Весці БДПУ. Серыя 3. 2024. № 4. С. 30–34

УДК 378.016:512.6

МЕТОДИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ФОРМИРОВАНИЯ НАВЫКОВ ДОКАЗАТЕЛЬНЫХ РАССУЖДЕНИЙ НА НАЧАЛЬНОМ ЭТАПЕ ИЗУЧЕНИЯ ВЫСШЕЙ АЛГЕБРЫ

О. А. Баркович,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-1971-5440

Поступила в редакцию 18.11.2024.

UDC 378.016:512.6

METHODICAL FEATURES OF THE SKILLS FORMATION FOR EVIDENCE-BASED REASONING AT THE INITIAL STAGE OF HIGHER ALGEBRA STUDYING

O. Barkovich,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Mathematics and Methods teaching mathematics at the Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-1971-5440

Received on 18.11.2024.

В статье рассмотрены методические особенности формирования навыков доказательных рассуждений на начальном этапе изучения высшей алгебры в рамках новых учебных планов Республики Беларусь. Представлены различные типы доказательных рассуждений: простое воспроизведение, обобщенное воспроизведение, логический поиск с элементами эвристики. Для каждого из типов приведены соответствующие примеры по теме «Арифметика целых чисел». На примере числовых множеств продемонстрирована возможность построения единой доказательной базы на основе элементарных утверждений (свойств) теории групп, колец и полей. Приведен пример развернутого задания с методическими комментариями по теме «Арифметика целых чисел», на основе которого преподавателем может быть организован поиск доказательных утверждений. Рассмотрен ряд заданий по темам «Арифметика целых чисел» и «Группы, кольца, поля», при выполнении которых формируются и корректируются навыки доказательных рассуждений. Акцент на ключевых моментах в доказательстве теорем, их идеях позволяет более эффективно осуществлять реализацию образовательной программы по высшей алгебре и усилить мотивацию студентов к ее изучению.

Ключевые слова: высшая алгебра, доказательное рассуждение, теорема, лекция, практическое занятие, целостный подход, математическая логика, эвристические задания.

The article discusses the methodological features of the formation of skills of evidence-based reasoning at the initial stage of studying higher algebra within the framework of the new curricula of the Republic of Belarus. Various types of evidential reasoning are presented: simple reproduction, generalized reproduction, logical search with heuristic elements. For each of the types, corresponding examples are given on the topic «Arithmetic of integers.» The example of number sets demonstrates the possibility of building a single evidence base based on elementary statements (properties) of the theory of groups, rings and fields. An example of a detailed task with methodological comments on the topic «Arithmetic of integers» is given, on the basis of which the teacher can organize a search for evidence. A number of tasks on the topics «Arithmetic of integers» and «Groups, rings, fields» are considered, during the performance of which the skills of evidence reasoning are formed and adjusted. The emphasis on key points in proving theorems, their ideas makes it possible to more effectively implement the educational program in higher algebra and increase the motivation of students to study it.

Keywords: higher algebra, proof reasoning, theorem, lecture, practical lesson, holistic approach, mathematical logic, heuristic tasks.

Введение. Согласно новому образовательному стандарту и учебному плану по специальности 6-05-0113-04 «Физико-математическое образование (информатика; математика и информатика; математика и физика)», утвержденному в 2023 году, учебная дисциплина «Высшая алгебра» входит в модуль «Высшая математика – 1», цикл специальных дисциплин государственного компонента, и изучается на первом курсе педагогического университета.

В процессе изучения высшей алгебры студентами физико-математического факультета предполагается развитие логического мышления и формирование навыков изложения доказательств алгебраических утверждений (теорем, свойств, формул, признаков).

Методические аспекты формирования у студентов умения доказывать теоремы при изучении алгебры были изложены в статье автора [1] в 2019 году. В то время абстрактную учебную дисциплину «Алгебра» (так она тогда называлась) в педагогическом университете преподавали на втором курсе, после изучения математической логики, аналитической геометрии, математического анализа и элементарной математики, которые служили источником содержательных примеров алгебраических структур и образцов доказательств теорем.

Отсутствие в школе систематической практики решения задач на доказательство, умения выделять, что дано и что нужно получить как результат цепочки рассуждений, определять взаимосвязи между суждениями создают трудности на начальных этапах изучения учебных дисциплин математического цикла в педагогическом университете.

Кроме того, высшая алгебра, аналитическая геометрия и математический анализ одновременно изучаются на первом курсе. Как вариант на будущее, в первом семестре достаточно было бы двух дисциплин математического цикла: «Практикум по решению задач элементарной математики» и «Введение в высшую математику», с элементами математической логики, теории множеств и теории доказательств.

Все вышесказанное подтверждает актуальность разработки методического обеспечения для формирования навыков доказательных рассуждений в первом семестре в рамках учебных дисциплин математического цикла. В учебно-методической литературе, как правило, особенности формирования навыков доказательных рассуждений рассматриваются на примере школьной геометрии. В данной статье в качестве иллюстративной базы для исследования выступают начальные главы высшей алгебры.

Основная часть. Согласно новым учебным планам, часов на изучение теоретического материала на лекциях по алгебре стало в два раза меньше по сравнению с предыдущими планами. Учитывая сложившуюся ситуацию, для реализации целостного подхода [2; 3], обеспечивающего глубокое и всестороннее изучение и понимание учебной дисциплины «Высшая алгебра» в рамках существующей учебной программы, в первом семестре необходимо:

– во-первых, доказывать основные алгебраические теоремы очень тщательно, последовательно отображая логику рассуждений, обосновывая на каждом шаге возможность перехода от одного утверждения к другому;
– во-вторых, выявлять аналогии и общие схемы в доказательствах теорем, обнаруживать взаимосвязи и параллели между различными алгебраическими структурами и их свойствами;
– в-третьих, использовать и развивать при решении задач на доказательство не только математическую логику, но и интуицию, ассоциативное мышление.

Специальные серии заданий, способствующие развитию математической интуиции во время проведения факультативных занятий по математике с учащимися, представлены в пособии [4]: задачи и устные упражнения на делимость целых чисел, тождественные преобразования алгебраических выражений, предугадывание направления поиска в решении задачи, нахождение и использование аналогий, закономерностей. Их целесообразно использовать на первых практических занятиях по высшей алгебре для коррекции и развития навыков доказательных рассуждений.

В статье [5] проанализированы возможности применения технологии работы с ментальными картами, основанной на когнитивно-визуальном подходе к формированию компетенций. Ментальные карты можно также использовать для схематического отображения укрупненных блоков информации, ключевых этапов доказательства алгебраических утверждений.

В целях систематизации полученных навыков со студентами в процессе эвристической беседы каждый раз необходимо акцентировать внимание на: 1) типе доказанного утверждения (теорема, свойство, следствие, формула, критерий, необходимое и достаточное условие); 2) методе проведения доказательства (метод математической индукции, конструктивное доказательство, доказательство от противного); 3) основных идеях и этапах доказательства; 4) согласовании изучаемого материала с абстрактными свойствами алгебраических структур (групп, колец, полей).

В процессе изучения высшей алгебры необходимо обращать внимание на доказательства, выполняемые по одной схеме. Например, доказательства теорем о делении с остатком для целых чисел и для многочленов от одной переменной похожи по своей сути, проводятся по одной схеме. В доказательствах этих теорем присутствуют два этапа: доказательство существования и доказательство единственности. Поэтому при доказательстве теоремы о делении с остатком для многочленов после подробного рассмотрения доказательства теоремы о делении с остатком для целых чисел похожие цепочки рассуждений можно оставить студентам в качестве упражнения. Обратить внимание на лекции нужно лишь на то, что целые числа можно сравнивать между собой по модулю, а для сравнения многочленов в доказательстве теоремы выступает такая мера, как «степень многочлена». Все остальные цепочки рассуждений в доказательстве теоремы аналогичны.

Основным направлением, организующим изучение высшей алгебры в первом семестре, являются алгебраические структуры (группы, кольца, поля). Они позволяют увидеть, что многие свойства целых чисел, комплексных чисел, многочленов от одной переменной аналогичны (если отвлечься от их формализованной символической записи) и их доказательства тоже аналогичны. Это свойства коммутативности, ассоциативности введенных на них операций сложения и умножения, существование нейтральных и симметричных элементов, их однозначная определенность.

В единое целое объединить учебный материал раздела «Введение в высшую алгебру» позволяет заключительная тема «Группы, кольца, поля». При ее изучении мы уже не доказываем и не проверяем условия, при которых множество становится группой, кольцом или полем относительно заданных операций, а делаем выводы, подводим итоги на основе уже доказанных ранее утверждений не только в курсе высшей алгебры, но и математического анализа, аналитической геометрии.

Действительно, множество комплексных чисел является полем, а множество корней степени n из единицы образует мультипликативную группу, множество функций действительных переменных является кольцом, векторное произведение является бинарной алгебраической операцией на множестве геометрических векторов в пространстве.

При рассмотрении темы «Группы, кольца, поля» мы также разбираем примеры других алгебраических структур, проводим соответствующие доказательства, актуализирующие и закрепляющие навыки проведения доказательных рассуждений.

Следуя статье [6, с. 431], под доказательными рассуждениями мы понимаем такие, в которых «основаниями перехода от одних суждений к другим являются теоретические предложения (аксиомы, теоремы, определения некоторой математической теории)».

В психолого-педагогической литературе выделяют репродуктивный и продуктивный уровни проведения доказательных рассуждений. К первому уровню относятся простые и обобщенные воспроизведения доказательств. Важно распознать, к какому типу задач с известной схемой рассуждений относится данная задача на доказательство.

Фактически, необходимо выделить общее в условиях, требованиях и методах доказательств (в этом случае часто говорят «доказательство аналогично» и оставляют его студентам в качестве упражнения). Например, мы доказываем по одной и той же схеме свойство делимости суммы двух целых чисел и свойство делимости разности двух целых чисел.

Показателем продуктивного уровня проведения доказательных рассуждений является их логический и логико-эвристический поиск. В первом случае решение задачи отыскивается «на основе выполнения действий выведения следствий и отыскания достаточных условий» [6, с. 431].

Например, наибольший общий делитель двух целых чисел получается в результате последовательного применения теоремы о делении с остатком. И важно уметь обосновать, что именно последний ненулевой остаток при последовательных делениях с остатком будет совпадать с наибольшим общим делителем двух исходных чисел.

В процессе логико-эвристического поиска «выполнение действий выведения следствий или отыскания достаточных условий связано с применением различного рода эвристик» [6, с. 431], которые детально описаны в книге [7]. В пособии [8] освещены вопросы критериев оценивания, форм и методов обучения на занятиях эвристического типа.

Эвристические задания не имеют однозначных ответов, в них предусмотрена возможность совершать собственные открытия, что позволяет строить обучение не на получении и усвоении готовой информации, а на формировании уникальной образовательной траектории в рамках существующей программы по учебной дисциплине.

В первом семестре в рамках учебной дисциплины «Высшая алгебра» необходимо сформировать навыки проводить доказательные рассуждения на уровне простых и обобщенных воспроизведений доказательств, а также на уровне логического поиска. Применение различного рода эвристик можно рассматривать как повышенный уровень изучения учебной дисциплины «Высшая алгебра».

Задания, направленные на получение самостоятельных «открытий» в процессе изучения высшей алгебры, могут быть предложены в качестве индивидуальных домашних заданий повышенного уровня, служить основой для подготовки к участию в университетских олимпиадах.

В пособии [9], содержащем дидактические материалы для проведения факультативных занятий для учащихся «Угадай и докажи» и сборнике заданий [10] для студентов педагогических университетов по специальности «Математика» представлены специально разработанные серии эвристических заданий по алгебре, способствующих развитию математической интуиции.

От традиционных сборников задач по высшей алгебре книга [10] отличается тем, что задания, которые предлагаются студентам, сформулированы в виде развертывающейся цепочки взаимосвязанных постепенно усложняющихся задач. Их последовательное и систематическое выполнение способствует формированию навыков доказательных рассуждений у студентов, будущих учителей математики.

Некоторые задания в сборнике снабжены указаниями к решению, что может оказаться полезным при самостоятельной работе над книгой под руководством опытного преподавателя.

Приведем пример развернутого задания по теме «Арифметика целых чисел», на основе которого преподавателем может быть организована работа по формированию у студентов навыков проведения доказательных утверждений на первом же практическом занятии по высшей алгебре.

Задание. Какие из следующих утверждений верны, а какие нет? Ответ обоснуйте: а) если сумма двух слагаемых не делится на 10, то хотя бы одно из них не делится на 10; б) если сумма двух слагаемых не делится на 10, то каждое слагаемое не делится на 10; в) если каждое из двух слагаемых не делится на 10, то их сумма не делится на 10; г) если одно слагаемое делится на 10, а другое не делится на 10, то их сумма не делится на 10; д) если произведение двух сомножителей делится на 10, то один из сомножителей делится на 10; е) если произведение нескольких сомножителей делится на 10, то один из сомножителей делится на 10.

Комментарии. Это задание рассматривается на первом практическом занятии по высшей алгебре. Оно выполняется под непосредственным руководством преподавателя. Для обоснования истинности или ложности каждого из утверждений достаточен минимальный по объему теоретический материал: достаточно знать лишь определение делимости целых чисел и разобрать доказательство свойства о делимости суммы и произведения двух целых чисел в качестве примера для подражания.

При выполнении этого задания, во-первых, необходимо четко зафиксировать, что дано и что требуется проверить, обосновать, доказать. Желательно схематично, в символическом виде отобразить это на доске в процессе эвристической беседы со студентами.

Во-вторых, следует актуализировать и отобразить на доске, используя принятые в высшей алгебре и математической логике символы, необходимую для решения задачи теорию, изобразить схематично, в сжатом виде.

На следующем, третьем этапе выдвигаются гипотезы и выполняются переходы (они отображаются стрелками на доске) от одних известных суждений (определение делимости, свойства делимости) к другим. Возможность этих переходов обосновывается. Если утверждение не является истинным, приводятся контрпримеры.

Данное задание выполняется на основе уже известной схемы рассуждений, используемой в доказательстве свойств делимости, и предполагает нахождение, выявление следствий, возможных переходов от одних суждений к другим. Некоторые пункты задания могут быть рассмотрены в аудитории, а некоторые сформулированы в качестве домашнего задания.

Укажем еще ряд заданий по теме «Арифметика целых чисел», при выполнении которых корректируются, вырабатываются и формируются навыки доказательных рассуждений.

Задание 1. Могут ли два различных четных числа быть взаимно простыми? Ответ обоснуйте.

Задание 2. Вы пишете подряд все цифры от 1 до 9 включительно, а затем от 9 до 1. Будет ли полученное число делиться на 9? Ответ обоснуйте.

Задание 3. Какой остаток дает число 98765432123456789: а) при делении на 4; б) при делении на 8; в) при делении на 9? Ответ обоснуйте.

На начальном этапе изучения высшей алгебры обоснованием переходов в цепочке рассуждений, как правило, являются определения, ранее доказанные теоремы и свойства.

При изучении алгебраических структур (групп, колец, полей) в конце первого семестра задачи на доказательство усложняются.

1. Является ли множество

$$M = \{2^n \mid n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$$

группой: а) относительно сложения; б) относительно умножения? Ответ обоснуйте.

2. Является ли группой множество симметрий правильного *n*-угольника? Ответ обоснуйте. Приведите примеры.

3. Какие из числовых множеств являются кольцами, а какие – полями:

а) $\mathbb{Z}$;

б) $2\mathbb{Z}$;

в) $\mathbb{Q}$;

г) $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$;

д) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$?

Ответ обоснуйте.

Заключение. Как показывает наш опыт преподавания в педагогическом университете, умение доказательно рассуждать следует формировать у студентов систематически и целенаправленно, привлекая для этого: 1) вдумчивое осознанное изучение образцов доказательств; 2) схематическое отображение этапов доказательств; 3) элементы технологии ментальных карт; 4) интерактивно-эвристические методы обучения; 5) системы взаимосвязанных учебно-исследовательских задач. При изложении доказательства алгебраических теорем на лекциях целесообразно: 1) выделять и обосновывать переходы от одних рассуждений к другим; 2) использовать в процессе оформления доказательства на доске элементы технологии ментальных карт; 3) выделять наиболее эффективные методы доказательства одного и того же утверждения.

В статье проведен анализ проблем, возникающих при доказательстве теорем и решении задач на доказательство на начальном этапе изучения высшей алгебры в педагогическом университете, предложены пути их решения посредством представления доказательной базы в виде единого целого.

Литература

1. *Баркович, О. А.* Методические аспекты формирования у студентов умения доказывать теоремы в процессе изучения алгебры / О. А. Баркович // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2019. – № 2. – С. 45–50.
2. *Сотникова, О. А.* Целостность вузовского курса алгебры как методологическая основа его понимания : моногр. / О. А. Сотникова. – Архангельск : Поморский университет, 2004. – 356 с.
3. *Баркович, О. А.* О реализации целостного подхода в процессе обучения высшей алгебре / О. А. Баркович // Весці БДПУ. Серыя 3. – 2024. – № 2. – С. 33–37.
4. *Пучковская, Т. О.* Математика. 9 класс. Угадай и докажи : пособие для учителей учреждений общ. сред. образования с белорус. и рус. яз. обучения / Т. О. Пучковская. – Минск : Аверсэв, 2012. – 80 с.
5. *Баркович, О. А.* Использование ментальных карт в работе со студентами первого курса / О. А. Баркович // Непрерывное педагогическое образование: национальная специфика и международный контекст : сб. науч. ст. / Белорус. гос. пед. ун-т ; редкол.: А. И. Жук (науч. ред.) [и др.]. – Минск: БГПУ 2024. – С. 18–23.
6. *Далингер, В. А.* Методические аспекты формирования у учащихся умения производить доказательные рассуждения и делать выводы / В. А. Далингер // Международный журнал экспериментального образования. – 2015. – № 8 (часть 3). – С. 431–433.
7. *Балк, М. Б.* Поиск решения / М. Б. Балк, Г. Д. Балк. – М. : Дет. лит., 1983. – 143 с.
8. *Король, А. Д.* Технология эвристического обучения в высшей школе : теория и практика : методическое пособие / А. Д. Король. – Минск : Вышэйшая школа, 2020. –189 с.
9. *Пучковская, Т. О.* Математика. 9 класс. Угадай и докажи : рабочая тетрадь : пособие для учащихся общеобразоват. учреждений с белорус. и рус. яз. обучения / Т. О. Пучковская. – Минск : Аверсэв, 2012. – 126 с.
10. *Крючкова, В. Н.* Сборник заданий по алгебре / В. Н. Крючкова, Н. И. Крючков. – М. : изд-во «Academia», 2007. – 192 с.

References

1. *Barkovich, O. A.* Metodicheskie aspekty formirovaniya u studentov umeniya dokazyvat' teoremy v processe izucheniya algebry / O. A. Barkovich // Vesci BDPU. Seryya 3. – 2019. – № 2. – S. 45–50.
2. *Sotnikova, O. A.* Celostnost' vuzovskogo kursa algebry kak metodologicheskaya osnova ego ponimaniya : monogr. / O. A. Sotnikova. – Arhangel'sk : Pomorskij universitet, 2004. – 356 s.
3. *Barkovich, O. A.* O realizacii celostnogo podhoda v processe obucheniya vysshej algebre / O. A. Barkovich // Vesci BDPU. Seryya 3. – 2024. – № 2. – S. 33–37.
4. *Puchkovskaya, T. O.* Matematika. 9 klass. Ugadaj i dokazhi : posobie dlya uchitelej uchrezhdenij obshch. sred. obrazovaniya s belorus. i rus. yaz. obucheniya / T. O. Puchkovskaya. – Minsk : Aversev, 2012. – 80 s.
5. *Barkovich, O. A.* Ispol'zovanie mental'nyh kart v rabote so studentami pervogo kursa / O. A. Barkovich // Nepreryvnoe pedagogicheskoe obrazovanie: nacional'naya specifika i mezhdunarodnyj kontekst : sb. nauch. st. / Belorus. gos. ped. un-t ; redkol.: A. I. Zhuk (nauch. red.) [i dr.]. – Minsk: bgpu 2024. – S. 18–23.
6. *Dalinger, V. A.* Metodicheskie aspekty formirovaniya u uchashchihsya umeniya proizvodit' dokazatel'nye rassuzhdeniya i delat' vyvody / V. A. Dalinger // Mezhdunarodnyj zhurnal eksperimental'nogo obrazovaniya. – 2015. – № 8 (chast' 3). – S. 431–433.
7. *Balk, M. B.* Poisk resheniya / M. B. Balk, G. D. Balk.– M. : Det. lit., 1983. – 143 s.
8. *Korol', A. D.* Tekhnologiya evristicheskogo obucheniya v vysshej shkole : teoriya i praktika : metodicheskoe posobie / A. D. Korol'. – Minsk : Vyshejshaya shkola, 2020. –189 s.
9. *Puchkovskaya, T. O.* Matematika. 9 klass. Ugadaj i dokazhi : rabochaya tetrad' : posobie dlya uchashchihsya obshcheobrazovat. uchrezhdenij s belorus. i rus. yaz. obucheniya / T. O. Puchkovskaya. – Minsk : Aversev, 2012. – 126 s.
10. *Kryuchkova, V. N.* Sbornik zadanij po algebre / V. N. Kryuchkova, N. I. Kryuchkov. – M. : izd-vo «Academia», 2007. – 192 s.