Лаврёнов А.Н., к.ф.-м.н., доцент кафедры информационных технологий в образовании
УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка»

Векторное описание вращения
Vector rotation description

Аннотация: В статье рассматривается описание вращений при применении вектор-параметров.

Ключевые слова: вектор-параметр;*N*-мерное пространство; вращение

Abstract: The description of rotations when using vector parameters is discussed.

Keywords: vector parameter; *N*-dimensional space; rotation

Хотя существуют различные особенности в понимании и формулировках термина «вектор», но в данной работе будет принято за основу то его свойство, которое позволяет описать единым образом класс однородных объектов и сделать такое описание инвариантным способом, без фиксации определенного выбранного базиса. С другой стороны, хорошо известно, что с точки зрения физики любое движения тела в нашем реальном трехмерном пространстве можно разложить на два – поступательное и вращательное. Последний вид движения особенно просто и наглядно наблюдать, а также описывать в математической форме на плоскости. Здесь вращение представляет собой линейное изменение базиса вокруг выделенной точки, которая определяется пересечением оси вращения с выделенной плоскостью. В трёхмерном пространстве ситуация существенно изменяется, так как возникает потребность рассматривать несколько осей вращения при описании углами Эйлера в вышеупомянутом подходе. С точки зрения теории групп вращение можно описать матрицей, оставляющей инвариантной длину вектора. Переход от нее к вектору с помощью дуального преобразования осуществим просто только в пространстве с размерностью три. В [1]данный факт был использован для введения вектор-параметров, которые позволили компактно и инвариантным образом описать трехмерную группу вращения. Впоследствии было установлена эквивалентность данного подхода с описанием при помощи кватернионов. Цель данной работы заключается в попытке осуществить в некоторой степени обобщение подхода [1] для многомерного случая, анализируя возможность и условия ввода векторного описания в этом случае.

Таким образом, начнем описание вращений в n-мерном пространстве с напоминания, что собственную ортогональную матрицу O $(n=2k+1)$-мерного порядка можно представить или в виде полинома от антисимметричной матрицы A не выше $(n-1=2k)$-й степени

$$O = b_1A^{n-1} + b_2A^{n-2} + \cdots + b_{n-1}A^1 + b_n \equiv$$
$$= b_1A^{2k} + b_2A^{2k-1} + \cdots + b_mA^{2k+1-m} + \cdots + b_{2k}A^1 + b_{2k+1} \qquad (1)$$

или в виде отношения

$$O = \frac{1+A}{1-A}. \qquad (2)$$

Согласно теореме Гамильтона-Кэли имеет место матричное равенство

$$A^{2k+1} - a_1 A^{2k} + \cdots + (-1)^m a_m A^{2k+1-m} + \cdots + a_{2k}A - a_{2k+1} = 0, \quad (3)$$

где инвариантные коэффициенты a_k могут быть получены из рекуррентных соотношений Ньютона

$$ka_k = \ a_{k-1}A_t + \cdots + (-1)^{l-1} a_{k-l}(A^l)_t + \cdots + (-1)^k a_1 (A^{k-1})_t + \\ +(-1)^{k-1}(A^k)_t \qquad (4)$$

Из свойств антисимметричности матрицы A и формулы (4) следуют следующие тождества:

$$(A^{2m+1})_t \equiv (A)_t = (A^3)_t = (A^5)_t = \cdots = 0;$$
$$a_1 = A_t = a_3 = a_5 = a_7 = a_{2m+1} \equiv 0; \quad 2a_2 \equiv -(A^2)_t; \qquad (5)$$
$$4a_4 \equiv -a_2(A^2)_t - (A^4)_t; \qquad 6a_6 \equiv -a_4(A^2)_t - a_2(A^4)_t - (A^6)_t$$
$$2ma_{2m} = -a_{2m-2}(A^2)_t - \cdots - a_{2m-2n}(A^{2n})_t - \cdots - a_2(A^{2m-2})_t - (A^{2m})_t$$

Другими словами, вместо формулы (3) получим

$$A^{2k+1} + a_2 A^{2k-1} + \cdots + a_{2m} A^{2k+1-2m} + \cdots + a_{2k} A = 0, \quad (6)$$

что позволяет переписать (1) с учетом (2) и (6) следующим образом:

$$O = 1 + \frac{2}{1 + \sum_{n=1}^{n=k} a_{2n}} \sum_{l=1}^{l=k} \left(1 + \sum_{n=1}^{n=l-1} a_{2n}\right)(A^{2+2k-2l} + A^{1+2k-2l})$$

или (7)

$$O = 1 + \sum_{l=1}^{l=k} \frac{2\left(1 + \sum_{n=1}^{n=l-1} a_{2n}\right)}{1 + \sum_{n=1}^{n=l} a_{2n}}) A^{2k-2l}(A + A^2)$$

Таким образом, в общем случае собственная ортогональная матрица вращения O представляется в виде полинома от антисимметричной матрицы A с явной структурной градацией, где крайний правый сомножитель в формуле (7) отвечает трехмерного случаю. В сравнении с ним знаменатель дроби в данной формуле также имеет дополнительные слагаемые.

Согласно [1] для произведения двух символов Леви-Чивита справедлива формула при любых значениях индексов

$$\varepsilon_{abc}\varepsilon_{a'b'c'} = \begin{vmatrix} \delta_{aa'} & \delta_{ab'} & \delta_{ac'} \\ \delta_{ba'} & \delta_{bb'} & \delta_{bc'} \\ \delta_{ca'} & \delta_{cb'} & \delta_{cc'} \end{vmatrix}, \qquad (8)$$

что даёт возможность ввести вместо матрицы A дуальный ей вектор $\vec{\boldsymbol{c}} \equiv (c_a)$

$$A_{ab} = \varepsilon_{abd} c_c; \qquad c_a = \frac{1}{(n-2)(n-1)} \varepsilon_{abc} A_{bc} \qquad (9)$$

на расширенном диапазоне изменения индексов (от 1 до n), но число компонент которого явно меньше общего количества независимых параметров вращения. Однако, для дальнейшего упрощенного анализа пока будем работать только с одним данным вектором $\vec{\boldsymbol{c}}$, представляя его как некую огибающую поверхность в полном пространстве параметров, которая выделяет определенный его обьём.

Учитывая формулу (8), выразим все степени антисимметричной матрицы A через вектор-параметры:

$$(A^2)_{ac} \equiv \ A_{ab}A_{bc} = (n-2)(\delta_{ac}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2 - c_a c_c);$$

$$
\begin{gathered}
(A^3)_{ac} \equiv (A^2)_{ab}(A)_{bc} = (n-2)\varepsilon_{acd}c_d\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2 \\
(A^4)_{ac} \equiv (A^2)_{ab}(A^2)_{bc} = (n-2)^2\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2(\delta_{ac}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2 - c_a c_c) \qquad (9) \\
(A^5)_{ac} \equiv (A^2)_{ab}(A^3)_{bc} = (n-2)^2\varepsilon_{acd}c_d\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^4 \\
(A^6)_{ac} \equiv (A^3)_{ab}(A^3)_{bc} = (n-2)^2\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^4(\delta_{ac}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2 - c_a c_c)\ и\ т.д.,
\end{gathered}
$$

где введено обозначение для квадрата длины вектора $\vec{\boldsymbol{c}}$: $\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2 = \vec{\boldsymbol{c}} * \vec{\boldsymbol{c}}$.

Таким образом, собственная ортогональная матрица вращения O в общем случае может быть представлена через вектор-параметр вращения $\vec{\boldsymbol{c}}$ следующим образом с учетом вышеприведенных формул:

$$O = 1 + f(a_{2l}; \|\vec{\boldsymbol{c}}\|)(-\varepsilon_{acd}c_d + c_a c_c - \delta_{ac}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2), (10)$$

где функция $f(a_{2l}; \|\vec{\boldsymbol{c}}\|)$ имеет фиксированный вид.

Другими словами, в простейшем случае с одним дуальным вектор-параметром вращения $\vec{\boldsymbol{c}}$имеем аналог трехмерногомира с нелинейной зависимостью от длины данного вектора. Возникает интересный вопрос – сколько и как можно или надо вводить остальные вектор-параметры вращения в общем случае?

Первая часть вопроса достаточна проста – общее количество параметров вращения в (*n=2k+1)*-мерном пространстве есть *n(n-1)/2*или *nk*, т.е. нужно ещё *(k-1)* таких вектор-параметром вращения помимо рассмотренного ранее $\vec{\boldsymbol{c}}$.

Перед ответом на вторую часть вопроса, обсудим возможные варианты и условия для них. Выше было наглядно показано, что для сохранения функционального аналога трехмерного случая необходимо иметь в определении оставшихся вектор-параметров вращения подобие символа Леви-Чивитаε_{abc}. С другой стороны, надо найти определенный принцип для разделения всего параметрического пространства на *k*подпространств, если выбирать для описания вращения *n*-мерные вектор-параметры.

Одна из идей такого принципа заключается в использовании нелинейного преобразования для исходной антисимметричной матрицы *A*. Это означает, все необходимые дуальные вектора$\vec{\boldsymbol{a}}, \vec{\boldsymbol{b}}, \vec{\boldsymbol{c}}$ ... вводятся согласно следующей формуле

$$
\begin{gathered}
a_a \sim \varepsilon_{abc}A_{bc}, \\
b_a \sim \varepsilon_{abcde}A_{bc}A_{de} \qquad (11) \\
c_a \sim \varepsilon_{abcdefg}A_{bc}A_{de}A_{fg}\ \text{и т.д.}
\end{gathered}
$$

Другим вариантом принципа для разделения всего параметрического пространства на *k*подпространств, который кажется более привлекательным из-за линейной связи между матрицей *A* идуальных ей векторов$\vec{\boldsymbol{c}} \equiv (c_a)$, можно сделать градацию, например, по сумме индексов по модулю *k*.Чтобы было легче проводить анализ и уточнить написанное, далее будем обсуждать пятимерный мир как ближайшего соседа нашему трехмерному пространству среди нечетномерных. В этом случае имеем десятимерное параметрическое пространство, которое должно быть разделено на два пятимерных вектора. Каждый такой вектор выберем по вышеприведенной формуле (9), но с разделением по множеству комбинаций индексов в соответствии принципом четности или нечетности суммы индексов в символе Леви-Чивита: {123;125;134;145;235} и {124;135;234;245;345}.

Таким образом, в работе обсуждены определенные направления исследований для описания вращения при помощи вектор-параметров. Более подробный анализ этих возможностей будут составлять цель последующих публикаций автора.

Список литературы

1. Фёдоров, Ф.И. О.Б. Группа Лоренца / Ф.И. Фёдоров. – М : Изд-во: Наука, 1979. – 384 с.