Весці БДПУ. Серыя 3. 2021. № 4. С. 11–16

УДК 530:[1], 514:[84], 539:[182]

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР НА ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОСТОЯННОЙ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ

А. Н. Лаврёнов,
кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информационных технологий в образовании Белорусского государственного педагогического университета имени Максима Танка;

И. А. Лаврёнов,
ООО «Октонион технолоджи»

Поступила в редакцию 04.10.21.

UDC 530:[1], 514:[84], 539:[182]

HARMONIC OSCILLATOR IN ONE-DIMENSIONAL SPACE OF CONSTANT POSITIVE CURVATURE

A. Lavrenov,
PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Informational Technologies in Education, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank;

I. Lavrenov,
"Octonion Technology Ltd"

Received on 04.10.21.

В статье рассмотрена квантово-механическая задача о гармоническом осцилляторе на окружности как одномерном пространстве постоянной положительной кривизны. Дано обобщение на модели сингулярного и Данкля осцилляторов. Показана в явном виде динамическая симметрия проблемы, которая реализуется в виде квадратичной алгебры Хана *QH(3)* или изоморфной ей алгебры Хиггса.

Ключевые слова: сингулярный осциллятор, осциллятор Данкля, пространство постоянной положительной кривизны, окружность, алгебра Хана, алгебра Хиггса.

The article considers a quantum-mechanic problem about harmonic oscillator on a circle as one-dimensional space of constant positive curvature. It gives the generalization on the model of singular and Dankl's oscillators. It shows the dynamic symmetry of the problem in its clear view which is realized as quadratic algebra of Khan *QH(3)* or algebra of Higgs isomorphic to it.

Keywords: singular oscillator, oscillator of Dankl, space of constant positive curvature, circle, algebra of Khan, algebra of Higgs.

Введение. В последнее время эффективным инструментом получения ряда многомерных точно-решаемых задач стал метод, основанный на их представлении в виде результата *N*-кратного сложения конкретной реализации алгебры *SU(1,1)* [1]. В частности, таким образом оказалось, что для описания определенных аналитических или суперинтегрированных моделей в пространстве положительной постоянной кривизны (сферы) S_{N-1} достаточно рассмотреть сложение *N* исходных одномерных гамильтонианов всеобъемлющего пространства, имеющих симметрию алгебры *SU(1,1)*. Однако известная автору библиография показывает, что самый простейший одномерный случай в явном виде и в данном аспекте рассмотрен не был. Поэтому в данной работе исследуются различные аспекты динамической симметрии гармонического осциллятора (ГО) на окружности как одномерном пространстве постоянной положительной кривизны при различных обобщениях – на модель сингулярного осциллятора (СО) и на модель осциллятора Данкля (ДО). Для полноты библиографического описания текущей ситуации анализируемой проблемы отметим только работы [2] и [3], где на S_1 для ГО задача в явном виде решена аналитическим способом и с помощью метода факторизации соответственно. С другой стороны, представленную работу можно также считать дальнейшим, но нерелятивистским продолжением работы [4] с обобщением на другую топологию пространства и учета отражательных симметрий.

Основная часть.

1. Модели ГО и СО. Как известно, в нерелятивистской квантовой механике при добавлении к гамильтониану свободного движения $H_0 = \frac{p^2}{2}$ параболической потенциальной ямы $V_1(x) = \frac{\omega^2 x^2}{2}$ получают гамильтониан линейного ГО H_1:

$$H_1 = H_0 + V_1(x) \equiv -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\omega^2 x^2}{2} = \frac{1}{2}\left(-\partial_x^2 + \omega^2 x^2\right) \equiv \omega\left(a_+ a_- + \frac{1}{2}\right). \quad (1)$$

Как видно из правой части выражения (1), его можно представить через операторы алгебры Гейзенберга – Вейля *W(1)* с ее историческими операторами пары рождения-уничтожения $a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mp\partial_\xi + \xi]$; $\xi = \sqrt{\omega}x$ и числа частиц $n = a_+ a_-$. Они имеют следующие коммутационные соотношения между собой и гамильтонианом H_1:

$$[a_-; a_+] = 1; \quad [n; a_\pm] = \pm a_\pm; \quad \text{и} \quad [\frac{H_1}{\omega}; a_\pm] \equiv [a_0; a_\pm] = \pm a_\pm \quad (2)$$

Для модели СО в операторах рождения-уничтожения добавляется кулоноподобный член $\frac{g}{\xi}$, и в результате этого гамильтониан модели H_2 получает дополнительный и сингулярный член с обратной квадратичной зависимостью:

$$H_2 = H_0 + \frac{\omega^2 x^2}{2} + \frac{g^2}{2x^2} = H_1 + \frac{g^2}{2x^2}. \quad (3)$$

Однако данные операторы, которые факторизуют гамильтониан, не образуют замкнутую алгебру. Чтобы ее получить в виде алгебры *SU(1,1)*

$$[b_0; b_\pm] = \pm b_\pm; \quad [b_-; b_+] = 2b_0, \quad (4)$$

вводят следующие операторы:

$$b_0 \equiv \frac{H_2}{2\omega} = \frac{1}{4\omega}\left(-\partial_x^2 + \omega^2 x^2 + \frac{g^2}{x^2}\right); \qquad b_1 = \frac{\omega x^2}{2} - b_0; \qquad b_2 \equiv \frac{i}{2}\left(x\partial_x + \frac{1}{2}\right). \quad (5)$$

Так как ранее коммутационные соотношения давались в так называемом аксиальном базисе, состоящем из операторов ($b_0; b_\pm$), то напомним про его линейную связь с декартовым базисом операторов $(b_0; b_1; b_2)$: $b_\pm = b_1 \pm ib_2$. Далее будем работать именно с этим конкретным видом реализации алгебры *SU(1,1)*, который приведен в формуле (5).

2. Модель ДО и СДО. Одним из обобщений модели ГО является модель ДО, которую определяют следующим образом:

$$H_3 = -\frac{1}{2}\left(-D^2 + \omega^2 x^2\right) \equiv \omega\frac{1}{2}\left\{A_+ A_-\right\} = \omega\left(A_+ A_- + \frac{1}{2} + \nu R\right), \quad (6)$$

где оператор D – производная Данкля $D = \partial + \frac{\nu}{x}(1 - R)$, $A_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}[\mp D + x]$. Здесь оператор R есть оператор отражения от гиперплоскости $x = 0$:

$$Rf(x) = f(-x).$$

Уточним выражение квадрата производной Данкля:

$$D^2 \equiv DD = \left(\partial + \frac{\nu}{x}(1-R)\right)^2 = \partial^2 + 2\frac{\nu}{x}\partial - \frac{\nu}{x^2}(1-R).$$

Если не обращать внимания на член с первой производной, который можно убрать калибровочным преобразованием $\tilde{H}_3 = G(x)H_3\ G^{-1}(x)$, где $G(x) = |x|^\nu$, то формально гамильтониан ДО H_3 отвечает гамильтониану СО H_2 с оператором отражения R в сингулярном члене.

С другой стороны, эту модель считают так же, как R-обобщение алгебры Гейзенберга – Вейля *W(1)*, в которой вводится дополнительный оператор R для описания отражательной симметрии [5]. В данном случае имеются следующие коммутационные соотношения между операторами данной алгебры:

$$[A_-;\ A_+] = 1 + 2\nu R; \qquad [\frac{H_3}{\omega};\ A_\pm] \equiv [A_0;\ A_\pm] = \pm A_\pm; \qquad \{R;\ A_\pm\} = 0; \qquad R^2 = 1. \tag{7}$$

Еще одной возможностью в некоторой степени усложнить модель ДО является рассмотрение так называемого сингулярного осциллятора Данкля (СДО):

$$H_4 = H_3 + \frac{\alpha + \beta R}{2x^2} \equiv -\frac{1}{2}\left(-D^2 + \omega^2 x^2 + \frac{\alpha + \beta R}{x^2}\right). \tag{8}$$

Данный гамильтониан H_4 уже явно похож на гамильтониан СО H_2. В нем помимо использования производной Данкля вместо обычной добавлен также сингулярный член с оператором отражения R. На операторном уровне имеем алгебру *SU(1,1)* (4) со следующими операторами:

$$B_0 \equiv \frac{H_4}{\omega} = \frac{1}{2\omega}\left(-D^2 + \omega^2 x^2 + \frac{\alpha + \beta R}{x^2}\right); \qquad B_\pm = A_\pm^2 - \frac{\alpha + \beta R}{2x^2}. \tag{5}$$

3. Оператор Казимира и сложение алгебр SU(1,1). Согласно определению оператора Казимира, он должен коммутировать со всеми операторами своей алгебры. Для алгебры Гейзенберга – Вейля *W(1)* он дается формулой $Q = a_+a_- - n \equiv a_+a_- - a_0 + \frac{1}{2}$ и имеет нулевое значение. Для ее R-обобщения оператор Казимира дается почти аналогичной формулой $Q = \left(A_+A_- - A_0 + \frac{1}{2}\right)R.$

Если рассматривать алгебру *SU(1,1)*, то оператор Казимира в данном случае будет определяться следующим образом:

$$Q = b_0^2 - b_0 - b_+b_- \equiv b_0^2 - b_1^2 - b_2^2. \tag{7}$$

В нашей реализации (5) он имеет такое числовое значение:

$$Q = \frac{8g^2 - 3}{16}. \tag{8}$$

Часто рассматривают алгебру C, являющуюся прямой суммой двух других алгебр A и B, то есть $C = A \oplus B$. Другими словами, операторы результирующей алгебры $C_i; i \in \{0,1,2\}$ будут представляться простой суммой соответствующих операторов исходных алгебр $C_i = A_i + B_i; i \in \{0,1,2\}$. Нетрудно проверить, что для линейной алгебры *SU(1,1)* (4), все три алгебры A; B и $C = A \oplus B$ будут однотипны. Тогда согласно определению (7) оператор Казимира для результирующей алгебры C можно выразить так:

$$Q_{C=A\oplus B} \equiv C_0^2 - C_1^2 - C_2^2 = Q_A + Q_B + 2(A_0B_0 - A_1B_1 - A_2B_2) \quad \text{или}$$

$$Q_{C=A\oplus B} = -\frac{1}{4}\left(x_2^2\partial_1^2 + x_2^2\partial_1^2 - 2x_1x_2\partial_1\partial_2 - x_1\partial_1 - x_2\partial_2 + 1 - 2(\frac{g_1^2}{x_1^2} + \frac{g_2^2}{x_2^2})(x_1^2 + x_2^2) \right), \tag{9}$$

где Q_A; Q_B – операторы Казимира алгебр A и B соответственно и принят во внимание конкретный вид реализации (5) (также учтено, что координаты с индексом 1(2) отвечают алгебре А(В)).

Чтобы быстрее прийти к конечному результату, напомним выражение квадрата момента импульса:

$$L_{12}^2 \equiv \left(-\frac{i}{2}\{x_1\partial_2 - x_2\partial_1\} \right)^2 = -\frac{1}{4}\left(x_2^2\partial_1^2 + x_2^2\partial_1^2 - 2x_1x_2\partial_1\partial_2 - x_1\partial_1 - x_2\partial_2 \right),$$

то есть получим

$$Q_{C=A\oplus B} = L_{12}^2 - \frac{1}{4} + 2(x_1^2 + x_2^2)(\frac{g_1^2}{x_1^2} + \frac{g_2^2}{x_2^2}) \equiv L_{12}^2 - \frac{1}{4} + \frac{g_1^2}{x_1^2} + \frac{g_2^2}{x_2^2}. \tag{10}$$

4. Алгебры скрытой и динамической симметрии. В предыдущем пункте была введена результирующая алгебра C, являющаяся прямой суммой двух других исходных алгебр A и B, то есть $C = A \oplus B$. Ее оператор, который выберемдля определенности как $C_0 = A_0 + B_0$, по построению будет коммутировать как с разностью соответствующих операторов исходных алгебр, или с $K_1 = A_0 - B_0$, так и с оператором Казимира результирующей алгебры, или с $K_2 = Q_{C=A\oplus B}$. На основе результатов работы [6] данные операторы K_1, K_2 образуют алгебру дополнительной или так называемой скрытой симметрии для оператора $C_0 = A_0 + B_0$ в виде алгебры Хана:

$$\left[K_2\left[K_1, K_2\right]\right] = 2K_2K_1K_2 - K_2^2K_1 - K_1K_2^2 = -2(K_1K_2 + K_2K_1) + 4\varepsilon(Q_A - Q_B); \tag{11}$$

$$\left[\left[K_1, K_2\right]K_1\right] = 2K_1K_2K_1 - K_1^2K_2 - K_2K_1^2 = -2K_1^2 - 4K_2 + 2\varepsilon^2 + 4(Q_A + Q_B), \tag{12}$$

где – обственное значение оператора $C_0 = A_0 + B_0$.

Теперь в двумерном пространстве для описания нашей модели определим гамильтониан H_2^C, который будет представлять сумму двух исходных одномерных гамильтонианов СО $H_2^C = H_2^A + H_2^B$, каждый их которых есть определенная реализация оператора $b_0^i \equiv \frac{H_2^i}{\omega}$ своей алгебры *SU(1,1)* согласно (5). Как указано ранее, такой гамильтониан имеет два интеграла движения, удовлетворяющие коммутационным соотношениям алгебры Хана.

Теперь посмотрим на полученные результаты с другой точки зрения. Согласно формуле (10) один из рассмотренных интегралов движения, а именно оператор Казимира результирующей алгебры, выраженный через квадрат момента импульса, $K_2 = Q_{C=A\oplus B} = L_{12}^2 - \frac{1}{4} + \frac{g_1^2}{x_1^2} + \frac{g_2^2}{x_2^2}$ можнотрактовать как определенный гамильтониан на окружности в определенном потенциальном поле: $H_5 = L_{12}^2 + V(\varphi)$. Вид последнего дают дополнительные слагаемые к квадрату момента импульса, то есть $V(\varphi)=\frac{g_1^2}{x_1^2}+\frac{g_2^2}{x_2^2}$. В такой интерпретации полученная ранее алгебра Хана как алгебра скрытой симметрии результирующего гамильтониана H_2^C становится динамичской алгеброй симметрии нашей проблемы или нового гамильтониана H_5. Остается конкретизировать явный вид нашего потенциального поля на окружности. С этой целью перейдем к полярным координатам $x_1=R\cos\varphi; x_2=R\sin\varphi$ и получим потенциал Пёшля – Теллера:

$$V(\varphi)=\frac{g_1^2}{R^2\cos^2\varphi}+\frac{g_2^2}{R^2\sin^2\varphi}.$$

Он был рассмотрен в [3] как потенциал СО в декартовых координатах всеобъемлющего двумерного пространства.

Так как для модели СДО рассмотрение можно выполнить аналогично вышеприведенному, то выберем немного другой подход к получению её алгебры динамической симметрии. Он основывается на операторном описании в аксиальном базисе. С этой целью в простейшем варианте определим следующие операторы:

$$L_0=A_0-B_0 \quad \text{и} \quad L_\pm=A_\pm^2B_\mp^2,$$

где нами введены в рассмотрение две независимые от друга алгебры R-обобщения Гейзенберга – Вейля *W(1)* A и B.

Нетрудно получить коммутатор и следующие формулы:

$$[L_0;L_\pm]=\pm4L_\pm \tag{13a}$$

$$A_+A_-=A_0-\frac{1}{2}+Q_AR_A; \qquad A_+^2A_-^2=\left(A_0-\frac{1}{2}+Q_AR_A\right)\left(A_0-\frac{3}{2}-Q_AR_A\right);$$

$$A_-A_+=A_0+\frac{1}{2}-Q_AR_A; \qquad A_-^2A_+^2=\left(A_0+\frac{1}{2}-Q_AR_A\right)\left(A_0+\frac{3}{2}+Q_AR_A\right)$$

Найдем оставшийся коммутатор $[L_-;L_+]$:

$$[L_-;L_+]=A_-^2A_+^2B_+^2B_-^2-A_+^2A_-^2B_-^2B_+^2=L_0^3+2L_0(X_A+X_B-\varepsilon^2)+2\varepsilon(X_A-X_B), \tag{13б}$$

где введены обозначения: $X_A=\frac{3}{4}-Q_AR_A-Q_A^2; \qquad X_B=\frac{3}{4}-Q_BR_B-Q_B^2.$

Таким образом, согласно [6] коммутационные соотношения (13а, 13б) определят нам как алгебру Хиггса, которая изоморфна алгебре Хана, так и соответственно оператор $K_2=Q_{C=A\oplus B}=-\frac{1}{8}\left[L_0^2+2\left(L_++L_-\right)-2(X_A+X_B-\varepsilon^2)\right]$. Напомним, что последний определяет искомый гамильтониан с отражательными симметриями на окружности в анализируемом случае.

Заключение. В данной работе рассмотрена квантово-механическая задача о гармоническом осцилляторе на окружности как одномерном пространстве постоянной положительной кривизны. Дано обобщение на модели сингулярного и Данкля осцилляторов. Показана в явном виде динамическая симметрия проблемы, которая реализуется в виде квадратичной алгебры Хана *QH(3)* или изоморфной ей алгебры Хиггса.

Литература

1. *Latini, D.*, Marquette, I., Zhang, Y.-Z. Racah Algebra R(n) from Coalgebraic Structures and Chains of R(3) Substructures / Danilo Latini, Ian Marquette, Yao-Zhong Zhang [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL), 2021. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/2105.02562.pdf. – Date of access: 07.08.2021.
2. *Mardoyan L. G.*, Pogosyan G. S., Sissakian A. N. Two exactly-solvable problems in one dimensional quantum mechanics on circle // L. G. Mardoyan, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2021. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0303016.pdf. – Date of access: 07.08.2021.
3. *Громов, Н. А.* Квантовая механика на одномерных геометриях Кэли-Клейна / Н. А. Громов, В. В. Куратов // Известия Коми научного центра УрО РАН. – 2017. – Вып. 2(30) – С. 5–11.
4. *Лаврёнов, А. Н.* Одномерный релятивистский сингулярный осциллятор One-dimensional relativistic singular / А. Н. Лаврёнов // Весці БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. – 2019. – № 2. – С. 5–9.
5. Plyushchay, M. S. R-deformed Heisenberg algebra / Mikhail Plyushchay [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2016. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/hep-th/9701065.pdf. – Date of access: 20.03.2019.
6. *Frappat, L.*, Gaboriaud J., Vinet, L., Vinet, S., Zhedanov, A. S. The Higgs and Hahn algebras from a Howe duality perspective LANL, Cornell University Library. Available at: https://arxiv.org/abs/1811.09359v1 (accessed 14 February 2019). doi: 10.1016/j.physleta.2019.02.024.

References

1. *Latini, D.*, Marquette, I., Zhang, Y.-Z. Racah Algebra R(n) from Coalgebraic Structures and Chains of R(3) Substructures / Danilo Latini, Ian Marquette, Yao-Zhong Zhang [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL), 2021. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/2105.02562.pdf. – Date of access: 07.08.2021.
2. *Mardoyan L. G.*, Pogosyan G. S., Sissakian A. N. Two exactly-solvable problems in one dimensional quantum mechanics on circle // L. G. Mardoyan, G. S. Pogosyan, A. N. Sissakian [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2021. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0303016.pdf. – Date of access: 07.08.2021.
3. Gromov, N. A. Kvantovaya mekhanika na odnomernyh geometriyah Keli-Klejna / N. A. Gromov, V. V. Kuratov // Izvestiya Komi nauchnogo centra UrO RAN. – 2017. – Vyp. 2(30) – S. 5–11.
4. Lavryonov, A. N. Odnomernyj relyativistskij singulyarnyj oscillyator One-dimensional relativistic singular / A. N. Lavryonov // Vesci BDPU. Seryya 3. Fizika. Matematyka. Infarmatyka. Biyalogiya. Geagrafiya. – 2019. – № 2. – С. 5–9.
5. Plyushchay, M. S. R-deformed Heisenberg algebra / Mikhail Plyushchay [Electronic resource] : Cornell University Library (CUL) , 2016. – Mode of access: https://arxiv.org/pdf/hep-th/9701065.pdf. – Date of access: 20.03.2019.
6. *Frappat, L.*, Gaboriaud J., Vinet, L., Vinet, S., Zhedanov, A. S. The Higgs and Hahn algebras from a Howe duality perspective LANL, Cornell University Library. Available at: https://arxiv.org/abs/1811.09359v1 (accessed 14 February 2019). doi: 10.1016/j.physleta.2019.02.024.