Е. П. Кузнецова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка,

Г. Л. Муравьёва, заведующая кафедрой естественнонаучных дисциплин Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка, кандидат педагогических наук, доцент,

Л. Б. Шнеперман, кандидат физико-математических наук, профессор,

Б. Ю. Ящин, учитель математики высшей квалификационной категории

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ (НЕИЗВЕСТНЫМИ)

Окончание. Начало в № 1, 2

4. Система линейных уравнений как математическая модель описания реальных процессов

К необходимости составлять и решать системы линейных уравнений с несколькими переменными приводят многие реальные проблемы: определение условий получения наибольшей прибыли, кодирование информации и расшифровка текстов, поиск дефектов в деталях и т. д. Соответствующие математические модели и методы решения практических задач изучает линейная алгебра. Во второй половине XX в. возник самостоятельный раздел математики — вычислительная линейная алгебра, в котором с помощью компьютеров решаются системы линейных уравнений со многими переменными, моделирующие важные производственные и социальные процессы.

Системы линейных уравнений с двумя переменными можно применять в качестве математических моделей условий текстовых задач.

Напомним, что прежде уже использовались различные математические модели условий текстовых задач и разнообразной числовой информации: отрезки, схемы, диаграммы (*графические модели*), таблицы, числовые выражения и равенства (*арифметические модели*), выражения и уравнения с одной или несколькими переменными (*алгебраические модели*).

Задача 1. Фисташковое мороженое в супермаркете в среду продавали по цене 1 рубль 5 копеек, а при проведении акции в четверг стали продавать по 55 копеек. Всего за эти два дня было продано 352 пачки такого мороженого. По сколько пачек фисташкового мороженого было продано в среду и в четверг, если выручка за него в эти дни оказалась одинаковой?

Р е ш е н и е. Пусть в среду продали x пачек, а в четверг — y пачек фисташкового мороженого. По условию задачи запишем уравнение с двумя переменными $x + y = 352$. В среду выручка за это мороженое составила $1,05x$ рублей, а в четверг — $0,55y$ рублей. По условию задачи запишем ещё одно уравнение: $1,05x = 0,55y$ (поясните смысл каждого из двух полученных уравнений). Таким образом, составим систему уравнений с двумя неизвестными (математическую модель условия этой задачи) и решим её способом подстановки:

$$\begin{cases} x+y=352, \\ 1,05x=0,55y; \mid \cdot 20 \end{cases} \quad \begin{cases} y=352-x, \\ 21x-11y=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=352-x, \\ 21x-11\cdot(352-x)=0. \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы получим $x = 121$, тогда из её первого уравнения найдём $y = 231$ (убедитесь в этом).

Итак, в среду продали 121 пачку, а в четверг — 231 пачку фисташкового мороженого. Эти результаты правдоподобны для торговли в большом городе.

О т в е т: 121 пачка, 231 пачка.

С помощью систем уравнений с двумя переменными (неизвестными) удобно решать такие задачи, в которых речь идёт о каких-либо двух объектах и их количественных характеристиках.

В процессе ***решения текстовой задачи с использованием системы линейных уравнений с двумя неизвестными (переменными) в качестве математической модели её условия*** можно выделить следующие ***этапы*** (аналогичные этапы выделялись и при моделировании условия текстовой задачи уравнением с одной переменной):

- составление системы уравнений;
- решение составленной системы уравнений;
- возможные дополнительные вычисления (в случае необходимости);
- проверка соответствия полученного решения системы уравнений смыслу задачи;
- ответ на вопрос задачи.

Заметим: если при решении задачи математической моделью её условия является уравнение с одной неизвестной (переменной) или система уравнений с несколькими неизвестными (переменными), то говорят, что ***задача решается алгебраическим способом (методом)***.

Задача 2. В двух коробках находится 100 теннисных шариков. Из первой коробки 8 шариков переложили во вторую, после чего число шариков в первой коробке стало в два раза меньше, чем число шариков во второй коробке. Сколько шариков было в каждой коробке первоначально?

Р е ш е н и е. Пусть в первой коробке было x шариков, а во второй коробке — y шариков, тогда по условию задачи можно записать первое уравнение:

$$x + y = 100.$$

После того как из первой коробки во вторую переложили 8 шариков, в первой коробке стало $(x - 8)$ шариков, а во второй коробке стало $(y + 8)$ шариков. Так как по условию задачи число шариков во второй коробке стало в 2 раза больше, чем в первой, то получают второе уравнение: $y + 8 = 2(x - 8)$ (поясните смысл каждого из двух уравнений).

Составим систему уравнений с двумя неизвестными (математическую модель условия этой задачи) и решим её способом подстановки:

$$\begin{cases} x+y=100, \\ y+8=2(x-8); \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=100-x, \\ 100-x+8=2(x-8). \end{cases}$$

Из второго уравнения последней системы получим $x = 41\frac{1}{3}$, тогда из первого её уравнения найдём $y = 58\frac{2}{3}$ (убедитесь в этом).

Проверим, соответствуют ли найденные значения неизвестных смыслу задачи. Количество шариков в каждой коробке должно выражаться натуральным числом, поэтому значения $41\frac{1}{3}$ и $58\frac{2}{3}$ не могут быть указаны в ответе. Убедившись, что ошибок в решении задачи нет (модель её условия и решение полученной системы уравнений — верны), делаем вывод: в условии задачи приведены **недостоверные данные**.

Ответ: нет решения.

Задача 3. Пластиковая бутылка разлагается в природе на 10 лет дольше, чем жестяная консервная банка. Если использовать новые материалы, которые разлагаются под воздействием света, то время разложения бутылки можно уменьшить в 2 раза, а банки — в 5 раз, причём бутылка из нового пластика будет разлагаться на 32 года дольше, чем банка из нового материала. Найти время разложения в природе пластиковой бутылки и время разложения жестяной банки, которые изготовлены по прежней технологии.

Решение. Пусть до изменения технологии время разложения в природе пластиковой бутылки — x лет, а жестяной консервной банки — y лет. Тогда по условию задачи составим систему уравнений (поясните смысл каждого из уравнений):

$$\begin{cases} x - 10 = y, \\ \frac{1}{2}x - 32 = \frac{1}{5}y. \end{cases}$$

Подставив во второе уравнение системы $y = x - 10$, получим уравнение с одной переменной x:

$$\frac{1}{2}x - 32 = \frac{1}{5}(x - 10).$$

Решив это уравнение, найдём $x = 100$ (убедитесь в этом). Значит, $y = 90$.

Итак, время разложения в природе (до изменения технологии) пластиковой бутылки — 100 лет, а жестяной консервной банки — 90 лет. **Эти результаты соответствуют информации из справочной литературы.**

Ответ: 100 лет; 90 лет.

Вопросы для самоконтроля

1. Какие реальные процессы можно описать математической моделью в виде системы линейных уравнений?
2. Назовите известные вам математические модели условия текстовой задачи.
3. Какие этапы можно выделить в процессе решения задачи при моделировании её условия с помощью системы линейных уравнений с двумя переменными?
4. Какие способы (методы) решения текстовых задач называют алгебраическими?

Упражнения

65. ■ Задача Бхаскары (индийского математика и астронома XII в.).

Некто сказал другу: «Дай мне 100 рупий, и я буду вдвое богаче тебя». Друг ответил: «Дай мне только 10 рупий, и я стану в 6 раз богаче тебя». Сколько рупий было у каждого? ■

1) Определите, какая система линейных уравнений из двух предложенных верно моделирует условие этой задачи (поясните почему).

а) $\begin{cases} x + 100 = 2(y - 100), \\ y + 10 = 6(x - 10). \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + 100 = y, \\ y + 10 = 6x. \end{cases}$

2) Решите выбранную систему уравнений.

3) Можно ли аргументированно указать правильный вариант ответа к задаче из двух записанных ниже, не решая выбранной системы уравнений?

О т в е т: а) 22 рупий; 122 рупий; б) 40 рупий; 170 рупий.

66. 1) Одно целое число больше другого на 13. Найдите эти числа, зная, что их сумма равна 80.

2) Из двух натуральных чисел одно число меньше другого на 15. Найдите эти числа, зная, что их сумма равна 11.

67. 1) Сумма двух чисел равна 90. Если одно число разделить на другое, то в частном получится 5, а в остатке 6. Найдите эти числа.

2) Одно число на 17 больше удвоенного второго числа. Если одно число разделить на другое, то в частном получится 7, а в остатке 2. Найдите эти числа.

68. 1) Представьте число 220 в виде суммы двух слагаемых так, чтобы частное от деления одного из них на 4 было равно частному от деления другого на 7.

2) Число 123 представьте в виде суммы двух слагаемых так, чтобы частное от деления одного из них на 2 равнялось произведению другого на 20.

69. 1) Одно число больше другого на 51. Если его разделить на другое, то в частном получится 2 и в остатке 8. Найдите эти числа.

2) Одно число меньше другого на 123. Если одно из этих чисел разделить на другое, то в частном получится 5 и в остатке 7. Найдите эти числа.

70. 1) Десятирублёвые и двадцатирублёвые купюры сложили в пачку. Сколько десятирублёвых купюр и сколько двадцатирублёвых купюр в пачке, если в ней при подсчёте оказалось 770 рублей и десятирублёвых купюр на восемь больше, чем двадцатирублёвых купюр?

2) Бабушка подарила внукам Пете и Серёже по копилке с монетами. Когда копилки разбили, то оказалось, что у Пети все монеты достоинством по 50 копеек, а у Серёжи все монеты достоинством по 2 рубля. После подсчётов оказалось, что каждому из братьев досталась одна и та же сумма денег в рублях, а в обеих копилках было всего 95 монет. Сколько монет было в копилке у Пети?

71. 1) На первой полке книг в три раза меньше, чем на второй. Если с первой полки взять 7 книг, а на вторую поставить 9, то книг на первой полке будет в 5 раз меньше, чем на второй. Сколько книг было на каждой полке первоначально?

2) Первый кусок ситца вдвое больше, чем второй. Если от каждого из них отрезать по 13 м, то в первом куске будет в 2,5 раза больше ткани, чем во втором. Сколько метров ситца было первоначально в каждом куске?

72. 1) Отряд туристов, подойдя к реке, рассчитал, что если посадить в каждую лодку по 6 человек, то трое останутся без места, а если в каждую лодку посадить по 7 человек, то одно место будет свободным. Сколько было туристов и лодок?

2) Для перевозки некоторого количества контейнеров были заказаны грузовые машины. Оказалось, что если погрузить на каждую машину по 9 контейнеров, то для четырёх контейнеров не хватит на машинах места. Если же на каждую машину погрузить по 12 контейнеров, то 5 мест на машинах останутся свободными. Сколько было контейнеров и сколько заказали машин?

73. 1) Лодка с постоянной собственной скоростью плывёт по течению реки от деревни Лесная до деревни Полевая 3 ч. Возвращение в Лесную занимает 4 ч. Сколько времени понадобится, чтобы проплыть этот же путь до деревни Полевой по течению на плоту?

2) Лодка с постоянной собственной скоростью плывёт от деревни Гагики до деревни Машки по течению реки Оль 2 ч, а возвращается за 3 ч. Сколько времени плыла бы лодка от Гагиков до Машков, если бы не было течения?

74. 1) В карьере работают самосвалы двух грузоподъёмностей. Три самосвала одной грузоподъёмности и два — другой за один раз перевозят 55 т груза, а пять самосвалов одного типа и семь — другого за один раз перевозят 110 т груза. Найдите грузоподъёмности самосвалов.

2) Маршрут обслуживается двумя автобусами с различным числом посадочных

мест. За 5 рейсов они могут перевезти, будучи заполненными, 535 человек. Если один автобус выполнит 12 рейсов, а другой — 8 рейсов, то они перевезут, будучи заполненными, 1104 человека. Найдите, сколько мест в каждом автобусе.

75. 1) За 5 дней работы токаря Сергея и 3 дня работы токаря Дмитрия было выполнено $\frac{7}{12}$ всего задания. За сколько дней каждый токарь мог выполнить все задание, если за 2 дня Сергей выполнит столько же, сколько Дмитрий выполнит за 3 дня?

2) Для наполнения бассейна работают два крана. Если оба крана будут включены 2 ч, то второй кран закончит наполнение бассейна за 10 ч, а если оба крана будут включены 3 ч, то первый закончит наполнение бассейна за 5 ч. За какое время каждый кран может наполнить бассейн?

76. 1) Если длину прямоугольника увеличить в 3 раза, а ширину — в 2 раза, то периметр получившегося прямоугольника будет равным 164 см, а если длину уменьшить в 3 раза, а ширину увеличить в 5 раз, то периметр будет равен 66 см. Найдите площадь данного прямоугольника.

2) Если длину прямоугольника увеличить в 7 раз, а ширину — в 6 раз, то периметр получившегося прямоугольника будет равным 92 дм, а если длину увеличить в 3 раза, а ширину — в 4 раза, то периметр будет равен 48 дм. Найдите площадь данного прямоугольника.

77. 1) Для оклейки верхнего края обоев в зале понадобилось 36 м бордюра. Найдите объём зала, если его длина в 2,6 раза больше ширины, а высота составляет $\frac{3}{5}$ ширины.

2) Дно аквариума имеет форму прямоугольника, периметр которого 20 дм. Длина прямоугольника в 1,5 раза больше ширины. Найдите высоту аквариума, если его объём равен 72 дм^3.

78. 1) Известно, что сумма 5 % первого числа и 25 % второго числа равна 85, а сумма 13 % первого числа и 17 % второго числа равна 77. Найдите эти числа.

2) Известно, что если первое число уменьшить на 10 %, а второе — увеличить на 30 %, то сумма увеличится на 6, а если первое число уменьшить на 20 %, а второе на — 10 %, то сумма уменьшится на 16. Найдите эти числа.

79. 1) Имеется два раствора поваренной соли разной концентрации. Если взять вместе 70 г первого раствора и 130 г второго раствора, то получится 29-процентный раствор, а если взять вместе 120 г первого раствора и 80 г второго раствора, то получится 49-процентный раствор. Найдите концентрацию каждого раствора.

2) Имеется два слитка, содержащих золото и медь. Первый слиток содержит 240 г золота и 60 г меди, второй – 320 г золота и 180 г меди. Сколько надо взять от каждого слитка, чтобы получить 400 г сплава 74-процентного золота?

80. 1) В химической лаборатории имеются 15-процентный и 25-процентный растворы кислоты. Сколько граммов каждого раствора надо взять, чтобы получить 400 г 20-процентного раствора?

2) В одном сплаве содержится 40 % меди, а в другом — 60 %. Сколько килограммов каждого сплава надо взять, чтобы получить 70 кг нового сплава, в котором медь составляет 45 %?

Задания для исследования

1. Математической моделью условия некоторой задачи является система линейных уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} x + 3y = 17, \\ 7x + 2y = 24. \end{cases}$$

Составьте текстовую задачу по этой модели и решите её.

2. Решите составленную задачу, используя другие известные вам виды математических моделей её условия (графические, арифметические, алгебраические) и проанализируйте достоинства и недостатки разных способов её решения.

3. Решите следующую задачу.

В мебельной мастерской по изготовлению стеллажей необходимо из стандартных листов фанеры вырезать 261 крупную заготовку и 822 мелких заготовок прямоугольной формы. Александр из одного листа фанеры вырезает 3 крупных заготовки и 6 мелких, а Борис — 2 крупных заготовки и 7 мелких. Сколько листов фанеры следует выдать Александру, а сколько — Борису?

Проанализируйте: сколько потребуется листов фанеры для изготовления нужного числа заготовок двух видов, если их будет вырезать:

а) только Александр; б) только Борис.

Проектные задания по теме «Системы линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными)»

Проект 1. «Скидки»

1. Изучите данные о скидках на какой-нибудь товар в магазине или на рынке. Составьте таблицу с двумя вариантами цен (до скидки или акции и после) на несколько товаров.

2. Прочитайте ещё раз решение задачи 1 из пункта 4, подумайте: какую можно составить задачу с данными из вашей таблицы.

3. С использованием данных из вашей таблицы составьте такую текстовую задачу, чтобы математической моделью её условия была система линейных уравнений с двумя неизвестными (буквами x и y можно обозначить, например, старую цену до скидки и новую цену одного из товаров).

4. Предложив решить задачу, составленную вами, одноклассникам, проверьте, смогут ли они получить значения неизвестных, соответствующие данным из вашей таблицы.

Проект 2. «Платежи»

1. Изучите по квитанциям за два месяца данные по оплате в вашей квартире: горячего водоснабжения (подогрев), холодного водоснабжения или электроэнергии (следует выбрать такие месяцы, в которых были израсходованы разные объёмы этих услуг).

2. Составьте таблицу, в которой укажите за каждый месяц: объём одной из услуг (горячая вода, холодная вода, электроэнергия) в нужных единицах, соответствующий тариф (цену услуги за единицу её объёма) и начисленную к оплате сумму.

3. С использованием данных вашей таблицы за два месяца, составьте такую текстовую задачу о платежах (например, за электроэнергию), чтобы математической моделью её условия была система линейных уравнений с двумя неизвестными (обозначьте буквами x и y, например, количество киловатт за каждый месяц).

4. Предложив решить свою задачу одноклассникам, проверьте, смогут ли они получить значения неизвестных, соответствующие данным из вашей таблицы.

Проект 3. «Квартплата»

1. Изучите по квитанциям за прошедшие три месяца данные по оплате жилищно-коммунальных услуг в вашей квартире. Установите с помощью родителей, за какие из них взималась постоянная плата, а за какие оплата менялась в зависимости от потребляемых объёмов (например, оплата за горячее водоснабжение (подогрев), за холодное водоснабжение и др.).

2. Для каждого из указанных видов услуг, оплата которых зависит от объёма потребления, составьте таблицу, в которой укажите за каждый месяц объём их расходования в нужных единицах, соответствующий тариф (цену услуги за единицу её объёма) и начисленную за это плату. Постройте соответствующие столбчатые диаграммы.

3. Найдите ежемесячную стоимость всех тех жилищно-коммунальных услуг, оплата за которые постоянна, и составьте линейное уравнение с двумя переменными – математическую модель ежемесячной платы за квартиру. (Что можно взять в качестве двух переменных, если в квартире нет горячего водоснабжения?)

4. С учётом данных из ваших таблиц (за любые два месяца из трёх) составьте такую текстовую задачу о плате за квартиру, чтобы математической моделью её условия была система линейных уравнений с двумя переменными, а в качестве ответа получались бы тарифы (цены) за потребление единицы объёма соответствующей услуги.

5. Рассчитайте, потребление каких жилищно-коммунальных услуг и на сколько можно уменьшить по объёму, чтобы квартплата в сравнении с последним месяцем уменьшилась на 4 %.

Задания для самопроверки по теме «Системы линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными)»

1. Укажите, какое из уравнений является линейным уравнением с двумя переменными (неизвестными).

а) $7x + 5 = 22$;
б) $7x + 5y^2 = 2$;
в) $7x + 5y - 22 = 0$;
г) $7x^{-1} + 5y - 2 = 0$.

2. Укажите пару чисел, которая не является решением линейного уравнения с двумя переменными $4x + 2y = -2$.

а) $(2; -5)$; б) $(-2; 3)$;
в) $(5; 11)$; г) $(-3; -5)$.

3. Выразите y через x из линейного уравнения с двумя переменными

$$8x - 14y = 9.$$

а) $y=-\frac{4}{7}x-\frac{9}{14}$; б) $y=\frac{4}{7}x-\frac{9}{14}$;
в) $y=\frac{4}{7}x+\frac{9}{14}$; г) $y=-\frac{4}{7}x+\frac{9}{14}$.

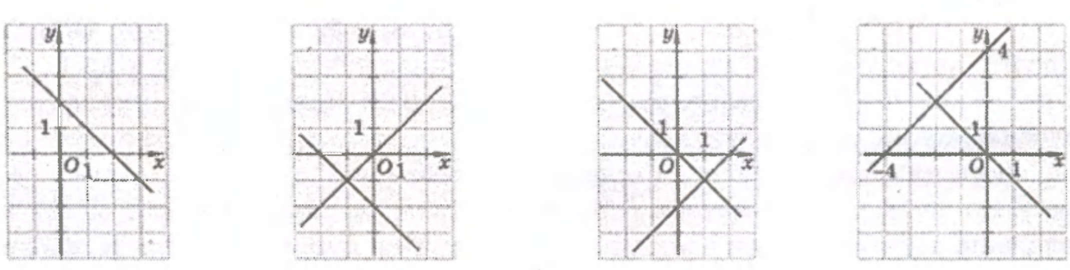
4. Укажите решение системы линейных уравнений с двумя переменными

$$\begin{cases} 5x+8y=-2, \\ x+2y=-4. \end{cases}$$

а) $(-18; 11)$; б) $(18; -11)$;
в) $(11; -18)$; г) $(-11; 18)$.

5. На рисунке 8 укажите графическую интерпретацию данной системы

$$\begin{cases} -x=y, \\ y-x=4. \end{cases}$$



а *б* *в* *г*

Рисунок 8

6. Укажите систему уравнений, которая имеет единственное решение.

а) $\begin{cases} 5x-3y=14, \\ 2x+y=10; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 6x-3y=6, \\ 2x-y=2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} y=1{,}5x+1{,}25, \\ 4y=6x+5; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 5x=y+7, \\ 0{,}5x=0{,}1y+10. \end{cases}$

7. Укажите систему уравнений, которая не имеет решения.

а) $\begin{cases} 8x-4y=-2, \\ -20x+10y=5; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 49x+21y=7, \\ -14x-6y=-2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-2y=6, \\ 3x+2y=-6; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x-y=4, \\ 6x-3y=8. \end{cases}$

8. Укажите систему уравнений, которая имеет бесконечное множество решений.

а) $\begin{cases} x-2y=8, \\ -2x+4y=-16; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x+2y=5, \\ -12x-8y=20; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x-2y=3, \\ -5x+10y=15; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x-3y=-7, \\ x-4y=-7. \end{cases}$

9. На туристическую базу приехали туристы. Если в каждую палатку поселить по 4 туриста, то 3 туриста окажутся без палатки, а если в каждую палатку поселить по 5 туристов, то 2 палатки окажутся свободными. Сколько приехало туристов и сколько было палаток?

Укажите ту систему уравнений, которая соответствует условию задачи, если x — количество палаток, а y — количество туристов.

а) $\begin{cases} 4x-y=3, \\ 5(x-2)=y; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x=y-3, \\ 5(x+2)=y; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 4x=y-3, \\ 5(x-2)=y; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-y=-3, \\ 5x-y-2. \end{cases}$

10. Решите задачу **9** и укажите ответ.

а) 13 туристов и 55 палаток; б) 55 туристов и 13 палаток; в) 65 туристов и 15 палаток; г) 48 туристов и 9 палаток.