ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)

ФИЗИКА

PHYSICS

УДК 539.12
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-216-224

Поступила в редакцию 22.02.2019
Received 22.02.2019

А. Н. Лаврёнов[1], И. А. Лаврёнов[2]

[1]Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка, Минск, Беларусь
[2]ООО «Октонион технолоджи», Минск, Беларусь

ДВОЙСТВЕННОСТЬ ХОУ АЛГЕБРЫ ХИГГСА – ХАНА ДЛЯ ВОСЬМИМЕРНОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Аннотация. Рассмотрены два разных, но изоморфных представления одной алгебры в свете двойственности Хоу: алгебра Хиггса и алгебра Хана. Первая отвечает алгебре симметрии гармонического осциллятора на 2-сфере и полиномиально деформированной $SU(2)$ алгебре, а вторая – кодирует биспектральные свойства одноименных ортогональных многочленов и выступает как алгебра симметрии Хартмана и некоторых других кольцевых потенциалов, а также сингулярного осциллятора в двух измерениях. Показана в явном виде реализация данной адгебры, с одной стороны, как коммутанта $O(4)\oplus O(4)$ подалгебры $U(8)$ в осцилляторном представлении универсальной обертывающей алгебры $U\left(u(8)\right)$ и, с другой стороны, как вложение дискретной версии алгебры Хана в двойное тензорное произведение $SU(1,1)\otimes SU(1,1)$. Эти две реализации отражают факт, что $SU(1,1)$ и $U(8)$ образуют двойственную пару в пространстве состояний гармонического осциллятора в восьми измерениях. В конце статьи кратко обсуждены дальнейшие возможные направления исследований для обобщения полученных результатов. Первое достаточно очевидно – это рассмотрение проблемы при увеличении или при любом значении N размерности гармонического осциллятора. Второе направление можно связать с анализом ситуации для N-тензорного произведения $SU(1,1)^{\otimes N}$. Еще одним интересным аспектом данной проблемы может быть исследование q-обобщения $SU(1,1)$.

Ключевые слова: алгебра Хиггса, алгебра Хана, коммутант, 8D гармонический осциллятор, двойственность Хоу, тензорное произведение, $SU(1,1)$, $U(8)$

Для цитирования. Лаврёнов, А. Н. Двойственность Хоу алгебры Хиггса – Хана для восьмимерного гармонического осциллятора / А. Н. Лаврёнов, И. А. Лаврёнов // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 2. – С. 216–224. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-216-224

A. N. Lavrenov[1], I. A. Lavrenov[2]

[1]Belarusian State Pedagogical University Named After Maxim Tank, Minsk, Belarus
[2]Octonion Technology Ltd., Minsk, Belarus

HOWE DUALITY OF HIGGS – HAHN ALGEBRA FOR 8D HARMONIC OSCILLATOR

Summary. In the light of the Howe duality, two different, but isomorphic representations of one algebra as Higgs algebra and Hahn algebra are considered in this article. The first algebra corresponds to the symmetry algebra of a harmonic oscillator on a 2-sphere and a polynomially deformed algebra $SU(2)$, and the second algebra encodes the bispectral properties of corresponding homogeneous orthogonal polynomials and acts as a symmetry algebra for the Hartmann and certain ring-shaped potentials as well as the singular oscillator in two dimensions. The realization of this algebra is shown in explicit form, on the one hand, as the commutant $O(4)\oplus O(4)$ of subalgebra $U(8)$ in the oscillator representation of universal algebra $U\left(u(8)\right)$ and, on the other hand, as the embedding of the discrete version of the Hahn algebra in the double tensor product $SU(1,1)\otimes SU(1,1)$. These two realizations reflect the fact that $SU(1,1)$ and $U(8)$ form a dual pair in the state space of the harmonic oscillator in eight dimensions. The N-dimensional, N-fold tensor product $SU(1,1)^{\otimes N}$ and q-generalizations are briefly discussed.

Keywords: Higgs algebra, Hahn algebra, commutant, 8D harmonic oscillator, Howe duality, tensor product, $SU(1,1)$, $U(8)$

For citation. Lavrenov A. N., Lavrenov I. A. Howe duality of Higgs – Hahn algebra for 8D harmonic oscillator. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 2, pp. 216–224 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-2-216-224

Введение. В [1–2] была введена алгебра Аски – Вильсона, которая описала все классические ортогональные полиномы. Выбрав в качестве одного из операторов данной алгебры гамильтониан системы, можно было описать почти все текущие точнорешаемые задачи [3–5]. С другой стороны, они имеют решение в различных системах координат, что отражает наличие определенных операторов симметрии. Часто данные операторы формируют свою алгебру так называемой скрытой симметрии. Поэтому авторы исследований [1–2] также рассмотрели в других своих работах данное направление, когда в случае реализации алгебры скрытой симметрии выступают алгебра Аски – Вильсона и ее вырожденные случаи. Напомним в качестве примера рассмотрение осциллятора и кулоновской системы в плоском пространстве и в пространстве постоянной кривизны [6–12], где проявились соответственно такие варианты алгебры Аски – Вильсона, как квадратичные алгебры Хана $QH(3)$ [13–15] и Рака $QR(3)$ [16–17]. Дальнейший анализ показал изоморфность алгебры Хана алгебре Хиггса [18]. Можно отметить еще один интересный момент – дуальную связь кулоновской и осцилляторной задач посредством преобразования Гурвица. В свое время появилось достаточно много работ, посвященных данной теме, но исследования приостановились на преобразовании Гурвица $R^8 \to R^5$ (расслоение Хопфа $S^7 \to S^4$), которое связывает 8-мерный гармонический осциллятор и 5-мерную кулоновскую систему [19–27]. Данная связь в нормированных алгебрах с делением отражает последний вариант ассоциативной реализации. По этой причине вопрос о 8-мерном гармоническом осцилляторе и его скрытой симметрии, выражаемой в алгебре Хана – Хиггса, становится опять интересен для его интерпретации в рамках ставшего модным в последнее время коммутантного подхода в смысле двойственности Хоу [18, 28–31].

Далее, в разделе 1, мы приведем известные результаты об алгебрах Гейзенберга – Вейля, $SU(1,1)$, $U(8)$, Хиггса и Хана с вложением последней в тензорное произведение $SU(1,1)\otimes SU(1,1)$. В разделе 2 алгебра Хиггса будет реализована как коммутант $O(4)\oplus O(4)$ подалгебры $U(8)$ в осцилляторном представлении универсальной обертывающей алгебры $U\left(u(8)\right)$. Полученный результат в разделе 3 будет представлен как дуальная пара в смысле двойственности Хоу $\left(SU(1,1),\ U(8)\right)$, которая действует на состояниях восьмимерного осциллятора. В заключении будет дано краткое изложение результатов и возможных перспектив.

1. Алгебры Гейзенберга – Вейля, $SU(1,1)$, $U(8)$, Хиггса и Хана с вложением последней в $SU(1,1)\otimes SU(1,1)$. Напомним об определении алгебры Гейзенберга – Вейля $W(n)$ с ее историческими операторами пары рождения

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\partial}{\partial x_j} + x_j\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\partial_j + x_j)$$

и уничтожения

$$\overline{a}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(\partial_j + x_j),$$

оператором числа частиц

$$N_j = a_j \overline{a}_j = \frac{1}{2}(-\partial_j^2 + x_j^2 - 1),$$

где имеются следующие коммутационные соотношения между ними:

$$\left[a_i;\overline{a}_j\right] = \delta_{ij};\left[N_i;a_i\right] = \delta_{ij}a_i;\left[N_i;\overline{a}_j\right] = -\delta_{ij}\overline{a}_j,$$

где $i, j = 1,\ldots,n.$

Метаплектическое представление $SU(1,1)$ с помощью алгебры Гейзенберга – Вейля выражается следующими формулами:

$$J_0^i = \frac{1}{2}\left(a_i\overline{a}_i + \frac{1}{2}\right);\ \ J_+^i = \frac{1}{2}a_i^2;\ \ J_-^i = \frac{1}{2}\overline{a}_i^2, \tag{1}$$

где образующие J_0, $J_\pm$ подчиняются коммутационным соотношениям

$$\left[J_0; J_\pm\right] = \pm J_\pm;\ \ \left[J_+; J_-\right] = -2J_0,$$

а элемент Казимира дается формулой

$$C = J_0^2 - J_+J_- - J_0.$$

Алгебра Ли $U(8)$ с образующими E_{ij}, где $i, j = 1,\ldots,8$, допускает следующую реализацию в $W(8)$:

$$E_{ij} = a_i\overline{a}_j,$$

где $i, j = 1,\ldots,8$.

Наш гамильтониан изотропного гармонического осциллятора в восьми измерениях

$$H = E_{ii} + 4 = N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6 + N_7 + N_8 + 4 \tag{2}$$

коммутирует как с E_{ij} (т. е. $[H; E_{ij}] = 0$), так и с генераторами бесконечно малых вращений

$$L_{ij} = \frac{i}{2}(\overline{a}_j a_k - a_j\overline{a}_k) = \frac{i}{2}\left(x_j\frac{\partial}{\partial x_k} - x_k\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = \frac{i}{2}(x_j\partial_k - x_k\partial_j),$$

которые имеют известные коммутационные соотношения

$$\left[L_{jk}; L_{lm}\right] = \frac{i}{2}(L_{jl}\delta_{km} - L_{kl}\delta_{jm} + L_{km}\delta_{jl} - L_{jm}\delta_{kl}),$$

где $j, k, l, m = 1,\ldots,8.$

Согласно [14, 18] покажем теперь, как алгебра Хана вкладывается в тензорное произведение $SU(1,1)\otimes SU(1,1).$ Введем обозначение для гомоморфизма копроизведения

$$\Delta : SU(1,1) \to SU(1,1)\otimes SU(1,1)$$

и применим его к образующим J_0, $J_\pm$ алгебры $SU(1,1)$:

$$\Delta(J_0) \equiv J_0^{(12)} = J_0^{(1)} + J_0^{(2)};\ \ \Delta(J_\pm) \equiv J_\pm^{(12)} = J_\pm^{(1)} + J_\pm^{(2)},$$

где

$$J_0^{(1)} = J_0 \otimes 1; J_\pm^{(1)} = J_\pm \otimes 1$$

и

$$J_0^{(2)} = 1\otimes J_0; J_\pm^{(2)} = 1\otimes J_\pm.$$

Рассмотрим следующую реализацию операторов алгебры Хана:

$$K_1 = J_0^{(1)} - J_0^{(2)};\ \ K_2 = \Delta(C) \equiv [J_0^{(12)}]^2 - J_+^{(12)}J_-^{(12)} - J_0^{(12)}. \tag{3}$$

Отметим, что оператор K_2 представляет собой оператор Казимира алгебры копроизведения и может быть переписан в следующем виде:

$$K_2 = C^{(1)} + C^{(2)} + 2J_0^{(1)}J_0^{(2)} - J_+^{(1)}J_-^{(2)} - J_-^{(1)}J_+^{(2)}, \tag{4}$$

где $C^{(1)} = C\otimes 1;\ \ C^{(2)} = 1\otimes C.$

Согласно определению $K_3 = [K_1; K_2]$, получим

$$K_3 = -2\left(J_+^{(1)}J_-^{(2)} - J_-^{(1)}J_+^{(2)}\right).$$

Вычислим коммутаторы K_3 с K_1 и K_2:

$$\left[K_3;K_1\right] = -2K_1^2 - 4K_2 + 2\left(J_0^{(1)} + J_0^{(2)}\right)^2 + 4\left(C^{(1)} + C^{(2)}\right),$$

$$\left[K_2;K_3\right] = -2(K_1K_2 + K_2K_1) + 4\left(J_0^{(1)} + J_0^{(2)}\right)\left(C^{(1)} - C^{(2)}\right). \quad (5)$$

Принимая во внимание, что по построению оператор $J_0^{(1)} + J_0^{(2)}$ коммутирует с операторами K_1 и K_2, имеем коммутационные соотношения алгебры Хана со структурными константами алгебры, заданными как

$$\delta_1 = 4\left(J_0^{(1)} + J_0^{(2)}\right)\left(C^{(1)} - C^{(2)}\right);\ \ \delta_2 = 2\left(J_0^{(1)} + J_0^{(2)}\right)^2 + 4\left(C^{(1)} + C^{(2)}\right). \quad (6)$$

Это и определяет вложение алгебры Хана в $SU(1,1) \otimes SU(1,1)$.

Алгебра Хиггса имеет три генератора D, $A_\pm$, удовлетворяющих следующим коммутаторам [6–12, 18]:

$$\left[D;A_\pm\right] = \pm 4A_\pm;\left[A_+;A_-\right] = -D^3 + \alpha_1 D + \alpha_2 \quad (7)$$

с центральными элементами α_1, α_2. То, что алгебра Хиггса изоморфна дискретной алгебре Хана, легко увидеть [18], взяв операторы K_i алгебры Хана как

$$K_1 = \frac{1}{2}D;\ \ K_2 = -\frac{1}{8}[D^2 + 2(A_+ + A_-) - \alpha_1];\ \ K_3 = -\frac{1}{2}(A_+ - A_-). \quad (8)$$

В этом случае структурные константы алгебры Хана связаны со структурными константами алгебры Хиггса так:

$$\delta_1 = -\frac{\alpha_2}{4};\ \ \delta_2 = \frac{\alpha_1}{2}. \quad (9)$$

2. Алгебра Хиггса как коммутант в $\boldsymbol{U(u(8))}$. Согласно определению m-мерная ортогональная группа $O(m)$ есть совокупность всех линейных преобразований в m-мерном линейном пространстве, оставляющих инвариантной сумму квадратов компонент всякого вектора $\vec{x} = (x_\alpha)$, где $\alpha = 1,\dots,m$ из этого пространства $x^2 = x_\alpha x_\alpha = x_1^2 + \dots + x_m^2$.

Выберем подалгебру $O(4) \oplus O(4)$ алгебры $U(8)$ как алгебру, которая образуется всеми вращениями L_{1-4} и L_{5-8}, оставляющими норму $x^2 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} x_\alpha x_\alpha = x_1^2 + \dots + x_4^2$ и $x^2 = \sum_{\alpha=1}^{\alpha=4} x_{\alpha+4}x_{\alpha+4} = x_5^2 + \dots + x_8^2$:

$$L_{1-4} = L_{ij};\ \ L_{5-8} = L_{(i+4)(j+4)};\ \left[L_{1-4};L_{5-8}\right] = 0;\ \ i,j = 1,\dots,4.$$

Коммутант этой подалгебры образуем из полиномов операторов рождения и уничтожения, инвариантных при вращениях L_{1-4} и L_{5-8}. Нетрудно убедиться, что нужные операторы имеют следующий вид:

$$A_+ = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(\bar{a}_5^2 + \bar{a}_6^2 + \bar{a}_7^2 + \bar{a}_8^2);$$

$$A_- = (\bar{a}_1^2 + \bar{a}_2^2 + \bar{a}_3^2 + \bar{a}_4^2)(a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2);$$

$$D = (N_1 + N_2 + N_3 + N_4) - (N_5 + N_6 + N_7 + N_8). \quad (10)$$

Они также коммутируют с нашим гамильтонианом (2). Найдем их коммутационные соотношения. Нетрудно получить следующие формулы или коммутаторы:

$$\left[D;A_\pm\right] = \pm 4A_\pm,$$

а также тождества [18]

$$a_i^2\bar{a}_i^2=(N_i-1)N_i;\ \ \bar{a}_i^2a_i^2=(N_i+1)(N_i+2);$$
$$a_i^2\bar{a}_j^2+\bar{a}_i^2a_j^2=2N_iN_j+N_i+N_j-4L_{ij}^2,\ \ i,j=1,\dots,8. \tag{11}$$

Найдем оставшийся коммутатор $[A_+;A_-]$:

$$[A_+;A_-]=4\left(\sum_{i=1}^{i=4}\sum_{j=1}^{j=4}a_i^2\bar{a}_j^2\right)(N_5+N_6+N_7+N_8+2)-4(N_1+N_2+N_3+N_4+2)\left(\sum_{i=5}^{i=8}\sum_{j=5}^{j=8}a_i^2\bar{a}_j^2\right).$$

Преобразуем его с помощью (11):

$$[A_+;A_-]=4\left(\left(\sum_{i=1}^{i=4}N_i\right)^2+2\left(\sum_{i=1}^{i=4}N_i\right)-4\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4}L_{ij}^2\right)(N_5+N_6+N_7+N_8+2)-$$
$$-4(N_1+N_2+N_3+N_4+2)\left(\left(\sum_{i=5}^{i=8}N_i\right)^2+2\left(\sum_{i=5}^{i=8}N_i\right)-4\sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8}L_{ij}^2\right).$$

Учитывая, что

$$N_1+N_2+N_3+N_4=\frac{1}{2}(H+D-4);\ \ N_5+N_6+N_7+N_8=\frac{1}{2}(H-D-4),$$

после некоторых преобразований получим

$$[A_+;A_-]=-D^3+\left[H^2+8\left(\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4}L_{ij}^2+\sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8}L_{ij}^2\right)\right]D-8\left(\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4}L_{ij}^2-\sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8}L_{ij}^2\right)H. \tag{12}$$

Таким образом, имеем алгебру Хиггса со структурными константами алгебры, заданными как

$$\alpha_1=H^2+8\left(\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4}L_{ij}^2+\sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8}L_{ij}^2\right);\ \ \alpha_2=-8\left(\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4}L_{ij}^2-\sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8}L_{ij}^2\right)H. \tag{13}$$

Подстановка (10) в (8) с использованием тождеств (11) и полученного выражения для структурной константы α_1 в (13) дает следующие выражения для операторов K_i:

$$K_1=\frac{1}{2}\left[(N_1+N_2+N_3+N_4)-(N_5+N_6+N_7+N_8)\right];\ \ K_2=\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=8}L_{ij}^2+2;\ \ K_3=[K_1;K_2]. \tag{14}$$

Эти операторы подчиняются коммутационным соотношениям алгебры Хана

$$K_3=[K_1;K_2];\ \ [K_2;K_3]=-2(K_1K_2+K_2K_1)+\delta_1;\ \ [K_3;K_1]=-2K_1^2-4K_2+\delta_2$$

со структурными константами алгебры, заданными как

$$\delta_1=-\frac{\alpha_2}{4}\equiv 2\left(\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4}L_{ij}^2-\sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8}L_{ij}^2\right)H;$$
$$\delta_2=\frac{\alpha_1}{2}\equiv\frac{1}{2}H^2+4\left(\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4}L_{ij}^2+\sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8}L_{ij}^2\right). \tag{15}$$

3. Двойственная связь Хоу. Теперь можно рассмотреть дуальность Хоу. Известно [31], что пространство состояний восьмимерного гармонического осциллятора реализуется как в представлении $U(8)$, так и в $SU(1,1)$. Учитывая данный факт, можно показать, что вложение алгебры Хана в двойное тензорное произведение одной пары алгебры $SU(1,1)$ находится в двойственности с коммутантом $O(4)\oplus O(4)$ в универсальной алгебре другой алгебры пары $U(8)$.

С этой целью рассмотрим сложение восьми метаплектических представлений (1), сгруппированных в две пары, т. е. если взять

$$J^{(1-8)} = J^{(1-4)} + J^{(5-8)},$$

где

$$J_0^{(1-8)} = J_0^{(1-4)} + J_0^{(5-8)} = \frac{1}{2}\left[(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + 2) + (N_5 + N_6 + N_7 + N_8 + 2)\right];$$

$$J_+^{(1-8)} = J_+^{(1-4)} + J_+^{(5-8)} = \frac{1}{2}\left[\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2\right) + \left(a_5^2 + a_6^2 + a_7^2 + a_8^2\right)\right];$$

$$J_-^{(1-8)} = J_-^{(1-4)} + J_-^{(5-8)} = \frac{1}{2}\left[\left(\overline{a}_1^2 + \overline{a}_2^2 + \overline{a}_3^2 + \overline{a}_4^2\right) + \left(\overline{a}_5^2 + \overline{a}_6^2 + \overline{a}_7^2 + \overline{a}_8^2\right)\right], \tag{16}$$

то в соответствии с реализацией операторов алгебры Хана, как в (3), получается

$$K_1 = J_0^{(1)} - J_0^{(2)} \equiv J_0^{(1-4)} - J_0^{(5-8)} = \frac{1}{2}\left[(N_1 + N_2 + N_3 + N_4) - (N_5 + N_6 + N_7 + N_8)\right],$$

что совпадает с результатом в коммутантном подходе, данным в (14).

Аналогично для K_2 будем иметь

$$K_2 = C^{(1-8)} \equiv \left[J_0^{(1-4)} + J_0^{(5-8)}\right]^2 - \left(J_+^{(1-4)} + J_+^{(5-8)}\right)\left(J_-^{(1-4)} + J_-^{(5-8)}\right) - \left(J_0^{(1-4)} + J_0^{(5-8)}\right)$$

или с учетом (16)

$$K_2 = \frac{1}{4}H^2 - \frac{1}{2}H - \frac{1}{4}\left[\sum_{i=1}^{i=8} a_i^2\right]\left[\sum_{i=1}^{i=8} \overline{a}_i^2\right].$$

Принимая во внимание тождества (11), получим

$$K_2 = \frac{1}{4}\left(H^2 - 2H - (A_+ + A_-) - [N_1 + N_2 + N_3 + N_4]^2 - [N_5 + N_6 + N_7 + N_8]^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{i=8} N_i\right] + \left(\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4} L_{ij}^2 + \sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8} L_{ij}^2\right)$$

или

$$K_2 = -\frac{1}{8}\left(D^2 - H^2 + 2(A_+ + A_-)\right) + \left(\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4} L_{ij}^2 + \sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8} L_{ij}^2\right). \tag{17}$$

Данное выражение тождественно

$$K_2 = \sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=8} L_{ij}^2 + 2$$

в формуле (14), которое было получено ранее при поиске операторов, коммутирующих при вращениях L_{1-4} и L_{5-8}.

Все вышесказанное явным образом фиксирует, что оператор K_2, будучи оператором Казимира $SU(1,1)$, относится к коммутанту L_{1-4} и L_{5-8} в $U\left(u(8)\right)$.

Аналогичное вычисление показывает, что оператор Казимира $SU(1,1)$ для представления $J^{(ij)}$ задается квадратом соответствующего генератора вращения в $U(8)$, а именно:

$$C^{(ij)} = L_{ij}^2. \tag{18}$$

Отсюда следует, что структурные константы алгебры Хана становятся на основе (6)

$$\delta_1 = 4\left(J_0^{(1-4)} + J_0^{(5-8)}\right)\left(C^{(1-4)} - C^{(5-8)}\right) \equiv 2\left(\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4} L_{ij}^2 - \sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8} L_{ij}^2\right)H;$$
$$\delta_2 = 2\left(J_0^{(1-4)} + J_0^{(5-8)}\right)^2 + 4\left(C^{(1-4)} + C^{(5-8)}\right) \equiv \frac{1}{2}H^2 + 4\left(\sum_{(i<j)=1}^{(i<j)=4} L_{ij}^2 + \sum_{(i<j)=5}^{(i<j)=8} L_{ij}^2\right) \qquad (19)$$

в полном соответствии с (15). Конечно, $K_3 = [K_1, K_2]$.

Таким образом, установлено, что вложение алгебры Хана в $SU(1,1) \otimes SU(1,1)$ приводит к его описанию как коммутанта в $U(u(8))$ согласно парности представлений $SU(1,1)$ и $U(8)$ в рамках двойственности Хоу.

Заключение. Рассмотрены два разных, но изоморфных представления одной алгебры в свете двойственности Хоу: алгебра Хиггса и алгебра Хана. Показана в явном виде реализация данной алгебры, с одной стороны, как коммутанта $O(4) \oplus O(4)$ подалгебры $U(8)$ в осцилляторном представлении универсальной обертывающей алгебры $U(u(8))$ и, с другой стороны, как вложение дискретной версии алгебры Хана в двойное тензорное произведение $SU(1,1) \otimes SU(1,1)$. Эти две реализации отражают тот факт, что $SU(1,1)$ и $U(8)$ образуют двойственную пару в пространстве состояний гармонического осциллятора в восьми измерениях. Аналогичное рассмотрение как для других размерностей гармонического осциллятора, так и для вложения в N-тензорное произведение $SU(1,1)^{\otimes N}$ достаточно очевидно (в частности, для алгебры Рака или N = 3 [29]) и будет выполнено в последующих работах. Также представляется актуальным в будущем проанализировать q-обобщение.

Список использованных источников

1. Грановский, Я. И. Точно решаемые задачи и их квадратичные алгебры / Я. И. Грановский, А. С. Жеданов. – Донецк: ДонФТИ, 1989. – 40 с. – (Препринт / Донец. физ.-тех. ин-т; ДонФТИ-89-7).

2. Жеданов, А. С. Скрытая симметрия полиномов Аски – Вильсона / А. С. Жеданов // Теорет. и мат. физика. – 1991. – Т. 89, № 2. – С. 190–204.

3. Грановский, Я. И. Квадратичная алгебра и динамическая симметрия уравнения Шредингера / Я. И. Грановский, А. С. Жеданов, И. М. Луценко // ЖЭТФ. – 1991. – Т. 99, № 2. – С. 353–361.

4. Granovskii, Y. I. Mutual integrability, quadratic algebras, and dynamical symmetry / Y. I. Granovskii, I. M. Lutsenko, A. S. Zhedanov // Ann. Phys. – 1992. – Vol. 217, № 1. – P. 1–20. https://doi.org/10.1016/0003-4916(92)90336-k

5. Луценко, И. М. Об алгебре Якоби и порождаемых ею потенциалах / И. М. Луценко // Теорет. и мат. физика. – 1992. – Т. 93, № 1. – С. 3–16.

6. Higgs, P. W. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I / P. W. Higgs // J. Phys. A: Math. General. – 1979. – Vol. 12, № 3. – P. 309–323. ttps://doi.org/10.1088/0305-4470/12/3/006

7. Leemon, H. I. Dynamical symmetries in a spherical geometry. II / H. I. Leemon // J. Phys. A: Math. General. – 1979. – Vol. 12, № 4. – P. 489–501. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/4/009

8. Курочкин, Ю. А. Аналог вектора Рунге – Ленца и спектр энергий в задаче Кеплера на трехмерной сфере / Ю. А. Курочкин, В. С. Отчик // Докл. акад. наук БССР. – 1979. – Т. 23, № 11. – С. 987–990.

9. Богуш, А. А. О квантовомеханической задаче Кеплера в пространстве Лобачевского / А. А. Богуш, Ю. А. Курочкин, В. С. Отчик // Докл. акад. наук БССР. – 1980.– Т. 24, № 1. – С. 19–22.

10. Bogush, A. A. Algebra of conserved operators for the Kepler – Coulomb problem in the spaces of constant curvature / A. A. Bogush, Yu. A. Kurochkin, V. S. Otchik // Physics of Atomic Nuclei. – 1998. – Vol. 61, № 10. – P. 1778–1781.

11. Gritsev, V. V. The Higgs algebra and the Kepler problem in R^3 / V. V. Gritsev, Y. A. Kurochkin // J. Phys. A: Math. General. – 2000. – Vol. 33, № 22. – P. 4073–4080. https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/22/310

12. Gritsev, V. V. Nonlinear symmetry algebra of the MIC-Kepler problem on the sphere S^3 / V. V. Gritsev, Y. A. Kurochkin, V. S. Otchik // J. Phys. A: Math. General. – 2000. – Vol. 33, № 27. – P. 4903–4910. https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/27/307

13. Granovskii, Y. I. Quadratic algebra as a ‘hidden’ symmetry of the Hartmann potential / Y. I. Granovskii, I. M. Lutsenko, A. S. Zhedanov // J. Phys. A: Math. General. – 1991. – Vol. 24, № 16. – P. 3887–3894. ttps://doi.org/10.1088/0305-4470/24/16/024

14. Zhedanov, A. S. Hidden symmetry algebra and overlap coefficients for two ring-shaped potentials / A. S. Zhedanov // J. Phys. A: Math. General. – 1993. – Vol. 26, № 18. – P. 4633–4642. https://doi.org/10.1088/0305-4470/26/18/027

15. Gal’bert, O. F. Dynamical symmetry of anisotropic singular oscillator / O. F. Gal’bert, Y. I. Granovskii, A. S. Zhedanov // Phys. Lett. A. – 1991. – Vol. 153, № 4/5. – P. 177–180. https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90789-b

16. Грановский, Я. И. Квадратичные алгебры и динамика в искривленном пространстве. I. Осциллятор / Я. И. Грановский, А. С. Жеданов, И. М. Луценко // Теорет. и мат. физика. – 1992. – Т. 91, № 2. – С. 207–216.

17. Грановский, Я. И. Квадратичные алгебры и динамика в искривленном пространстве. II. Проблема Кеплера / Я. И. Грановский, А. С. Жеданов, И. М. Луценко // Теорет. и мат. физика. – – 1992. – Т. 91, № 3. – С. 396–410.

18. The Higgs and Hahn algebras from a Howe duality perspective / L. Frappat [et al.] // Physics Letters A. – 2019. – Vol. 383, №. 14. – P. 1531–1535. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.024

19. Bellucci, S. The second Hopf map and Yang-Coulomb system on a 5D (pseudo)sphere / S. Bellucci, J. Toppan, V. Yeghikyan // J. Phys. A: Math. General. – 2010. – Vol. 43, № 4. – P. 045205. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/4/045205

20. Generalized KS transformation: from five-dimensional hydrogen atom to eight-dimensional isotropic oscillator / Davtyan, L. S., [et al.] // J. Phys. A: Math. General. – 1987. – Vol. 20, № 17. – P. 6121–6126. https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/17/044

21. Mardoyan, L. G. 8D oscillator as a hidden SU(2)-monopole / L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan. – Dubna: JINR, 1998. – 14 p. – (Preprint / Joint Institute for Nuclear Research; E2-98-14).

22. Mardoyan, L. G. Hidden symmetry of the Yang-Coulomb system / L. G. Mardoyan, A. N. Sissakian, V. M. Ter-Antonyan // Mod. Phys. Lett. A. – 1999. – Vol. 14, № 19. – P. 1303–1307. https://doi.org/10.1142/s0217732399001395_

23. Mardoyan, L. G. Dyon-oscillator duality. Hidden symmetry of the Yang-Coulomb monopole / L. G. Mardoyan // Superintegrability in Classical and Quantum Systems. – 2004. – Vol. 37. – P. 99–108. https://doi.org/10.1090/crmp/037/09

24. Marquette, I. Generalized five-dimensional Kepler system, Yang-Coulomb monopole, and Hurwitz transformation / I. Marquette // J. Math. Phys. – 2012. – Vol. 53, № 2. – P. 022103–12. https://doi.org/10.1063/1.3684955

25. Pletyukhov, M. V. 8D oscillator and 5D Kepler problem: The case of nontrivial constraints / M. V. Pletyukhov, E. M. Tolkachev // J. Math. Phys. – 1999. – Vol. 40, № 1. – P. 93–100. https://doi.org/10.1063/1.532761

26. Pletyukhov, M. V. Hurwitz transformation and oscillator representation of a 5D isospin particle / M. V. Pletyukhov, E. M. Tolkachev // Rep. Math. Phys. – 1999. – Vol. 43, № 1/2. – P. 303–311. https://doi.org/10.1016/s0034-4877(99)80039-1_

27. Pletyukhov, M. V. SO(6,2) dynamical symmetry of the SU(2) MIC-Kepler problem / M. V. Pletyukhov, E. M. Tolkachev // J. Phys. A: Math. General. – 1999. – Vol. 32, № 23. – P. L249–L253. https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/23/101

28. The generalized Racah algebra as a commutant / J. Gaboriaud [et al.] // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – Vol. 1194. – P. 012034. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1194/1/012034

29. The Racah algebra as a commutant and Howe duality / J. Gaboriaud [et al.] // J. Phys. A: Math. Theor. – 2018. – Vol. 51, № 50. – P. 50LT01. https://doi.org/10.1088/1751-8121/aaee1a

30. Howe, R. Remarks on Classical Invariant Theory / R. Howe // Trans. Am. Math. Soc. – 1989. – Vol. 313, № 2. – P. 539–570. https://doi.org/10.2307/2001418

31. Dual pairing of symmetry and dynamical groups in physics / D. J. Rowe [et al.] // Rev. Modern Phys. – 2012. – Vol. 84, № 2. – P. 711–757. https://doi.org/10.1103/revmodphys.84.711

References

1. Granovskii Ya. I., Zhedanov, A. S. *Exactly Solvable Problems and their Quadratic Algebras*. Donetsk, DonFTI, 1989. 40 p. (in Russian).

2. Zhedanov A. S. Hidden symmetry of the Askey – Wilson polynomials. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1991, vol. 89, no. 2, pp. 1146–1157. https://doi.org/10.1007/bf01015906

3. Granovskii Ya. I., Zhedanov A. S., Lutsenko I. M. Quadratic algebras and dynamical symmetry of the Schrödinger equation. *Zhurnal Eksperimental'noi i Teoreticheskoi Fiziki = Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 1991, vol. 99, no. 2, pp. 353–361 (in Russian).

4. Granovskii Y. I., Lutsenko I. M., Zhedanov A. S. Mutual integrability, quadratic algebras, and dynamical symmetry. *Annals of Physics*, 1992, vol. 217, no. 1, pp. 1–20. https://doi.org/10.1016/0003-4916(92)90336-k

5. Lutsenko I. M. Jacobi algebra and potentials generated by it. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 93, no. 1, pp. 1081–1090. https://doi.org/10.1007/bf01016465

6. Higgs P. W. Dynamical symmetries in a spherical geometry. I. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1979, vol. 12, no. 3, pp. 309–323. ttps://doi.org/10.1088/0305-4470/12/3/006

7. Leemon H. I. Dynamical symmetries in a spherical geometry. II. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1979, vol. 12, no. 4, pp. 489–501. https://doi.org/10.1088/0305-4470/12/4/009

8. Kurochkin, Yu. A., Analogue of the Runge – Lenz vector and the energy spectrum in the Kepler problem on a three-dimensional sphere. *Doklady akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1979, vol. 23, no. 11, pp. 987–990 (in Russian).

9. Bogush A. A., Kurochkin Yu. A., Otchik V. S. On the Kepler quantum-mechanical problem in Lobachevsky space] *Doklady akademii nauk BSSR* [Doklady of the Academy of Sciences of BSSR], 1980, vol. 24, no. 1, pp 19–22 (in Russian).

10. Bogush A. A., Kurochkin Yu. A., Otchik V. S. Algebra of conserved operators for the Kepler –Coulomb problem in the spaces of constant curvature. *Physics of Atomic Nuclei*, 1998, vol. 61, no. 10, pp. 1778–1781.

11. Gritsev V. V., Kurochkin, Y. A. The Higgs algebra and the Kepler problem in R^3. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2000, vol. 33, no. 22, pp. 4073–4080. https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/22/310

12. Gritsev V. V., Kurochkin Y. A., Otchik V. S. Nonlinear symmetry algebra of the MIC-Kepler problem on the sphere S^3. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2000, vol. 33, no. 27, pp. 4903–4910. https://doi.org/10.1088/0305-4470/33/27/307

13. Granovskii Y. I., Lutsenko I. M., Zhedanov A. S. Quadratic algebra as a ‘hidden’ symmetry of the Hartmann potential. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1991, vol. 24, no. 16, pp. 3887–3894. ttps://doi.org/10.1088/0305-4470/24/16/024

14. Zhedanov A. S. Hidden symmetry algebra and overlap coefficients for two ring-shaped potentials. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1993, vol. 26, no. 18, pp. 4633–4642. https://doi.org/10.1088/0305-4470/26/18/027

15. Gal’bert O. F., Granovskii Y. I., Zhedanov A. S. Dynamical symmetry of anisotropic singular oscillator. *Physics Letters A*, 1991, vol. 153, no. 4–5, pp. 177–180. https://doi.org/10.1016/0375-9601(91)90789-b

16. Granovskii Ya. I., Zhedanov A. S., Lutsenko I. M. Quadratic algebras and dynamics in curved spaces. I. Oscillator. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 91, no. 2, pp. 474–480. https://doi.org/10.1007/bf01018846

17. Granovskii, Ya. I., Zhedanov, A. S., Lutsenko, I. M. Quadratic algebras and dynamics in curved spaces. II. The Kepler problem. *Theoretical and Mathematical Physics*, 1992, vol. 91, no. 3, pp. 604–612. https://doi.org/10.1007/bf01017335

18. Frappat, L., Gaboriaud J., Vinet, L., Vinet, S., Zhedanov, A. S. The Higgs and Hahn algebras from a Howe duality perspective. *Physics Letters A*, 2019, vol. 383, no. 14, pp. 1531–1535. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2019.02.024

19. Bellucci S., Toppan J.,Yeghikyan V. The second Hopf map and Yang-Coulomb system on a 5D (pseudo)sphere. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 2010, vol. 43, no. 4, p. 045205. https://doi.org/10.1088/1751-8113/43/4/045205

20. Davtyan L. S., Mardoyan L. G., Pogosyan G. S., Sissakian A. N., Ter-Antonyan V. M. Generalized KS transformation: from five-dimensional hydrogen atom to eight-dimensional isotropic oscillator. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1987, vol. 20, no. 17, pp. 6121–6126. https://doi.org/10.1088/0305-4470/20/17/044_

21. Mardoyan L. G., Sissakian A. N., Ter-Antonyan V. M. 8D oscillator as a hidden SU(2)-monopole. Dubna, JINR, 1998. 4 p. (Preprint / Joint Institute for Nuclear Research E2-98-14).

22. Mardoyan L. G., Sissakian A. N., Ter-Antonyan V. M. Hidden symmetry of the Yang-Coulomb system. *Modern Physics Letters A*, 1999, vol. 14, no. 19, pp. 1303–1307. https://doi.org/10.1142/s0217732399001395

23. Mardoyan, L. G. Dyon-oscillator duality. Hidden symmetry of the Yang-Coulomb monopole. *Superintegrability in Classical and Quantum Systems*, 2004, vol. 37, pp. 99–108. https://doi.org/10.1090/crmp/037/09

24. Marquette I. Generalized five-dimensional Kepler system, Yang-Coulomb monopole, and Hurwitz transformation. *Journal of Mathematical Physics*, 2012, vol. 53, no. 2, pp. 022103–12. https://doi.org/10.1063/1.3684955

25. Pletyukhov M. V., Tolkachev E. M. 8D oscillator and 5D Kepler problem: The case of nontrivial constraints. *Journal of Mathematical Physics,* 1999, vol. 40, no. 1, pp. 93–100. https://doi.org/10.1063/1.532761

26. Pletyukhov M. V., Tolkachev E. M. Hurwitz transformation and oscillator representation of a 5D isospin particle. *Reports on Mathematical Physics,* 1999, vol. 43, no. 1–2, pp. 303–311. https://doi.org/10.1016/s0034-4877(99)80039-1

27. Pletyukhov M. V., Tolkachev E. M. SO(6,2) dynamical symmetry of the SU(2) MIC-Kepler problem. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 1999, vol. 32, no. 23, pp. L249–L253. https://doi.org/10.1088/0305-4470/32/23/101

28. Gaboriaud J., Vinet L., Vinet S., Zhedanov A. S. The generalized Racah algebra as a commutant. *Journal of Physics: Conference Series,* 2019, vol. 1194, pp. 012034. https://doi.org/10.1088/1742-6596/1194/1/012034

29. Gaboriaud J., Vinet L., Vinet S., Zhedanov A. S. The Racah algebra as a commutant and Howe duality. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2018, vol. 51, no. 50, pp. 50LT01. https://doi.org/10.1088/1751-8121/aaee1a

30. Howe R. Remarks on Classical Invariant Theory. *Transactions of the American Mathematical Society*, 1989, vol. 313, no. 2, pp. 539–570. https://doi.org/10.2307/2001418

31. Rowe D. J., Carvalho M. J., Repka J. Dual pairing of symmetry and dynamical groups in physics. *Reviews of Modern Physics*, 2012, vol. 84, no. 2, pp. 711–757. https://doi.org/10.1103/revmodphys.84.711

Информация об авторах

Лаврёнов Александр Николаевич – кандидат физико-математических наук, доцент, доцент кафедры информационных технологий в образовании, Белорусский государственный педагогический университет им. М. Танка (ул. Советская, 18, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). Email: lanin0777@mail.ru. https://orcid.org/0000-0001-7384-3621

Лаврёнов Иван Александрович – ведущий специалист, ООО «Октонион технолоджи» (ул. Я. Купалы, 25, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). Email: lanin99@mail.ru. https://orcid.org/0000-0002-3650-8987

Information about the authors

Alexandre N. Lavrenov – Ph. D. (Physics and Mathematics), Assistant Professor, Assistant Professor of the Department of the Chair of Information Technologies in Education, Belarusian State Pedagogical University named after Maxim Tank (18, Sovetskaya Str., 220050, Minsk, Republic of Belarus). Email: lanin0777@mail.ru. https://orcid.org/0000-0001-7384-3621

Ivan A. Lavrenov – Leading Specialist, Octonion Technology, Ltd. (25, Ya. Kupala Str., 220030, Minsk, Republic of Belarus). Email: lanin099@mail.ru. https://orcid.org/0000-0002-3650-8987