы с вершиной в точке P. Пятое уравнение составило равенство выражений площади прямоугольника через произведение сторон и через сумму площадей внутренних треугольников, которые в свою очередь выражались через их полупериметры.

Модель получилась достаточно сложной. Для решения системы уравнений был использован пакет Mathcad и было получено численное решение задачи

$$|AP|=9.518$$

В статье рассматривается другая математическая модель решения этой задачи, приводятся другие ее формулировки, для которых число решений увеличивается и все решения найдены разными методами.

В рассматриваемой задаче длина искомого отрезка AP полностью определяется положением точки P в прямоугольнике. Поэтому для решения задачи имеет смысл ввести прямоугольную систему координат, в которой вершины прямоугольника получат координаты, и в качестве искомых величин рассматривать координаты точки P. Получение значений искомых координат обеспечивает вычисление длины отрезка AP с помощью простой формулы.

Именно такая математическая модель предложена в [2] для решения этой задачи. В частности, в модели введена декартова система координат с началом в точке D. В этой системе вершины прямоугольника получают целочисленные координаты, а точке P назначены координаты в виде неизвестных величин *x* и *y*. В предложенной математической модели число неизвестных равно двум, что значительно меньше числа неизвестных в модели, предложенной в [1].

Для построения системы уравнений в [2] предложено использовать угловые коэффициенты прямых, на которых лежат отрезки DP, CP и BP. Поскольку угловые коэффициенты прямых являются тангенсами углов этих прямых с осью OX, то тангенсы заданных в задаче углов можно выразить через эти угловые коэффициенты. При этом достаточно использовать стандартную формулу для тангенса разности двух углов.

Для решения системы уравнений используется пакет Mathcad, причем для сокращения записей использована расчетная модель координатно-векторного типа, которая также предложена в [2]. В модели этого типа точки на координатной плоскости задаются как векторы, компонентами которых служат координаты точки. Формулы для вычисления расстояний и угловых коэффициентов прямых на плоскости задаются функциями этих векторов.

Рассмотрим решение данной задачи с использованием расчетной модели координатно-векторного типа в пакете Mathcad.

В рабочий документ Mathcad сначала надо ввести директиву для настройки индексации компонентов векторов, начиная с 1.

ORIGIN:=1

Затем для вершин прямоугольника вводятся векторные обозначения и записываются их координаты, вводится векторное обозначение для точки P с неизвестными координатами *x* и *y*, обозначаются величины заданных углов.

$$A:=\begin{pmatrix}0\\5\end{pmatrix}\ B:=\begin{pmatrix}15\\5\end{pmatrix}\ C:=\begin{pmatrix}15\\0\end{pmatrix}\ D:=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\ P:=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{ang1}:=150\quad \mathrm{ang2}:=45$$

Далее нужно ввести функции для вычисления:

– углового коэффициента прямой, проходящей через точки B и P:

$$k(B,P):=\frac{(P_2-B_2)}{P_1-B_1}$$

– расстояния между точками A и B:

$$d(A,P2)=14.205$$

Также, учитывая условия задачи, следует ввести функцию для вычисления тангенса некоторого угла *z* в градусах:

$$tg(z):=\tan\left(z\cdot\frac{\pi}{180}\right).$$

Осталось ввести функцию для вычисления тангенса ориентированного угла между двумя прямыми, реализующую формулу вычисления тангенса разности углов.

$$Tg(D,P,C):=\frac{k(C,P)-k(D,P)}{1+k(C,P)\cdot k(D,P)}$$

Напомним, что ориентированный угол между прямыми *a* и *b* – это угол, на который нужно повернуть прямую *a*, чтобы она стала параллельна прямой *b*. Ориентированный угол положителен, если поворот осуществляется против часовой стрелки, и отрицателен в противном случае. Во введенной функции DP – первая прямая, CP – вторая. Ориентированный угол между ними по условию задачи равен 150°.

Пусть прямая 3 – это прямая BP. Поменяв аргументы функции Tg(D, P, C), получаем функцию Tg(C, P, B), которая вычисляет тангенс ориентированного угла между прямыми 2 и 3.

В условии задачи ∠CPB, составляемый отрезками CP и BP, равен 45°. Этот угол также является ориентированным углом между прямыми 2 и 3.

Поэтому для составления второго уравнения модели надо функцию Tg(C, P, B) приравнять к значению функции tg(ang2).

Для нахождения решения системы уравнений в пакете Mathcad с помощью блока «Given-Find» надо задать начальное положение точки P.

$$P := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Далее записать блок, в котором векторное решение P хранит полученные численные координаты точки P.

Given

$$Tg(D,P,C) = tg(ang1)$$

$$Tg(D,P,C) = tg(ang2)$$

$$P := Find(P) = \begin{pmatrix} 9.01 \\ 1.933 \end{pmatrix}$$

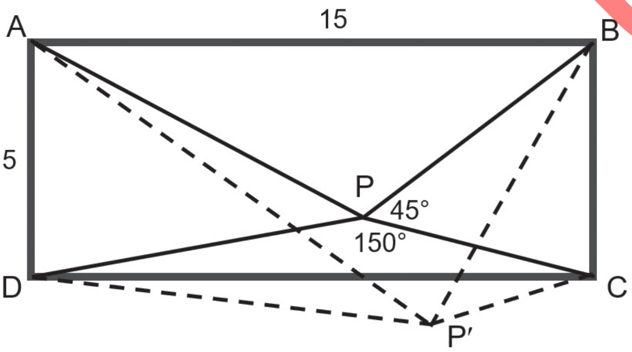
Осталось вычислить длину отрезка AP, используя введенное ранее выражение.

$$d(A,P) = 9.518$$

Достаточно короткое решение привело к известному результату.

В [1] кроме полученного решения обсуждается вопрос получения второго решения как результата обобщения условий задачи.

В частности, предложено решение, в котором точка P находится вне прямоугольника (обозначим ее P'), что на чертеже выглядит следующим образом.



Чтобы построить второе решение с помощью построенной расчетной модели, нужно поменять значение первого угла arg1 на 30°, так как это значение ориентированного угла прямыми DP' и CP'.

Как решение системы получается новое положение точки, которую в пакете Mathcad обозначим P2, и новая длина искомого отрезка.

$$P := Find(P) = \begin{pmatrix} 12.868 \\ -1.016 \end{pmatrix}$$

$$d(A.P2) = 14.205$$

Учитывая, что условие исходной задачи сформулировано в виде чертежа, на котором точка P находится внутри прямоугольника, второе решение удовлетворяет условию задачи не в полной мере. В связи с этим уточним формулировку исходной задачи.

Задача 1. В прямоугольнике ABCD AB = 15, BC = 5. Точка P находится внутри прямоугольника и ∠DPC = 150°, ∠CPB = 45°. Найти AP.

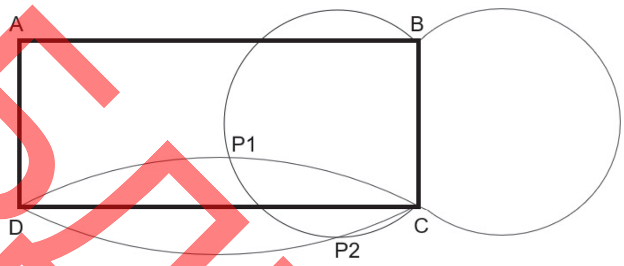
Эта задача допускает только одно первое решение. Приведем теперь формулировку задачи, которая допускает два решения.

Задача 2. В прямоугольнике ABCD AB = 15, BC = 5. Точка P такая, что ∠DPC = = 150°, ∠CPB = 45°. Найти AP.

В новой формулировке нет ограничений на положение точки P. Второе полученное решение стало ее корректным решением.

Покажем, что задача в формулировке 2 имеет только два решения.

Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок виден под данным углом, являются две дуги окружностей, проходящих через концы отрезка. Изобразив эти дуги для отрезков DC, BC и соответствующих им углов, найдем две точки, удовлетворяющие условию задачи.



Заметим, что угол между прямыми DP и CP равен 30°, а угол между прямыми CP и BP равен 45°. Это позволяет сформулировать еще одну задачу, которая обобщает две предыдущие.

Задача 3. В прямоугольнике ABCD AB = 15, BC = 5. Точка такая, что угол между прямыми DP и CP равен 30°, а угол между прямыми CP и BP равен 45°. Найти AP.

Понятно, что оба решения задачи 2 будут решениями и этой новой задачи.

Чтобы найти другие возможные решения задачи в формулировке 3, надо в построенной расчетной модели найти решения для всевозможных допустимых пар ориентированных углов между рассматриваемыми прямыми.

Возможно построение четырех таких пар, в которых первый угол принимает значения 30° и 150°, а второй угол 45° и 135°. Поскольку в расчетах используются тангенсы углов, известное равенство

$$tg(\alpha) = tg(\alpha - 180°)$$

позволяет вместо значения угла 150° взять значение –30°, а вместо значения угла 135° – значение –45°.

Если через i обозначить номер пары, то функции

$$ang1(i) = 30 \cdot (-1) \quad ang2(i) = 45 \cdot sign(2.5 - i)$$

своими значениями для каждого i = 1, 2, 3, 4 закроют весь диапазон пар значений углов.

Чтобы в пакете Mathcad найти все решения задачи 3, надо в рабочий документ пакета ниже предыдущих расчетов ввести приведенные выше функции расчета значений заданных углов. Начальные значения координат точки P в рабочем документе заданы еще выше.

Далее надо ввести новый блок «Given-Find», в котором копированием записать ту же систему уравнений, но со значениями углов, которые задаются созданными функциями от i, а решение системы обозначить как функцию P(i).

$$\begin{aligned}&\text{Given}\\&Tg(D,P,C) = tg(ang1(i))\\&Tg(C,P,B) = tg(ang2(i))\\&P(i) := Find(P)\end{aligned}$$

Чтобы получить конкретное решение, надо вывести значение функции P(i) для конкретного значения аргумента i. Например:

$$P(1) = \begin{pmatrix} 9.01 \\ 1.933 \end{pmatrix}$$

Небольшой цикл в пакете Mathcad позволяет получить все 4 решения задачи в одной матрице.

$$PP := \left| \begin{array}{l} \text{for } i \in 1..4 \\ \quad \left| \begin{array}{l} PP_{i,1} \leftarrow P(i)_1 \\ PP_{i,2} \leftarrow P(i)_2 \end{array} \right. \\ PP \end{array} \right.$$

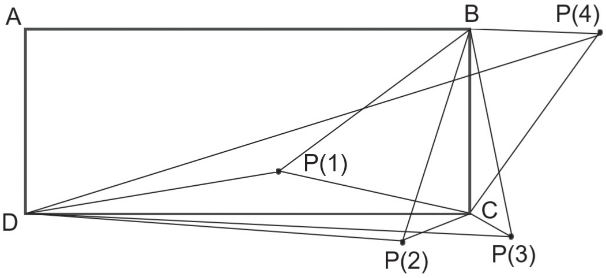
Матрица решений получит вид.

$$PP = \begin{pmatrix} 9.01 & 1.933 \\ 12.868 & -1.016 \\ 16.251 & -0.808 \\ 20.117 & 4.878 \end{pmatrix}$$

Здесь же можно вычислить длину отрезка AP для каждого положения точки P.

$$d(A,P(1)) = 9.518 \quad d(A,P(2)) = 14.205$$
$$d(A,P(3)) = 17.257 \quad d(A,P(4)) = 20.117$$

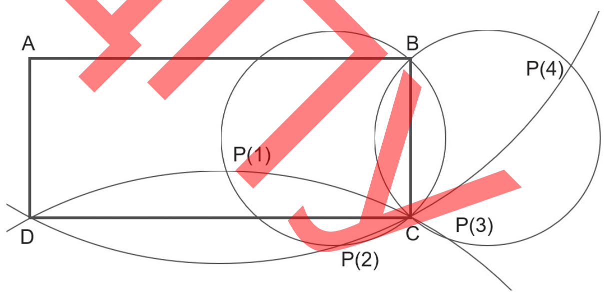
На рисунке приведены полученные положения точки P.



Покажем, что задача в формулировке 3 имеет только 4 решения.

Все дуги, построенные для нахождения числа решений задачи в формулировке 2, сохраняются. К ним должны добавиться две дуги для вершин углов 30°, опирающихся на сторону DC, и две дуги для вершин углов 135°, опирающихся на сторону BC.

Поскольку углы 30° и 150° дополняют друг друга до 180°, их рассматриваемые дуги дополняют друг друга до единой окружности. То же самое имеет место с дугами для углов 135° и 45°. Точка P как решение задачи 3 должна являться точкой пересечения двух больших окружностей с двумя малыми. Чертеж выглядит следующим образом.



Приведенные рассуждения позволяют для решения задачи в любой из трех формулировок использовать еще одну математическую модель, которая решение задачи сводит к поиску координат точек пересечения некоторых окружностей.

Для построения расчетной модели с помощью пакета Mathcad нужно сначала вычислить координаты центров четырех окружностей и их радиусы.

Для значений радиусов окружностей будем использовать переменные Rb и Rm, а для координат четырех центров – переменные Cbin, Cbout, Cmin, Cmout, имея в виду обозначения: b – большая, m – малая, in – в сторону прямоугольника, out – в сторону от прямоугольника.

Учитывая величины углов с вершиной в точке P, которые опираются на стороны DC и BC, для вычисления радиусов окружностей нужно записать следующие формулы:

$$Rb := \frac{d(D,C)}{2 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{30}{180}\right)} = 15$$

$$Rm := \frac{d(B,C)}{2 \cdot \sin\left(\pi \cdot \frac{45}{180}\right)} = 3.536$$

Для вычисления координат центра Cbin надо решить простую систему вида

$$Z := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Given

d(C,Z)=Rb

d(D,Z)=Rb

$$Cbin:=Find(Z)=\begin{pmatrix} 7.5 \\ 12.99 \end{pmatrix}$$

Значение Cbout очевидно, поскольку в значении Cbin оно меняет только знак второй компоненты.

Аналогично, для вычисления координат центра Cmin надо решить систему вида

$$Z := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Given

d(C,Z)=Rm

d(B,Z)=Rm

$$Cmin:=Find(Z)=\begin{pmatrix} 12.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Точка Cmout расположена симметрично точке Cmin относительно отрезка BC, и в значении Cmin увеличивает только первую компоненту на 5.

Для вычисления координат искомой точки P нужно составить и решить 4 системы уравнений, первая из которых

$$Z := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Given

d(Cbout,Z)=Rb

d(Cmin,Z)=Rm

$$P1:=Find(Z)=\begin{pmatrix} 9.01 \\ 1.933 \end{pmatrix}$$

Составить по аналогии и решить остальные системы не составит труда.

Полученные в статье результаты можно использовать на уроках информатики со старшеклассниками, изучающими информатику на повышенном уровне, а также на занятиях со студентами физико-математических факультетов, изучающими применение систем компьютерной математики.

Литература

1. *Очков, В. Ф.* Призрак колумбова решения, или Охота на волков / В. Ф. Очков]. – URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/STEM-Geometry.pdf. (дата обращения: 10.11.2024).
2. *Быкадоров, Ю. А.* Системы компьютерной математики на уроках информатики / Ю. А. Быкадоров, С. И. Зенько // Вестник МГИРО. – 2023. – № 3 (55). – С. 3–8.
3. Угол между прямыми // Онлайн школа Skysmart. – URL: https://skysmart.ru/articles/mathematic/ugol-mezhdu-pryamymi. (дата обращения: 10.11.2024).

References

1. *Ochkov, V. F.* Prizrak kolumbova resheniya, ili Ohota na volkov / V. F. Ochkov]. – URL: http://twt.mpei.ac.ru/ochkov/STEM-Geometry.pdf. (data obrashcheniya: 10.11.2024).
2. *Bykadorov, Yu. A.* Sistemy komp'yuternoj matematiki na urokah informatiki / Yu. A. Bykadorov, S. I. Zen'ko // Vestnik MGIRO. – 2023. – № 3 (55). – S. 3–8.
3. Ugol mezhdu pryamymi // Onlajn shkola Skysmart. – URL: https://skysmart.ru/articles/mathematic/ugol-mezhdu-pryamymi. (data obrashcheniya: 10.11.2024).