ОПИСАНИЕ ВРАЩЕНИЙ В СЕМИМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

А.Н. Лаврёнов

к.ф.-м.н., доцент учреждения образования "Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка", г. Минск, Республика Беларусь, lanin0777@bk.ru

Аннотация: в данной статье рассматривалось описание вращений в семимерном пространстве и его особенности, в частности, при применении композиции вектор-параметров.

Ключевые слова: вектор-параметр, семимерное пространство, вращение.

DESCRIPTION OF ROTATIONS IN SEVEN-DIMENSIONAL SPACE

Alexandre N. Lavrenov

Ph. D., associate Professor, Educational Institution “Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank”, city of Minsk, Belarus, lanin0777@bk.ru

Abstract: This article explores the description of rotations in seven-dimensional space and its features, in particular, when applying the composition of vector parameters

Key words: vector parameter, seven-dimensional space, rotation.

Инновационная экономика, о которой сейчас все говорят и которую стремятся воплотить в реальность, основывается на прорывных технологиях, что в свою очередь, подразумевает использование новых теоретических моделей. Очень часто оказывается, что новая теоретическая модель так далека от практического применения и так абстрактна, что верится с трудом о её возможном в будущем использовании. Как о достаточно показательном примере, вспомним о таком объекте как кватернионы, которые казались всего лишь ярким образом игры человеческого разума В. Гамильтона в 1843г, в начале своего появления. Однако, спустя многие годы, они нашли себя для оптимального и прагматического описания вращения твердого тела, включая космические корабли [1]. Поэтому, цель данной работы заключается в попытке осуществить в некоторой степени обобщение в данном направлении, а именно в описании вращения на многомерный случай. Выбор определенного значения размерности анализируемого пространства диктуется несколькими причинами. Во-первых, в работе [2] был предложен свой оригинальный подход к компактному описанию вращений в трехмерном мире, который затем был успешно применен и развит во многих областях физики. Впоследствии оказалось, что есть тесная связь предложенного автором подхода с теорией кватернионов. Во-вторых, согласно теореме Гурвица о нормированных алгебрах: любая нормированная алгебра с единицей изоморфна одной из четырёх алгебр: действительных чисел, комплексных чисел, кватернионов или октав. Другими словами, есть выделенные определенные значения размерности пространств. В частности, для октонионов в их векторной части задействовано именно семимерное пространство.

Таким образом, начнем описание вращений в семимерном пространстве по аналогии с работой [2], где предложенный метод компактно и успешно был затем использован во многих областях физики. С этой целью напомним, что собственную ортогональную матрицу O n-мерного порядка можно представить или в виде полинома от антисимметричной матрицы A не выше (n-1)-й степени

$$O = b_1 A^{n-1} + b_2 A^{n-2} + \cdots + b_{n-1} A^1 + b_n, \qquad (1)$$

или в виде отношения

$$O = \frac{1+A}{1-A}. \qquad (2)$$

В нашем случае $n=7$ согласно теореме Гамильтона-Кэли имеет место матричное равенство

$$A^7 - a_1 A^6 + a_2 A^5 - a_3 A^4 + a_4 A^3 - a_5 A^2 + a_6 A - a_7 = 0, \qquad (3)$$

где инвариантные коэффициенты $a_\text{к}$ могут быть получены из рекуррентных соотношений Ньютона

$$k a_k = a_{k-1} A_t - a_{k-2} (A^2)_t + \cdots (-1)^{k-1} (A^k)_t \qquad (4)$$

Из свойств антисимметричности матрицы A и последнего выражения (4) следуют следующие тождества:

$$(A^{2k+1})_t \equiv (A)_t = (A^3)_t = (A^5)_t = (A^7)_t = 0;$$

$$a_1 = A_t = a_3 = a_5 = a_7 \equiv 0; \qquad 2a_2 \equiv -(A^2)_t; \qquad (5)$$

$$4a_4 \equiv -a_2 (A^2)_t - (A^4)_t; \qquad 6a_6 \equiv -a_4 (A^2)_t - a_2 (A^4)_t - (A^6)_t$$

Другими словами, вместо формулы (3) получим

$$A^7 + a_2 A^5 + a_4 A^3 + a_6 A = 0, \qquad (6)$$

что позволяет переписать (2) с учетом (1) и (6) следующим образом:

$$O = b_1 A^6 + b_2 A^5 + b_3 A^4 + b_4 A^3 + b_5 A^2 + b_6 A^1 + b_7$$

или

$$O = 1 + \frac{2}{1+a_2+a_4+a_6} \{(1 + a_2 + a_4)(A + A^2) + (1 + a_2)(A^3 + A^4) + A^5 + A^6\},$$

или (7)

$$O = 1 + \frac{2}{1+a_2+a_4+a_6} \{(1 + a_2 + a_4) + (1 + a_2) A^2 + A^4\} (A + A^2).$$

Таким образом, собственная ортогональная матрица вращения O семимерного порядка представлена в виде полинома от антисимметричной матрицы A не выше шестой степени с явной градацией по структуре. Здесь следует отметить, что часть выражения, отвечающая аналогии трехмерного пространства, даётся крайним правым сомножителем в (7). Подчеркнем также тот факт, что знаменатель дроби в (7) приобрёл при увеличении значения размерности дополнительные слагаемые.

Если идти далее аналогичным путем согласно работе [2], то необходимо вместо матрицы A ввести дуальный ей вектор $\vec{\boldsymbol{c}} \equiv (c_a)$

$$A_{ab} = -\varepsilon_{abd}c_d; \qquad c_d = \frac{1}{2}\varepsilon_{abc}A_{bc} \qquad (8)$$

Однако, обратим сразу внимание, что общее количество независимых параметров вращения в нашем случае семимерного пространства равно 21. Это явно больше следуемого значения из семи компонент предложенного выше дуального вектора $\vec{\boldsymbol{c}}$. С другой стороны, структура формулы (7) косвенно намекает о необходимости задействовать три различных (21=3*7) дуальных векторов. Для упрощения ситуации и выяснения определенных свойств введенных параметров с учетом предоставленного объёма публикации остановимся на анализе пока только с одним вектором $\vec{\boldsymbol{c}}$**.**

Чтобы полностью перейти на описание вращения через вектор-параметры, необходимо выразить все степени антисимметричной матрицы A через них. Ниже приведены полученные результаты:

$$(A^2)_{ac} \equiv A_{ab}A_{bc} = c_a c_c - \delta_{ac}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|;$$
$$(A^3)_{ac} \equiv (A^2)_{ab}(A)_{bc} = \varepsilon_{acd}c_d\|\vec{\boldsymbol{c}}\|$$
$$(A^4)_{ac} \equiv (A^2)_{ab}(A^2)_{bc} = -\|\vec{\boldsymbol{c}}\|(c_a c_c - \delta_{ac}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|) \qquad (9)$$
$$(A^5)_{ac} \equiv (A^3)_{ab}(A^2)_{bc} = -\varepsilon_{acd}c_d\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2$$
$$(A^6)_{ac} \equiv (A^3)_{ab}(A^3)_{bc} \equiv= \|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2(c_a c_c - \delta_{ac}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|),$$

где введено обозначение для квадрата длины вектора $\vec{\boldsymbol{c}}$: $\|\vec{\boldsymbol{c}}\| = \vec{\boldsymbol{c}} * \vec{\boldsymbol{c}}$.

Таким образом, собственная ортогональная матрица вращения O семимерного порядка может быть представлена через вектор-параметр вращения $\vec{\boldsymbol{c}}$ следующим образом с учетом формул (9):

$$O = 1 + \frac{2}{1+a_2+a_4+a_6}\{(1 + a_2 + a_4 - (1 + a_2)\|\vec{\boldsymbol{c}}\| + \|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2)(-\varepsilon_{acd}c_d + c_a c_c - \delta_{ac}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|)\}, \quad (10)$$

Рассмотрим теперь инвариантные коэффициенты $a_к$. С учётом формулы (5) получим:

$$a_2 \equiv 6\|\vec{\boldsymbol{c}}\|; \qquad a_4 \equiv \frac{5}{2}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2; \qquad a_6 \equiv -3\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^3, \qquad (11)$$

которые позволяют немного упростить выражение (10) к следующему виду:

$$O = 1 + \frac{2}{1+a_2+a_4+a_6}\left\{\left(1 + 5\|\vec{\boldsymbol{c}}\| - \frac{5}{2}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|^2\right)(-\varepsilon_{acd}c_d + c_a c_c - \delta_{ac}\|\vec{\boldsymbol{c}}\|)\right\}, \quad (12)$$

Полученные результаты в простейшем случае с одним дуальным вектор-параметром вращения $\vec{\boldsymbol{c}}$ показывают, что в сравнительной характеристике с трехмерным случаем с увеличением размерности появляются в матрице вращения нелинейная зависимость от длины данного вектора. Данный факт можно интерпретировать как определенный дилатационный эффект, что коррелирует с отмеченной зависимостью нормировки вектор-параметров от своей длины при анализе абстрактного вывода закона композиции вектор-параметров в трехмерном случае согласно [2].

Если рассматривать функциональную зависимость матрицы вращения O в формуле (12) от вектор-параметра вращения $\vec{\boldsymbol{c}}$, то она почти аналогична ситуации в пространстве меньшей размерности. Это позволяет просто перенести полученную формулу там для закона композиции вектор-параметра вращения $\vec{\boldsymbol{c}}$ с небольшими видоизменениями.

В заключении, скажем немного слов про общий случай, который выглядит не совсем однозначно. Одним из вариантов обобщения может служить достаточно простое видоизменения формулы (8) в духе бесцветной комбинации трёх дуальных вектор-параметров вращения. В этом случае интересно проанализировать предел всех вектор-параметров к трёхмерному пространству. Другим многообещающим вариантом обобщения кажется замена символа Леви-Чивита ε_{abd} на полностью антисимметричный G_2инвариантный тензорf_{abd}, который имеет только следующие ненулевые компоненты

$$f_{123} = f_{246} = f_{435} = f_{651} = f_{572} = f_{714} = f_{367} = 1. \qquad (13).$$

В данном случае, в противоположность трехмерному случаю, когда для символа Леви-Чивита ε_{abd} имеем

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}, \qquad (13).$$

вместо этого для полностью антисимметричного G_2инвариантного тензора f_{abd} получим небольшое видоизменение в виде дополнительного слагаемого

$$f_{ijk}f_{kmn} = g_{ijmn} + \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$$

Данное слагаемое, как известно, ответственно за многие интересные последствия при использовании группы G_2. Однако, на текущий момент эти возможности будут составлять цель последующих публикаций автора.

Список использованных источников:

1. Притыкин Д. Магия тензорной алгебры: Часть 1 — что такое тензор и для чего он нужен? // [Электронный ресурс] / Д. Притыкин. – Текст : электронный // habr.com : [сайт]. - 2015. - 30 июня. - URL: https://habr.com/ru/post/261421/ (дата обращения: 07.08.2021).

2. Фёдоров, Ф.И. О.Б. Группа Лоренца / Ф.И. Фёдоров. – М : Изд-во: Наука, 1979. – 384 с.