Е. П. Кузнецова, кандидат педагогических наук, доцент кафедры математики и методики преподавания математики Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка,
Г. Л. Муравьёва, заведующая кафедрой естественнонаучных дисциплин Белорусского государственного педагогического университета им. Максима Танка, кандидат педагогических наук, доцент,
Л. Б. Шнеперман, кандидат физико-математических наук, профессор,
Б. Ю. Ящин, учитель математики высшей квалификационной категории

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ (НЕИЗВЕСТНЫМИ)

Продолжение. Начало в № 1

2. Система линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными) и её графическая интерпретация

Часто зависимость между переменными (неизвестными) описывается при помощи не одного, а нескольких уравнений. Рассмотрим задачу.

Задача. Турист 2 часа ехал на велосипеде до берега озера и 3 часа плыл по озеру на моторной лодке до базы. Скорость движения моторной лодки на 16 км/ч больше, чем велосипеда. Весь путь составил 108 км. С какой скоростью турист ехал на велосипеде и с какой скоростью — на моторной лодке (скорости велосипеда и лодки были постоянными)?

Будем рассуждать так. Пусть x км/ч — скорость движения туриста на велосипеде, а y км/ч — на моторной лодке. По условию задачи составим два уравнения с неизвестными (переменными) x и y, которые описывают зависимость между ними:

$2x + 3y = 108$ и $y - x = 16$ (объясните, как они получены).

Заметим: когда математической моделью некоторой ситуации являются **два уравнения с двумя переменными,** то в таких случаях говорят ***о системе уравнений с двумя переменными***.

Обычно уравнения системы записывают в столбик одно под другим и объединяют фигурной скобкой:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 108, \\ y - x = 16. \end{cases} \qquad (1)$$

■*Система* — слово греческого происхождения и в переводе означает *«составленное из частей», «соединение»*.■

Определение. ***Решением системы уравнений с двумя переменными (неизвестными)*** **называется упорядоченная пара значений переменных, которые обращают каждое уравнение данной системы в верное числовое равенство.**

Например, пара чисел (–1; –3) является решением системы уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y=3, \\ x^2-xy=4, \end{cases} \qquad (2)$$

но не является решением системы (1) (убедитесь в этом).

Определение. ***Решить систему уравнений*** **— это значит найти все её решения или доказать, что их нет.**

Заметим, что в этой главе будем говорить о ***системе двух линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными)***.

Систему двух линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными) в общем виде записывают так:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1, \\ a_2x+b_2y=c_2, \end{cases} \qquad (3)$$

где a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 — числа, а x, y — переменные (неизвестные). Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называют *коэффициентами при переменных x и y*, а числа c_1, c_2 — *свободными членами.*

Примером системы линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными) x и y является система (1), а система (2) к ним не относится (поясните почему).

Определение. Две системы уравнений называются *равносильными*, если каждое решение первой системы является решением второй и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой, т. е. если множества их решений совпадают.

Равносильными считаются и системы, которые не имеют решений.

Системы уравнений

$$\begin{cases} 2x+y=3, \\ x^2-y^2=4(x+y) \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y=3-2x, \\ x-y=4 \end{cases}$$

не являются равносильными, поскольку, например, упорядоченная пара чисел (3; –3), является решением первой системы, но не является решением второй системы (убедитесь в этом).

Будем считать, что в системе (3) хотя бы один из коэффициентов a_1, b_1 не равен нулю и что хотя бы один из коэффициентов a_2, b_2 не равен нулю. Тогда каждое линейное уравнение с двумя переменными системы (3) является уравнением прямой (см. пункт 1 этой главы).

Изображение двух прямых, определяемых уравнениями системы (2), на координатной плоскости в одной системе координат называют ***графической (геометрической) интерпретацией системы линейных уравнений с двумя переменными.***

Из геометрии известно, что две прямые на плоскости могут:

а) иметь одну общую точку (пересекаться);

б) не иметь общих точек (быть параллельными и не совпадать);

в) иметь бесконечно много общих точек (совпадать).

Графическая интерпретация системы двух линейных уравнений с двумя переменными **позволяет получить наглядные представления о числе её решений.** Количество решений такой системы равно числу общих точек двух прямых, определяемых уравнениями данной системы.

Пример 1. Определите число решений системы линейных уравнений, используя её графическую интерпретацию, и укажите эти решения:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x+y=4, \\ x-2y=7; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x+y=4, \\ 6x+3y=2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x+y=4, \\ 6x+3y=12. \end{cases}$$

Решение.

а) На координатной плоскости (рис. 4) изображены прямые, определяемые уравнениями данной системы. Эти прямые пересекаются в единственной точке M (x_0; y_0), координаты которой и являются решением системы, т. е. $x = x_0$, $y = y_0$. По рисунку 4 находим приближённые значения её координат: $x_0 \sim 3$, $y_0 \sim -2$ (поясните, почему использован знак приближённого равенства).

Подставив эти значения в уравнения данной системы вместо x и y (сделайте это), можно убедиться, что пара (3; −2) является её решением, поскольку обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

б) На координатной плоскости (рис. 5) изображены две прямые, определяемые уравнениями данной системы. Эти прямые параллельны и не совпадают, т. е. не имеют общих точек. Значит, данная система не имеет решений.

в) Уравнения данной системы равносильны, поскольку второе уравнение получается из первого почленным умножением на 3, поэтому оба уравнения имеют одни и те же решения. Значит, прямые — графики уравнений системы совпадают (рис. 6). Решением данной системы являются координаты любой точки прямой, заданной уравнением $2x + y = 4$. Итак, система имеет бесконечное множество решений — все пары вида $(t;\ 4-2t)$, где t — любое число.

Ответ: а) одно решение — (3; −2);

б) нет решений;

в) бесконечно много решений — все пары вида $(t;\ 4-2t)$, где t — любое число.

Замечание. Следует помнить, что, найденные с использованием графической интерпретации (ещё иногда говорят *графическим способом* или *графическим методом*), значения обеих переменных системы уравнений, как правило, получаются приближёнными; эти значения существенно зависят от качества и точности инструментов, с помощью которых изображаются графики уравнений данной системы.

Пример 2. Решить, используя графическую интерпретацию, систему уравнений

$$\begin{cases} x-3y=3, \\ 2x-y=3. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение. Для решения системы (4) нужно в одной системе координат изобразить графики обоих уравнений. Это уже было сделано при решении примера 4 в пункте 1 (см. рис. 3 на с. 46 предыдущего номера журнала). Решением системы (4) является числовая пара $(x_0;\ y_0)$ — координаты точки K, т. е. $x = x_0$, $y - y_0$. По рисунку 3 эти координаты могут быть указаны приближённо (поясните почему). Пусть, например, $x_0 \approx 1{,}1$ и $y_0 \approx -0{,}5$. Если подставить указанные значения вместо x и y в уравнения данной системы, то они не обратят уравнения системы (4) в верные числовые равенства (убедитесь в этом). Заметим, что в этом случае ответ нельзя записать в виде упорядоченной пары чисел, поэтому используют запись в виде приближённых равенств.

Ответ: $x \approx 1{,}1$, $y \approx -0{,}5$.

Единственным решением системы (4) является упорядоченная числовая пара (1,2; −0,6), но найти это решение подбором или с помощью графиков её уравнений непросто. Как решать систему (4) и любую систему линейных уравнений с двумя переменными, не используя её графическую интерпретацию или подбор, будет рассказано в следующем пункте.

Итак, ***при решении системы уравнений с использованием её графической интерпретации возможны три случая.***

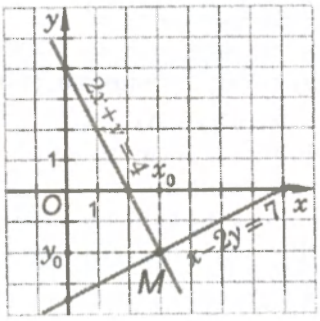

Рисунок 4

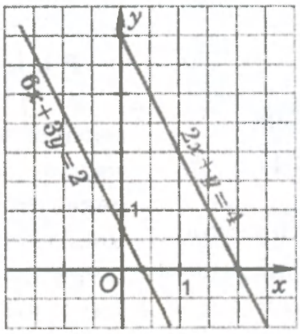

Рисунок 5

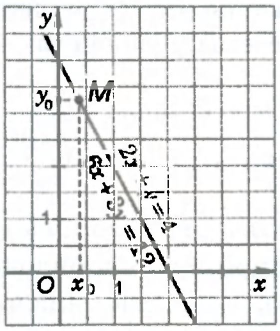

Рисунок 6

Случай 1. Система линейных уравнений с двумя переменными имеет **единственное решение**, когда **прямые**, определяемые её уравнениями, **пересекаются**.

Случай 2. Система линейных уравнений с двумя переменными **не имеет решений**, когда **прямые**, определяемые её уравнениями, **параллельны и не совпадают**.

Случай 3. Система линейных уравнений с двумя переменными **имеет бесконечно много решений**, когда **прямые**, определяемые её уравнениями, **совпадают**.

▲ **Определить число решений системы** двух линейных уравнений с двумя переменными (3), где все коэффициенты при переменных и свободные члены отличны от нуля, **можно и не прибегая к её графической интерпретации.**

Вспомните, как связаны разные случаи взаимного расположения графиков двух линейных функций $y = k_1x + m_1$ и $y = k_2x + m_2$ с отношениями их угловых коэффициентов и свободных членов Представим два уравнения системы (3) в виде:

$$y = -\frac{a_1}{b_1}x + \frac{c_1}{b_1} \text{ и } y = -\frac{a_2}{b_2}x + \frac{c_2}{b_2}.$$

Получим:

$$k_1 = -\frac{a_1}{b_1},\ m_1 = \frac{c_1}{b_1} \text{ и } k_2 = -\frac{a_2}{b_2},\ m_2 = \frac{c_2}{b_2}.$$

Тогда система (3):

а) при $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ имеет единственное решение;

б) при $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ не имеет решений;

в) при $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ имеет бесконечно много решений.

Убедитесь в справедливости этих утверждений, сравнив отношения коэффициентов при переменных и свободных членов в системах линейных уравнений из примера 1, *а–в*.

Определите, пользуясь этими утверждениями, количество решений системы (1)▲

Вопросы для самоконтроля

1. Что называется решением системы уравнений с двумя переменными?

2. Что значит решить систему уравнений с двумя переменными?

3. Какие две системы уравнений с двумя переменными называются равносильными?

4. Запишите систему двух линейных уравнений с двумя переменными в общем виде.

5. Что называют графической интерпретацией системы линейных уравнений с двумя переменными?

6. Почему при решении системы линейных уравнений с использованием её графической интерпретации получают приближённые значения переменных?

7*. В каком случае система линейных уравнений (3):

а) имеет единственное решение;

б) не имеет решений;

в) имеет бесконечно много решений?

8*. В каком случае графиками линейных уравнений системы (3) являются две прямые, которые:

а) пересекаются;

б) параллельны и не совпадают;

в) совпадают?

Упражнения

32°. Укажите систему двух линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными):

1) $\begin{cases} 5x + y = 8, \\ 6y - x = 3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = 4 - 9x, \\ x = 3y + 1; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x = y, \\ 3y + 4x = 0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 8, \\ 3x - xy = 3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} (x + y)^2 = 25, \\ y - x = 1. \end{cases}$

33°. Верно ли, что упорядоченная пара чисел $(x_0,\ y_0)$ является решением системы линейных уравнений с двумя переменными:

1) $\begin{cases} x+2y=5, \\ 2x+y=4, \end{cases}$ если $x_0 = 1$, $y_0 = 2$;

2) $\begin{cases} 3x-y=6, \\ 4x+2y=7, \end{cases}$ если $x_0 = -1$, $y_0 = 4$;

3) $\begin{cases} x+y=12, \\ x-y=2, \end{cases}$ если $x_0 = 7$, $y_0 = 5$;

4) $\begin{cases} 2y-3x=1, \\ 3x+5y=4, \end{cases}$ если $x_0 = 5$, $y_0 = 8$;

5) $\begin{cases} 7x-3y=4, \\ 2x+y=-2, \end{cases}$ если $x_0 = 3$, $y_0 = -2$;

6) $\begin{cases} x+5y=25, \\ 3x+2y=-3, \end{cases}$ если $x_0 = -5$, $y_0 = 6$?

34°. Дана система линейных уравнений с двумя неизвестными:

1) $\begin{cases} x=3+2y, \\ 8y-4x=-12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x=3+2y, \\ 2y-4x=6. \end{cases}$

Верно ли, что её решением является упорядоченная пара чисел:

а) (1; –1); б) (13; 5); в) (– 1; 1);
г) (– 3; –3); д) (5; 1); е) (– 2; –1)?

*Составьте систему двух линейных уравнений с двумя переменными — математическую модель условия данной задачи. Проверьте, есть ли ответ к задаче среди указанных вариантов а—г (**35—36**).*

35. Входной билет в аквапарк для взрослых стоит 12 рублей, для детей — 10 рублей. В воскресенье продали всего 150 билетов на 1620 рублей. Сколько билетов для взрослых и сколько билетов для детей продали в этот день:

а) 98 билетов для взрослых и 52 билета для детей;

б) 60 билетов для взрослых и 90 билетов для детей;

в) 90 билетов для взрослых и 60 билетов для детей;

г) 52 билета для взрослых и 98 билетов для детей?

36. Для победителей школьной олимпиады жюри приобрело 20 призов (калькуляторы и ежедневники) общей стоимостью 186 рублей. Цена калькулятора — 12 рублей, а цена ежедневника — 9 рублей. Сколько было калькуляторов и сколько ежедневников:

а) 8 калькуляторов и 12 ежедневников;
б) 18 калькуляторов и 2 ежедневника;
в) 2 калькулятора и 18 ежедневников;
г) 12 калькуляторов и 8 ежедневников?

37. 1) Как можно изменить условие задачи из теоретического текста пункта 1 этого раздела, чтобы математической моделью изменённого условия стала система линейных уравнений $\begin{cases} 2x+3y=108, \\ y-x=16? \end{cases}$

2) Есть ли решение данной системы среди пар чисел:

а) (14; 30); б) (12; 28);
в) (4; 20); г) (1; 17)?

38°. Определите число решений системы линейных уравнений с двумя переменными, используя её графическую интерпретацию, и укажите эти решения:

1) $\begin{cases} y=3x, \\ y=-2-4x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y=8x, \\ y+x=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y=5-2x, \\ 2x+y=1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y=6-x, \\ x+y=6; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-2y=4, \\ 2x-y=3; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+2y=6, \\ 3x-5y=1. \end{cases}$

*Решите систему линейных уравнений с двумя переменными, используя её графическую интерпретацию (**39—41**).*

39°. 1) $\begin{cases} 2x+5y=6, \\ 2x-y=5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x+y=4, \\ x-2y=-4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x+y=2, \\ 3y+6x=6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 4x-y+5=0, \\ x+2y-4=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+y=6, \\ 2x+2y=4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x+3y-6=0, \\ 3x+9y-4=0. \end{cases}$

40°. 1) $\begin{cases} y = 4x, \\ 4x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - x = 0, \\ 4x - 4y = -\frac{1}{2}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y = 3, \\ 4x - 2y = 6; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 7x + y = 14, \\ 14x + 2y = 28. \end{cases}$

41. 1) $\begin{cases} x + y = 7, \\ x - 2y = 12; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + 2y = 3, \\ x - y = 4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x + y = 3, \\ x + y = 5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x - y = 6, \\ x - y = 4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x + y = 8, \\ 2x + 2y = 16; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x - y = 5, \\ 4x - 4y = 20. \end{cases}$

42. Составьте систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными (математическую модель условия данной задачи) и решите её, используя графическую интерпретацию.

Задача. Маша решила угостить конфетами своих друзей. Она рассчитала, что если каждому другу раздавать по 3 конфеты, то одному из них не хватит двух конфет, а если каждому другу раздать по 2 конфеты, то одна конфета останется лишней. Сколько у Маши друзей и сколько у неё было конфет?

43*. Исследуйте, какой из рисунков (рис. 7) может являться графической интерпретацией системы уравнений:

1) $\begin{cases} 2x + 5y = 1, \\ 4x + 10y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 2x - 5y = 2, \\ 2x + 5y = -2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 5y = 0, \\ 4x + 10y = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 5y = 1, \\ x + 7y = 2. \end{cases}$

44*. Известно, что система двух линейных уравнений с двумя переменными x и y $\begin{cases} mx + ny = k, \\ px + ly = q \end{cases}$ (числа m, n, k, p, l, q отличны от нуля) имеет бесконечное множество решений. Верно ли, что:

1) любая упорядоченная пара чисел является решением этой системы;

2) решения системы — множество пар $(x_0; y_0)$, где x_0, y_0 — любые числа;

3) имеет место равенство $\frac{n}{l} = \frac{k}{q}$;

4) имеет место равенство $pk = mq$;

5) имеет место равенство $mn = pl$;

6) имеют место равенства $\frac{n}{l} = \frac{k}{q} = \frac{m}{p}$?

45*. Укажите, при каких значениях k данная система уравнений:

а) имеет решения;

б) не имеет решений.

1) $\begin{cases} 2x - 2y = 7k, \\ x - y = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 4x + 4y = 5k, \\ y = -x + 1. \end{cases}$

46*. Пусть m — число, x и y — переменные. Существуют ли такие значения m, при которых прямая $(m+3)x + my = m + 1$:

1) параллельна прямой $3x - 2y = 7$;

2) пересекает прямую $5x + 4y = 1$;

3) совпадает с прямой $9x - 6y = 7$;

4) параллельна прямой $4x - 3y = 5$;

5) пересекает прямую $2x + 5y = 2$;

6) совпадает с прямой $15x - 6y = 1$?

47*. Пусть a, b — числа, x и y — переменные. Укажите, при каких значениях a, и b данная система уравнений:

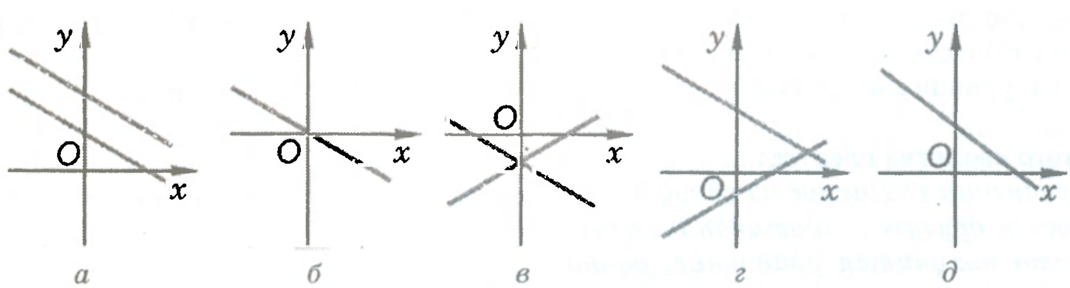

Рисунок 7

а) имеет единственное решение;
б) не имеет решений;
в) имеет бесконечно много решений.

1) $\begin{cases} 2x + ay = -b, \\ 6x - y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax - 5y = b, \\ 2x + 8y = -3. \end{cases}$

Задания для исследования

1. Проанализируйте теоретический материал пункта 2 и практические задания к нему и сделайте вывод об особенностях решения системы линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными) с использованием её графической интерпретации.

2. Дана система двух линейных уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{cases} \qquad (*)$$

Укажите число решений системы уравнений (*), используя её графическую интерпретацию, при:

1) $a_1 = 0,\ b_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ b_2 \neq 0$;
2) $a_1 = 0,\ b_1 \neq 0,\ a_2 = 0,\ b_2 \neq 0,\ c_1 = c_2 = 0$;
3) $a_1 = 0,\ b_1 \neq 0,\ a_2 = 0,\ b_2 \neq 0,\ c_1 \neq c_2$;
4) $a_1 = 0,\ b_1 \neq 0,\ a_2 \neq 0,\ b_2 = 0$.

3. Исследуйте, существует ли система линейных уравнений с двумя переменными, для которой нет графической интерпретации. Если ваш ответ «да», то приведите пример, если — «нет», то поясните почему.

3. Решение системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения и способом подстановки

Нами будут рассмотрены два способа решения системы линейных уравнений с двумя переменными без использования её графической интерпретации: ***способ сложения*** и ***способ подстановки***. В каждом из этих способов используется следующее утверждение.

Если одно из уравнений системы заменить равносильным ему уравнением, то полученная система будет равносильна исходной.

Напомним свойства, с помощью которых уравнение можно заменять на другое уравнение, равносильное данному.

Свойство 1. Если к обеим частям уравнения прибавить или из обеих частей уравнения вычесть одно и то же число, то получится уравнение, равносильное данному.

Из этого свойства следует:
если в уравнении слагаемое из одной части перенести в другую с противоположным знаком, то получится уравнение, равносильное данному.

Свойство 2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, отличное от нуля, то получится уравнение, равносильное данному.

Указанные выше утверждение и свойства дают возможность решить любую систему линейных уравнений с двумя переменными, не используя её графической интерпретации.

Рассмотрим на примере решение системы линейных уравнений с двумя переменными ***способом сложения***.

Пример 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 5y = 3 \\ 2x + 3y = 7. \end{cases} \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнения данной системы так, чтобы коэффициенты, например, при x стали противоположными числами. Для этого обе части второго уравнения умножим на число (−2). При решении это можно записать так:

$$\begin{cases} 4x - 5y = 3, \\ 2x + 3y = 7 \,\big|\cdot (-2). \end{cases}$$

В результате получим систему уравнений, равносильную исходной системе (поясните почему):

$$\begin{cases} 4x-5y=3, \\ -4x-6y=-14. \end{cases} \quad (2)$$

Сложив почленно уравнения системы (2), получим уравнение с одной переменной y вида $-11y=-11$, и, значит, $y-1$. Получим систему уравнений, равносильную системе (2):

$$\begin{cases} 4x-5y=3, \\ y=1; \end{cases}$$

↓получим, подставив $y = 1$ в первое уравнение, ↓

$$\begin{cases} 4x-5\cdot 1=3, \\ y=1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2, \\ y=1. \end{cases}$$

Ответ: (2; 1).

Можно было преобразовать уравнения системы (1) так, чтобы получить противоположные коэффициенты при y. Если умножить обе части первого уравнения системы (1) на 3, а обе части её второго уравнения — на 5, то получим систему уравнений, равносильную системе (1):

$$\begin{cases} 12x-15y=9, \\ 10x+15y=35. \end{cases}$$

Решите полученную систему самостоятельно.

Для решения системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения можно использовать следующий алгоритм:

1) получить систему уравнений с противоположными коэффициентами при одной из двух переменных;

2) сложить почленно уравнения преобразованной системы, получить уравнение с одной переменной и найти её значение;

3) подставить найденное значение переменной в одно из уравнений (любое) исходной системы и найти значение второй переменной;

4) записать в ответе решение системы.

Рассмотрим теперь решение системы линейных уравнений ***способом подстановки***.

Пример 2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-4y=7, \\ 2x-3y=6. \end{cases} \quad (3)$$

Решение. Из второго уравнения системы (3) выразим переменную x через y (поясните как это сделать):

$$x = 3 + 1{,}5y.$$

Так как полученное уравнение равносильно второму уравнению системы (3), то запишем равносильную ей систему:

$$\begin{cases} 3x-4y=7, \\ x=3+1{,}5y. \end{cases} \quad (4)$$

Подставив в первое уравнение системы (4) вместо x выражение $3 + 1{,}5y$, получим систему уравнений, равносильную системе (4):

$$\begin{cases} 3(3+1{,}5y)-4y=7, \\ x=3+1{,}5y. \end{cases} \quad (5)$$

Решив первое уравнение системы (5), получим $y = -4$ (убедитесь в этом). Подставив $y = -4$ во второе уравнение системы (5), находим $x = -3$.

Ответ: (−3; −4).

Для решения системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки можно использовать следующий алгоритм:

1) выразить одну переменную через другую из какого-либо уравнения данной системы;

2) подставить найденное выражение для переменной в другое уравнение системы, получить уравнение с одной переменной и найти её значение.

Далее следует действовать так же, как в указаниях 3) и 4) алгоритма решения системы уравнений методом сложения.

На примере 3 покажем, как можно оформлять запись решения системы линейных уравнений с двумя переменными.

Пример 3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x-3y=3, \\ 2x-y=3 \end{cases} \qquad (6)$$

а) способом сложения;

б) способом подстановки.

Р е ш е н и е. Для системы уравнений (6) уже были указаны приближённые значения переменных x и y (пункт 2, пример 2), найденные с использованием её графической интерпретации.

а) Решим систему (6) способом сложения:

$$\begin{cases} x-3y=3, \mid \cdot (-2) \\ 2x-y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} -2x+6y=-6, \\ 2x-y=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \cdot x+5y=-3, \\ 2x-y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} 5y=-3, \\ 2x-y=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-0,6, \\ 2x-(-0,6)=3; \end{cases} \quad \begin{cases} y=-0,6, \\ 2x+0,6=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=-0,6, \\ 2x=2,4; \end{cases} \quad \begin{cases} y=-0,6, \\ x=1,2. \end{cases}$$

б) Решим систему (6) способом подстановки:

$$\begin{cases} x-3y=3, \\ 2x-y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3+3y, \\ 2x-y=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3+3y, \\ 2(3+3y)-y=3; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3+3y, \\ 5y=-3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3+3 \cdot (-0,6), \\ y=-0,6; \end{cases} \quad \begin{cases} x=3-1,8, \\ y=-0,6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1,2, \\ y=-0,6. \end{cases}$$

О т в е т : (1,2; – 0,6).

Замечание. Равносильные системы уравнений при решении можно записывать либо в строку слева направо, либо в столбик, что требует больше места.

Пример 4. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} 3x-2y=4, \\ 6x-4y=9; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-2y=4, \\ 6x-4y=8. \end{cases}$

Р е ш е н и е.

а) $\begin{cases} 3x-2y=4, \mid \cdot (-2), \\ 6x-4y=8; \end{cases} \quad \begin{cases} -6x+4y=-8, \\ 6x-4y=8; \end{cases}$

сложив почленно уравнения второй системы, получим: $0 \cdot x + 0 \cdot y = 1$. Это уравнение решений не имеет (объясните почему), значит, не имеет решений и исходная система уравнений.

б) $\begin{cases} 3x-2y=4 \mid \cdot (-2), \\ 6x-4y=8; \end{cases} \quad \begin{cases} -6x+4y=-8, \\ 6x-4y=8; \end{cases}$

сложив почленно уравнения второй системы, получим: $0 \cdot x + 0 \cdot y = 0$. Это уравнение обращается в верное числовое равенство $0 = 0$ при любых значениях x и y. Значит, решения исходной системы уравнений, которая равносильна второй системе, совпадают с решениями любого её уравнения, например уравнения $3x - 2y = 4$. Итак, решения исходной системы — множество пар вида $(t;\ \frac{3}{2}t - 2)$, где t — любое число.

Глядя на систему (б), можно было бы сразу заметить, что её уравнения равносильны (поясните почему), а значит, эта система равносильна одному (любому) из двух её линейных уравнений с двумя переменными, которое и надо решить.

О т в е т: а) нет решений; б) $(t;\ \frac{3}{2}t - 2)$, где t — любое число.

Обратите внимание: при решении системы линейных уравнений с двумя переменными любым способом **сначала** исключают в одном из уравнений системы вторую переменную, т. е. **получают линейное уравнение с одной переменной и решают его.** При решении полученного уравнения с одной переменной возможны следующие три случая.

Случай 1. **Уравнение с одной переменной имеет единственное решение;** после его подстановки во второе уравнение системы находят единственное значение второй переменной, и, значит, система уравнений имеет единственное решение (примеры 1—3).

Случай 2. **Уравнение с одной переменной не имеет решений,** поскольку оно равносильно неверному числовому равенству вида 0 = *p* (где *p* — число, отличное от нуля), и, значит, **система уравнений не имеет решений** (пример 4, *а*).

Случай 3. **Уравнение с одной переменной имеет бесконечно много решений,** поскольку оно равносильно верному числовому равенству 0 = 0, и, значит, **система уравнений имеет бесконечное множество решений,** которые совпадают с решениями любого из её уравнений с двумя переменными (пример 4, *б*).

■ В китайском трактате «Математика в девяти книгах» (X—II в. до н. э.) словесно излагаются правила решения систем уравнений с двумя и тремя неизвестными. Современные записи решений уравнений восходят к XVIII в. Первым появился способ сложения для решения систем линейных уравнений, а затем — способ подстановки. В книге «Всеобщая арифметика» всемирно известного английского физика и математика Исаака Ньютона (1643—1727) эти способы решения систем уже встречаются. ■

▲ **Пример 5.** Составить уравнение прямой, которая проходит через точки (1; 3) и (−2; 7).

Р е ш е н и е. Абсциссы данных точек различные, следовательно, прямая, проходящая через них, не параллельна оси ординат, т. е. оси *Oy* (поясните почему). Таким образом, эта прямая является графиком некоторой линейной функции $y = kx + m$, где *k*, *m* — числа, которые нужно найти.

Поскольку эта прямая проходит через точку (1; 3), то будет верным числовое равенство $3 = k \cdot 1 + m$.

Поскольку этой же прямой принадлежит точка (−2; 7), то будет верным числовое равенство $7 = k(-2) + m$.

Запишем систему уравнений с двумя неизвестными *k* и *m*:

$$\begin{cases} 3 = k + m, \\ 7 = -2k + m. \end{cases}$$

Решив её, находим:

$$k = -1\frac{1}{3}; \quad m = 4\frac{1}{3}$$

(убедитесь в этом).

Таким образом, искомое уравнение прямой имеет вид

$$y = -1\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3}.$$

О т в е т: $y = -1\frac{1}{3}x + 4\frac{1}{3}$. ▲

Вопросы для самоконтроля

1. На основании какого утверждения можно решить любую систему линейных уравнений с двумя переменными?

2. Сформулируйте алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя переменными способом сложения.

3. Сформулируйте алгоритм решения системы линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки.

Упражнения

48°. Решите систему линейных уравнений способом сложения:

1) $\begin{cases} x + y = 30, \\ x - y = 20; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x + y = 40, \\ x - y = 16; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5y + x = 44, \\ x + y = 16; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x + 5y = 25, \\ 3x + 2y = -3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x + 8y = 19, \\ 6x - y = 4; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 3x + 4y = 85, \\ 5x - 8y = 105. \end{cases}$

49°. Решите систему линейных уравнений способом подстановки:

1) $\begin{cases} 3x - 5y = 31, \\ 2x + 7y = -31; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 6x - 4y = 15, \\ 8x - 3y = 9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x + 5y = 15, \\ 3x + 8y = -1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x - 7y = -25, \\ 4y - 9x = 30; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3y-4x=1, \\ 3x+4y=28; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x+3y=-4, \\ 5x+6y=-7; \end{cases}$

50. Проанализируйте вид уравнений в системах **48—52** и сделайте вывод о том, какую из них, на ваш взгляд, удобнее было бы решать способом подстановки, а какую — способом сложения. Поясните свой ответ.

Решите систему уравнений (51—55).

51°. 1) $\begin{cases} 7x-3y=3, \\ 4x+5y=-24; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-3y=3, \\ 21x-9y=9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 7x-3y=3, \\ 14x-6y=9; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 8x+2y=3, \\ 4x+y=-3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-3y=15, \\ -4x+6y=-10; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x+3y=0, \\ 7x-2y=0. \end{cases}$

52°. 1) $\begin{cases} 2x+4y=6, \\ y+0,5x=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8+2x=2y, \\ x+4y=10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 1,5y+x=0,5, \\ 2x+3y=-1; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3y=11-2x, \\ 8x=44-12y; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 5y-15x=0, \\ 9y-3x=18; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 12x-3y=5, \\ 6y+10=24x. \end{cases}$

53. 1) $\begin{cases} 7x-3y+1=0, \\ 4x-5y+17=0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 25x-4y+1=0, \\ 31x-5y+16=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(3x+y)-8(x-6y)=46, \\ 4(2x-3y)-13(x-y)=6; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 10(x-y)-4(1-x)=-4y-2, \\ 7(x+2y)+4(3x-y)=39(y-x). \end{cases}$

54. 1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=7, \\ \dfrac{2x}{3}+\dfrac{y}{4}=1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{7x}{6}+\dfrac{5y}{3}=8, \\ \dfrac{7x}{8}+\dfrac{y}{4}=18; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{3}+x=-5, \\ \dfrac{y-x}{5}-y=12; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}-\dfrac{y}{3}=1, \\ \dfrac{2x-1}{2}-\dfrac{3y-1}{3}=\dfrac{5}{6}. \end{cases}$

55. 1) $\begin{cases} \dfrac{2x-7}{3}-1=\dfrac{2y-3}{5}, \\ \dfrac{2x-y}{2}-y=\dfrac{5}{2}; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \dfrac{5y-x}{3}-11=\dfrac{2y-x}{2}, \\ \dfrac{3y-x}{5}-y+8=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{7x+11}{16}+2y+5=\dfrac{15-x}{4}+4x, \\ \dfrac{2y+4}{3}+2x=3y-\dfrac{2x+y}{5}; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{5x-3y}{3}-x-1=\dfrac{2y-3x}{5}, \\ \dfrac{2x-3y}{3}-y-1=\dfrac{3y-4x}{2}. \end{cases}$

56. Пусть b — число, x и y — переменные. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-4y=11, \\ 6y+bx=9, \end{cases}$$

зная, что прямая $2x+by=6$ проходит через точку:

1) $M(13;\ -5)$; 2) $P(-3;\ -2)$.

57. Пусть a — число, x и y — переменные. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5y-4x=7, \\ 2x+ay=-5, \end{cases}$$

зная, что прямая $ax+5y=9$ проходит через точку:

1) $K(2;\ 3)$; 2) $M(-1;\ 2)$.

58. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:

1) $(1;\ 2)$ и $(-1;\ 8)$;
2) $(4;\ 6)$ и $(2;\ 12)$;
3) $(-6;\ 1)$ и $(-5;\ -8)$;
4) $(3;\ -1)$ и $(-6;\ 1)$.

59. Найдите коэффициент k, если прямая $y=kx$ проходит через точку пересечения прямых:

1) $3x-y=20$ и $5y+7x=-12$;

2) $y=5x-3$ и $2y-3x=15$.

60. Пусть m и n — числа, x и y — переменные. Найдите значения m и n, если известно, что решением системы

$$\begin{cases} x-2y=m, \\ 2x-y=n \end{cases}$$

являются:

1) (4; – 1); 2) (– 3; 1);
3) (0; 3); 4) (– 2; – 4).

61. Пусть m – число, x и y — переменные. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+my=11, \\ 4x+6y=6, \end{cases}$$

если известно, что первому уравнению системы удовлетворяет пара чисел:

1) (–1; 3); 2) (2; 1);
3) (–2; 1); 4) (3; 2).

62. Пусть a — число, x и y — переменные. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 5x+2y=12, \\ ax+3y=11, \end{cases}$$

если известно, что второму уравнению системы удовлетворяет пара чисел:

1) (5; –3); 2) (–1; 2);
3) (–1; –2); 4) (–2; –3).

*Пусть a — число, x и y — переменные. Решите систему уравнений (**63, 64**).*

63*. 1) $\begin{cases} 7x+2y=1, \\ 2x+7y=a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7x-3y=a, \\ 21x-9y=9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} ax+2y=3, \\ 3x-y=7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x+2y=3, \\ 3x+ay=7. \end{cases}$

64*. 1) $\begin{cases} x+ay=3, \\ 2x+2ay=4a; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} ax+2y=6a, \\ 2ax+y=3. \end{cases}$

Задания для исследования

1. Проанализируйте теоретический материал пункта 3 и практические задания к нему (а также вспомните содержание пункта 2) и сделайте выводы о различии и сходстве всех известных вам способов решения системы линейных уравнений с двумя переменными (неизвестными).

2. Пусть a — число, x и y — переменные. Используя способ сложения для решения систем линейных уравнений с двумя переменными, найдите, при каких значениях a система $\begin{cases} 4x-2ay=3, \\ 3x+2y=15 \end{cases}$ не имеет решения.

3. Пусть a — число, x и y — переменные. Используя способ подстановки для решения систем линейных уравнений с двумя переменными, найдите, при каких значениях a система $\begin{cases} 10x-7y=5, \\ ax+4y=-2 \end{cases}$ имеет бесконечное множество решений.

Окончание следует